ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 30 — 1993

Existence de l'équilibre dans le modèle à générations

Imed CHERIF, Monique FLORENZANO *

RÉSUMÉ. – Ce papier étudie l'existence d'un équilibre intertemporel pour une économie d'échange définie sur une infinité dénombrable de périodes et comportant une infinité dénombrable de consommateurs. Chaque consommateur apparaît à une date donnée dans le modèle; sa durée de vie peut aussi bien être finie qu'infinie. L'espace des biens à chaque période est de dimension variable, éventuellement infinie.

Un premier théorème d'existence est démontré pour ce modèle général sous l'hypothèse classique qu'il existe un ensemble fini d'agents non négligeables. Appliqué au modèle à générations, il implique pour les agents la possibilité de détenir des ressources initiales en dehors de leur période de vie.

L'existence de l'équilibre dans le modèle à générations en l'absence de tels actifs est ensuite démontrée. La dernière section étend ce résultat au cas où l'espace des biens à chaque période ne possède pas d'élément-unité.

Existence of Equilibria in the Overlapping Generations Model

ABSTRACT. – In this paper, we investigate the existence of a competitive equilibrium in an intertemporal pure exchange model with a countable number of periods and a countable number of agents. This model covers both the overlapping generations case and the case where there is an infinite number of infinite-lived agents or perhaps a mixture of both infinite-lived and finite-lived agents. At each period, the commodity space can be finite or infinite dimensional.

A first equilibrium existence theorem is established for this general model under the classical assumption that there exists a finite set of non-negligible agents. Applied to the overlapping generations exchange model, this result implies for the agents the possibility of having endowments outside their life-time.

The existence of an equilibrium for the overlapping generations model when the agents have no endowment outside their life-time is then proved. The last section extends this result to the case of commodity spaces without order-unit element.

* I. CHERIF, Université de Paris-I, CEPREMAP; M. FLORENZANO, CNRS, CEPREMAP.

1 Introduction

Peut-être parce qu'ils sont une forme simple, mais dotée d'une signigication économique immédiate, des modèles dynamiques, les modèles à générations imbriquées, introduits par SAMUELSON [1958], ont été extensivement étudiés ces dernières années. L'existence de l'équilibre, en particulier, a fait l'objet de papiers de BALASKO et SHELL [1980], BALASKO, CASS et SHELL [1980], WILSON [1981], BURKE [1988], ALIPRANTIS, BROWN et BURKINSHAW [1989 *a* et *b*].

L'économie étudiée est une économie d'échange pur, en temps discret et avec un horizon infini. Selon les auteurs, la distribution temporelle des agents va du plus simple – le modèle à générations favori des macroéconomistes où à chaque période naît un consommateur (représentatif) qui vit durant cette période et la période suivante – à des modèles plus complexes qui admettent une structure démographique variant avec les périodes et une durée de vie non uniforme des agents. En général, le nombre des biens à chaque période est supposé variable – à chaque période des biens apparaissent, d'autres peuvent disparaître – mais fini. Seuls ALIPRANTIS *et al.*, afin de formaliser la possibilité de l'incertitude, supposent, à chaque période, un espace de biens de dimension éventuellement infinie.

Nous avons choisi ici de traiter le problème de l'existence de l'équilibre dans le cadre le plus général du point de vue de l'espace des biens, au prix d'une utilisation systématique de notions et de résultats empruntés à la théorie des espaces de Riesz. Comme ALIPRANTIS *et al.*, nous supposons qu'à chaque période la dualité prix-quantités est représentée par un système de Riesz dual symétrique sur lequel nous faisons deux hypothèses successives de force décroissante. Avec la première hypothèse, le cône positif de l'espace des biens à chaque période est supposé admettre un point intérieur (pour une topologie qui sera précisée plus loin), tandis que dans la seconde, il est seulement supposé admettre un élément strictement positif. Le cas où prix et quantités appartiennent à chaque période à un même espace euclidien est évidemment un cas particulier de réalisation de ces deux hypothèses dont l'intérêt est de couvrir aussi, pour la première, le cas où l'espace des biens à chaque période est un espace du type $L_\infty(\mu)$ (espace des (classes de) fonctions μ-mesurables, essentiellement bornées, définies sur un espace mesuré σ-fini) et, pour la seconde, celui où cet espace est de type $L_p(\mu)$, $p \geqslant 1$ (espace des (classes de) fonctions p-intégrables définie sur un espace mesuré). Comme on le sait, $L_\infty(\mu)$ est un modèle possible du choix stochastique tandis que $L_2(\mu)$ s'est imposé comme espace des biens dans l'étude des marchés financiers.

Nous avons également choisi d'étudier, au moins dans un premier temps, un modèle d'échange pur extrêmement général où coexistent, comme chez Wilson, une infinité dénombrable de consommateurs dont les uns vivent une infinité de périodes tandis que d'autres ont une durée de vie finie. Nous définissons la période de vie d'un consommateur comme l'ensemble des périodes où il peut consommer. L'existence de l'équilibre est alors établie sous des hypothèses classiques sur les ensembles de consommation, les ressources initiales et les préférences des agents et l'hypothèse particulière qu'un nombre fini d'agents détient une fraction positive des ressources totales (on dit encore qu'il existe un nombre fini d'agents « non négligeables »).

Ce premier résultat d'existence est intéressant non seulement pour lui-même mais pour sa signification dans ce qui est le cadre strict des modèles à générations : à chaque période, il n'y a qu'un nombre fini de consommateurs qui tous ont une durée de vie finie, l'ensemble fini des agents « nés » à la même période correspondant à ce que l'on appelle communément une génération. Compte tenu de l'hypothèse standard faite par ailleurs de stricte positivité à chaque période des ressources initiales totales, l'existence de l'équilibre y suppose la possibilité pour les consommateurs d'être dotés de ressources initiales en dehors de leur période de vie ou, ce qui revient au même, de recevoir à leur naissance une encaisse monétaire dont le montant varie avec les prix qui prévalent sur le marché. Le prix d'équilibre obtenu donne une valeur finie aux ressources initiales totales et l'allocation d'équilibre est Pareto-optimale.

Dans un modèle à générations sans monnaie, c'est-à-dire dans un modèle à générations où les consommateurs n'ont pas de ressources initiales en dehors de leur période de vie, l'existence d'un équilibre est basée sur une procédure de perturbation des ressources initiales de façon à se retrouver dans le cas précédent, et sur un passage à la limite sur les équilibres d'une suite bien choisie d'économies perturbées. Le prix d'équilibre, dont l'existence est démontrée par ce procédé, ne donne plus nécessairement une valeur finie aux ressources initiales totales et l'allocation d'équilibre n'est plus nécessairement Pareto-optimale.

Cette technique de démonstration, empruntée à Burke, est étendue ici au cas où l'espace des biens à chaque période est de dimension infinie. Elle rompt avec la tradition qui consistait, de Balasko et Shell, Balasko *et al.* à Aliprantis *et al*,. à ne traiter que le modèle à générations sans monnaie et à opérer le passage à la limite sur les équilibres d'une suite bien choisie d'économies « finies » composées d'un nombre fini de consommateurs du modèle à générations initial. Elle a l'avantage de bien montrer les liens qui unissent les divers modèles dynamiques d'échange pur; dans le cadre très général adopté ici du point de vue des espaces de biens à chaque période, l'approche choisie a de plus le mérite de conserver à la démonstration d'existence un niveau technique aisément accessible. Cette (relative) facilité des preuves tient aussi à l'espace des biens et l'espace des prix que nous construisons pour l'économie considérée sur l'ensemble des périodes.

Cette construction est faite dans la section 2 de ce papier où sont précisées la définition et les différentes hypothèses du modèle dynamique d'échange pur. Dans la section 3, nous démontrons l'existence de l'équilibre pour une économie comportant un nombre fini d'agents non négligeables. La section 4 étudie le problème de l'existence de l'équilibre dans le cadre strict du modèle à générations. Dans la section 5, nous affaiblissons l'hypothèse de stricte positivité des ressources initiales totales à chaque période, au prix d'une hypothèse dite de « propreté » des préférences des consommateurs, classique dans un contexte de dimension infinie. Une annexe établit les propriétés de la dualité prix-quantités construite pour l'économie à partir de la dualité prix-quantités donnée à chaque période. Nous renvoyons le lecteur à ALIPRANTIS et BURKINSHAW ([1978] et [1985]) pour les notions et résultats de la théorie des espaces de Riesz utilisés dans ce papier.

Indiquons, pour terminer, que dans un cadre transitif mais avec un espace des biens de dimension éventuellement infinie à chaque période, nous obtenons pour le modèle à générations un résultat comparable à celui de WILSON [1981]. Ce résultat est plus général que celui d'ALIPRANTIS *et al.*, [1989] quant aux hypothèses sur la structure démographique à chaque période et la durée de vie des agents. Dans un autre papier, nous étendons nos résultats au cas où les consommateurs ont sur leur ensemble de consommation des préférences qui ne sont supposées ni transitives ni totales.

2 Le modèle, ses hypothèses, son espace des biens, son espace des prix

Sous sa forme la plus générale, le modèle étudié dans ce papier est un modèle intertemporel d'échange pur avec une infinité dénombrable d'agents, une infinité dénombrable de périodes et, à chaque période, un espace des biens de dimension éventuellement infinie, plus précisément un espace de Riesz. L'économie $\mathscr{E}$ est définie par la liste : $\mathscr{E} = ((X^i, \succsim^i, \omega^i, T^i)_{i \in \mathscr{N}})$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

1. A chaque période t, la dualité biens-prix est représentée par un système de Riesz dual symétrique $\langle E_t, E'_t \rangle$.

2. Il y a une infinité dénombrable de consommateurs indexés par $i \in \mathscr{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Si à chaque période il n'y a qu'un nombre fini de consommateurs qui tous ont une durée de vie finie, l'hypothèse 2 est évidemment vérifiée. Le modèle à générations ainsi défini apparaît donc comme un cas particulier du modèle général d'échange intertemporel étudié dans ce papier.

3. T^i, un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots\}$, désigne l'ensemble des périodes où le consommateur i est « vivant ». L'ensemble de consommation X^i de l'agent i est le produit cartésien $\prod_{t \in T^i} E_t^+$.

4. $\omega^i > 0$ dans $\prod_{t=1}^{\infty} E_t^+$ représente la dotation initiale du consommateur i. Comme on l'a dit dans l'introduction, le consommateur i est supposé doté de ressources initiales qui peuvent être non nulles en dehors de ses périodes de vie.

On suppose aussi que $\sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega^i \,|\, n=1, 2, \ldots \right\}$ existe dans $\prod_{t=1}^{\infty} E_t$; cette quantité, qu'on note ω, représente la dotation totale de l'économie $\mathscr{E}$. Une allocation $x \in \prod_{i \in \mathscr{N}} X^i$ est dite réalisable si $\sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} x^i \,\middle|\, n=1, 2, \ldots \right\} = \omega$, ce que l'on écrit : $\sum_{i=1}^{n} x^i \uparrow \omega$.

5. Les préférences de chaque consommateur i sont représentées par un préordre total $\gtrsim^i$ sur son ensemble de consommation X^i; ce préordre est convexe, monotone et a un graphe fermé pour le produit des topologies $\sigma(E_t, E_t')$.

6. La dotation totale de l'économie, ω, est **fortement désirable** pour chaque consommateur :

$$\forall i \in \mathscr{N}, \quad \forall x^i \in X^i, \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists z^i \in X^i,$$

$$z^i \leqslant \alpha\omega \quad \text{et} \quad x^i + z^i \succ^i x^i.$$

7. Si x est une allocation réalisable, on a pour tout sous-ensemble I, propre et non vide de $\mathscr{N}$:

$$\exists i \in I, \quad \exists j \notin I, \quad \exists z^i \in X^i, \quad z^i \leqslant \omega^j, \quad x^i + z^i \succ^i x^i.$$

Cette hypothèse dite **d'irréductibilité** suppose un recouvrement suffisant entre les périodes de vie et les ressources des différents agents, c'est-à-dire une imbrication suffisante des générations.

8. $\forall t$, ω_t, la dotation totale à la période t, est un élément-unité de E_t:

$$\forall t, \quad \forall x_t \in E_t, \quad \exists \lambda > 0, \quad |x_t| \leqslant \lambda\omega_t.$$

De plus, E_t' est précisément égal à $(E_t)_n^\sim$, l'espace des formes linéaires continues pour l'ordre sur E_t.

L'annexe développe la signification et les implications d'une telle hypothèse qui, lorsque chaque E_t est un espace euclidien, prend la forme plus familière suivante: $\forall t$, $\omega_t \gg 0$. L'hypothèse 8 sera affaiblie dans la dernière section de cet article.

Les deux dernières hypothèses sont alternatives :

9. Un groupe fini de consommateurs détient une fraction positive des ressources initiales totales (ou encore il existe un nombre fini d'agents non

négligeables) :

$$\exists\, I_0 \text{ fini}, \quad \exists \theta > 0, \qquad \sum_{i \in I_0} \omega^i \geqslant \theta \omega.$$

10. Les ressources initiales de chaque consommateur sont nulles en dehors de ses périodes de vie :

$$\forall i \in N, \qquad \omega^i \in \prod_{t \in T^i} E_t^+$$

Appliquée au modèle à générations, cette dernière hypothèse définit ce que BALASKO et SHELL [1980] appellent le modèle à générations sans monnaie.

Il est bien connu que l'espace produit $\prod_{t=1}^{\infty} E_t'$ n'est pas le dual topologique de l'espace produit $\prod_{t=1}^{\infty} E_t$. Pour rétablir la dualité biens-prix, reprenant et généralisant une idée de BESADA *et al.* [1988], nous réduisons l'espace des prix et l'espace des biens respectivement à :

$$P = \left\{ p \in \prod_{t=1}^{\infty} E_t' \;\middle|\; \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . \omega_t^i < +\infty \;\forall i \in \mathcal{N} \right\}$$

et

$$\Lambda(P) = \left\{ x \in \prod_{t=1}^{\infty} E_t \;\middle|\; \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . |x_t| < +\infty \;\forall p \in P \right\}.$$

$\Lambda(P)$ est muni de la topologie τ engendrée par la famille des semi-normes de Riesz $\{\rho_p;\, p \in P\}$ définies par : $\rho_p(x) = \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . |x_t|$; τ est une topologie localement convexe-solide séparée. De même, P est muni de la topologie τ' engendrée par la famille des semi-normes de Riesz $\{\rho_x;\, x \in \Lambda(P)\}$ définies par : $\rho_x(p) = \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . |x_t|$; τ' est une topologie localement convexe-solide séparée. On montre dans l'annexe que chacune de ces topologies est compatible avec la dualité entre $\Lambda(P)$ et P, définie par :

$$\forall x \in \Lambda(P), \quad \forall p \in P; \qquad \langle p, x \rangle = \sum_{t=1}^{\infty} p_t . x_t.$$

De plus, si $\sigma(\Lambda(P), P)$ est la topologie faible associée à cette dualité, tout intervalle d'ordre de $\Lambda(P)$ est $\sigma(\Lambda(P), P)$-compact, ce qui fait de $\langle \Lambda(P), P \rangle$ un système de Riesz dual symétrique.

Les rapports entre τ, $\sigma(\Lambda(P), P)$ et les topologies $\sigma(E_t, E_t')$ seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite. On peut voir facilement que sur $\Lambda(P)$ le produit des topologies $\sigma(E_t, E_t')$ est moins fin que la topologie faible $\sigma(\Lambda(P), P)$, elle-même évidemment moins fine que τ. Sur X^i, si la durée de vie de i est finie, ou sur les intervalles d'ordre de $\Lambda(P)$, le produit des topologies $\sigma(E_t, E_t')$ coïncide avec $\sigma(\Lambda(P), P)$.

On notera que si l'économie est un modèle à générations vérifiant l'hypothèse 10, $\Lambda(P)$ coïncide avec l'espace Φ des suites nulles sauf pour un nombre fini de termes, tandis que P coïncide avec $\prod_{t=1}^{\infty} E_t'$; dans ce cas, compte tenu de l'hypothèse 8, ω, la dotation totale de l'économie, n'appartient pas à $\Lambda(P)$.

S'il existe un ensemble fini d'agents non négligeables, c'est-à-dire si l'économie vérifie l'hypothèse 9, on a au contraire: $\omega\in\Lambda(P)$. Dans ce dernier cas, on désigne par A_ω l'idéal principal engendré par ω dans $\Lambda(P): A_\omega=\{x\in\Lambda(P) \mid \exists\lambda>0,\ |x|\leqslant\lambda\omega\}$. Muni de la norme de Riesz, $\|x\|_\omega=\inf\{\lambda>0 \mid |x|\leqslant\lambda\omega\}$, A_ω est un AM-espace avec unité dont le dual topologique $(A_\omega, \|.\|_\omega)'$ est noté A_ω'.

Dans toute la suite, l'économie $\mathscr{E}$ sera considérée par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle\Lambda(P), P\rangle$, et les concepts d'équilibre définis par rapport à ce système. Soit X l'ensemble des allocations réalisables. Si $\bar{x}\in X$ et si $\bar{p}\in P$, $\bar{p}\neq 0$, on dit que $(\bar{p}; \bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots)$ est un:

a) **quasi-équilibre faible** (relativement au système dual $\langle\Lambda(P), P\rangle$) si

$$\forall i\in\mathscr{N},\quad \forall x^i\in X^i\cap\Lambda(P),\qquad x^i\succ^i\bar{x}^i\ \Rightarrow\ \bar{p}.x^i\geqslant\bar{p}.\omega^i;$$

b) **quasi-équilibre** (relativement au système dual $\langle\Lambda(P), P\rangle$) si, en outre,

$$\forall i\in\mathscr{N},\quad \bar{p}.\bar{x}^i\leqslant\bar{p}.\omega^i$$

(*i. e.* si chaque $\bar{x}^i$ vérifie pour $\bar{p}$ la contrainte budgétaire du consommateur i);

c) **équilibre** (relativement au système dual $\langle\Lambda(P), P\rangle$) si

$$\forall i\in\mathscr{N},\quad \bar{x}^i \text{ est } \max-\succsim^i \text{ dans } B^i(\bar{p}),$$

avec $B^i(\bar{p})=\{x^i\in X^i\cap\Lambda(P) \mid \bar{p}.x^i\leqslant\bar{p}.\omega^i\}$.

Lorsque l'économie $\mathscr{E}$ est considérée par rapport au système dual de Riesz (non symétrique) $\langle A_\omega, A_\omega'\rangle$, on définit d'une manière analogue le quasi-équilibre faible, le quasi-équilibre et l'équilibre par rapport au système dual $\langle A_\omega, A_\omega'\rangle$. $\Lambda(P)$ étant l'espace de biens «naturel» de l'économie $\mathscr{E}$, la mention «relativement au système dual $\langle\Lambda(P), P\rangle$» sera généralement omise.

3 Existence d'un équilibre pour une économie comportant un nombre fini d'agents non négligeables

Dans cette section, on suppose que l'économie $\mathscr{E}$ vérifie l'hypothèse 9. Sous cette hypothèse, P coïncide avec :

$$\left\{ p \in \prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}'_t \,\middle|\, \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| \,.\, \omega_t < +\infty \right\}.$$

L'existence d'un équilibre, pour l'économie $\mathscr{E}$, par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$, est démontrée en trois étapes.

Dans la première (proposition 1), on considère une suite d'économies $(\mathscr{E}_m)$ définies à partir de l'économie $\mathscr{E}$ et composées des m premiers consommateurs. Un théorème de Mas-Colell [1986], appliqué à chacune des économies $\mathscr{E}_m$, garantit l'existence d'un quasi-équilibre (de $\mathscr{E}_m$) par rapport au système dual de Riesz $\langle \mathrm{A}_\omega, \mathrm{A}'_\omega \rangle$. Un passage à la limite sur la suite de ces quasi-équilibres, établit l'existence d'un quasi-équilibre faible $(\bar{p}, \bar{\bar{x}})$ de $\mathscr{E}$ par rapport au système dual de Riesz $\langle \mathrm{A}_\omega, \mathrm{A}'_\omega \rangle$.

La deuxième étape (proposition 2) est basée sur le théorème de décomposition de Riesz et montre que si $\bar{q} \in (\mathrm{A}_\omega)^{\sim}_n$ est la composante continue pour l'ordre de $\bar{p}$, $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ est un quasi-équilibre de $\mathscr{E}$ relativement au système dual de Riesz $\langle \mathrm{A}_\omega, \mathrm{A}'_\omega \rangle$. La démonstration, inspirée de Aliprantis *et al.* [1989*a*]), systématise des arguments de Bewley [1972], appuyés sur un théorème de décomposition de Yosida-Hewitt.

En dernier lieu (proposition 3), on remarque que, sous l'hypothèse 8, A_ω est τ-dense dans $\Lambda(\mathrm{P})$ et $(\mathrm{A}_\omega)^{\sim}_n = \mathrm{P}$. On montre alors que $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ est aussi un quasi-équilibre par rapport à $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$. De par l'irréductibilité de l'économie, postulée en 7, ce quasi-équilibre est en fait un équilibre.

Proposition 1 : Sous les hypothèses 1 à 6 et 9, l'économie $\mathscr{E}$ admet un quasi-équilibre faible par rapport au système dual de Riesz $\langle \mathrm{A}_\omega, \mathrm{A}'_\omega \rangle$.

Démonstration : Soit $\mathscr{E}_m$ l'économie construite à partir de $\mathscr{E}$ en considérant les m premiers consommateurs. Ces derniers ont le cône positif A^+_ω pour ensemble de consommation; leurs préférences dans $\mathscr{E}$ sont étendues à A^+_ω de la façon évidente suivante : les préférences de i sur A^+_ω ne dépendent que des composantes correspondant aux périodes de vie de i. Les dotations initiales sont modifiées de façon à conserver ω^i comme dotation de chacun des agents sauf le premier et ω comme dotation de chacun des agents sauf le premier et ω comme dotation totale de l'économie :

$$\omega^1(m)=\omega-\sum_{i=2}^{m}\omega^i \qquad \text{et} \qquad \omega^i(m)=\omega^i \qquad \forall i: 2\leqslant i\leqslant m.$$

Les trois premières parties de la démonstration consistent à montrer que l'économie $\mathscr{E}_m$ vérifie les conditions d'existence d'un quasi-équilibre énoncées dans Mas-Colell [1986] (théorème, p. 1050).

1. $\forall i\in\mathscr{N}$, $\gtrsim^i$ **est** $\|.\|_\omega$**-continue sur** A_ω^+.

Ceci revient à démontrer que :

$\forall x\in A_\omega^+$, $\{y\in A_\omega^+ \mid y\gtrsim^i x\}$ et $\{z\in A_\omega^+ \mid x\gtrsim^i z\}$ sont $\|.\|_\omega$-fermés. Soit

$$\{y_n\}\subset A_\omega^+, \qquad y_n\xrightarrow{\|.\|_\omega}y \qquad \text{et} \qquad y_n\gtrsim^i x\,(\text{resp.}\, y_n\lesssim^i x).$$

Si on pose $\varepsilon_n=\sup\{\|y-y_l\|_\omega \mid l\geqslant n\}$, on a : $\varepsilon_{n+1}\leqslant\varepsilon_n$ et $\varepsilon_n\to 0$, *i.e.* $\varepsilon_n\downarrow 0$. D'autre part $|y-y_n|\leqslant\|y-y_n\|_\omega\ \omega\leqslant\varepsilon_n\omega\downarrow 0$ (car A_ω est archimédien). On en déduit successivement : $y_n\overset{0}{\to}y$, $y_n\overset{\tau}{\mapsto}y$, $y_n\to y$ pour le produit des topologies $\sigma(E_t, E_t')$ et donc $y\gtrsim^i x$ (resp. $y\lesssim^i x$) (hypothèse 5).

2. $\forall i\in\mathscr{N}$, ω **est une direction d'uniforme** $\|.\|_\omega$**-propreté sur** A_ω^+, *i.e.* il existe $V\in\mathscr{V}_{\|.\|_\omega}(0)$ tel que pour tout $x\in A_\omega^+$,

$$\left.\begin{array}{r} x+\alpha\omega+z\in A_\omega^+\\ \alpha>0,\quad z\in\alpha V\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x+\alpha\omega+z\succ^i x.$$

On remarque d'abord que : $\forall t\in\operatorname{int}(A_\omega^+)$, $\forall x\in A_\omega^+$, on a : $x+t\succ^i x$. En effet $\forall t\in\operatorname{int}(A_\omega^+)$, $\exists\alpha>0$, $t-\alpha\omega\in A_\omega^+$; par suite,

$$x+t=x+\alpha\omega+(t-\alpha\omega)\gtrsim^i x+\alpha\omega\succ^i x.$$

D'autre part,

$$\omega\in\operatorname{int}(A_\omega^+)\ \Rightarrow\ \exists V\in\mathscr{V}_{\|.\|_\omega}(0), \qquad \{\omega\}+V\subset\operatorname{int}(A_\omega^+);$$

par suite,

$$\left.\begin{array}{r} x+\alpha\omega+z\in A_\omega^+\\ \alpha>0,\quad z\in\alpha V\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x+\alpha\omega+z\succ^i x.$$

Bien entendu, $\dfrac{1}{m}\omega$ est aussi une direction d'uniforme $\|.\|_\omega$-propreté dans A_ω^+ pour i.

3. $\mathscr{E}_m$ **vérifie l'hypothèse dite de fermeture.**

Soit

$$X_m=\left\{(x^i)_{i=1}^m\in(\Lambda(P)^+)^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^m x^i=\omega\right\}=\left\{(x^i)_{i=1}^m\in(A_\omega^+)^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^m x^i=\omega\right\}$$

et soit $(x_n^1, x_n^2, \ldots . x_n^m)_n$ une suite d'éléments de X_m tels que $x_{n+1}^i \gtrsim^i x_n^i$ $\forall i: 1 \leqslant i \leqslant m$, $\forall n$. D'une part, parce que $\langle \Lambda(P), P \rangle$ est un système de Riesz dual symétrique, X_m est $(\sigma(\Lambda(P), P))^m$-compact. D'autre part, on a déjà dit que sur l'intervalle $[0, \omega]$, $\sigma(\Lambda(P), P)$ coïncide avec le produit des topologies faibles $\sigma(E_t, E_t')$. On en déduit que l'ensemble

$$V_n = \{ (x^i)_{i=1}^m \in X_m \mid x^i \gtrsim^i x_n^i \, \forall i: 1 \leqslant i \leqslant m \}$$

est $(\sigma(\Lambda(P), P))^m$-fermé. De $V_n \neq \emptyset$ et $V_{n+1} \subset V_n \; \forall n$, on déduit $\bigcap\limits_n V_n \neq \emptyset$. Il existe donc $(x^i)_{i=1}^m \in X_m$ tel que $x^i \gtrsim^i x_n^i \, \forall i: 1 \leqslant i \leqslant m$ et $\forall n$.

D'après le théorème de Mas-Colell, on déduit de 1, 2 et 3 que l'économie $\mathscr{E}_m$ admet un quasi-équilibre $(\bar{p}_m; \bar{x}_m^1, \bar{x}_m^2, \ldots, \bar{x}_m^m)$ par rapport au système dual de Riesz $\langle A_\omega, A_\omega' \rangle$ avec $\bar{p}_m . \omega = 1$. Le lecteur vérifiera facilement qu'on peut toujours supposer que $\forall i$, $\bar{x}_m^i \in X^i$.

On termine la démonstration par un passage à la limite sur les quasi-équilibres $(\bar{p}_m; \bar{x}_m^1, \bar{x}_m^2, \ldots, \bar{x}_m^m)$ des économies $\mathscr{E}_m$.

Soit $\Delta = \{ p \in A_\omega' \mid p \geqslant 0$ et $p . \omega = 1 \}$. D'après le théorème d'Alaoglu-Bourbaki, Δ est $\sigma(A_\omega', A_\omega)$-compact. On considère la suite

$$(\bar{p}_m; \bar{x}_m^1, \bar{x}_m^2, \ldots, \bar{x}_m^m, 0, \ldots)_m \subset \Delta \times [0, \omega]^{\mathscr{N}};$$

comme $\Delta \times [0, \omega]^{\mathscr{N}}$ est $\sigma(A_\omega', A_\omega) \times (\sigma(\Lambda(P), P))^{\mathscr{N}}$-compact, on peut supposer que $(\bar{p}_m; \bar{x}_m^1, \bar{x}_m^2, \ldots, \bar{x}_m^m, 0, \ldots)$ converge vers $(\bar{p}; \bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots) \in \Delta \times [0, \omega]^{\mathscr{N}}$. Soit alors, pour $i \in \mathscr{N}$, $x^i \in A_\omega^+$ tel que $x^i \succ^i \bar{x}^i$. De l'hypothèse 5, on déduit que pour m assez grand, $x^i \succ^i \bar{x}_m^i$ et donc $\bar{p}_m . x^i \geqslant \bar{p}_m . \omega^i(m)$.

On distingue maintenant deux cas:

a) si $i = 1$,

$$\bar{p}_m . x^1 \geqslant \bar{p}_m . \omega^1(m) = \bar{p}_m . \left(\omega - \sum_{i=2}^m \omega^i \right) \geqslant \bar{p}_m . \omega^1 \quad \Rightarrow \quad \bar{p} . x^1 \geqslant \bar{p} . \omega^1;$$

b) si $i \geqslant 2$

$$\bar{p}_m . x^i \geqslant \bar{p}_m . \omega^i(m) = \bar{p}_m . \omega^i \quad \Rightarrow \quad \bar{p} . x^i \geqslant \bar{p} . \omega^i,$$

Enfin, on note que $\sum\limits_{i=1}^n \bar{x}^i \leqslant \omega \; \forall n = 1, 2, \ldots$

En effet, $\sum\limits_{i=1}^n \bar{x}_m^i \leqslant \omega \; \forall m \geqslant n$ implique $\sum\limits_{i=1}^n \bar{x}^i \leqslant \omega$. Soient alors

$$x = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{x}^i \mid n = 1, 2, \ldots \right\}$$

(x existe car A_ω est Dedekind-complet), $\bar{\bar{x}}^1=\bar{x}^1+\omega-x$, $\bar{\bar{x}}^i=\bar{x}^i\ \forall i\geqslant 2$. D'une part $\sum_{i=1}^{n}\bar{\bar{x}}^i\uparrow\omega$ et d'autre part $\bar{\bar{x}}^i\succsim^i\bar{x}^i\ \forall i\in\mathcal{N}$. $(\bar{p},\bar{\bar{x}})$ est donc un quasi-équilibre faible de $\mathscr{E}$ par rapport au système dual de Riesz $\langle A_\omega, A'_\omega\rangle$. □

Proposition 2 : Sous les hypothèses 1 à 6 et 9, $\mathscr{E}$ admet un quasi-équilibre par rapport au système dual $\langle A_\omega, A'_\omega\rangle$ dont le prix est un élément de $(A_\omega)_n^\sim$.

Démonstration: Soit $(\bar{p},\bar{\bar{x}})$ le quasi-équilibre faible dont la proposition 1 démontre l'existence.

Sous l'hypothèse 9, on montre facilement qu'il existe $j\in\mathcal{N}$ tel que $\bar{p}.\omega^j>0$. Il résulte d'autre part du théorème de décomposition de Riesz que $\bar{p}=\bar{q}+r$ avec $\bar{q}\in(A_\omega)_n^\sim$, l'espace vectoriel des formes linéaires continues pour l'ordre sur A_ω, $r\in((A_\omega)_n^\sim)^d$, le complément disjoint de $(A_\omega)_n^\sim$, $\bar{q}\geqslant 0$, $r\geqslant 0$.

1. On montre d'abord par contraposition que $\bar{q}>0$. Supposons en effet $\bar{q}=0$. On sait (th. 4.6 dans Aliprantis et Burkinshaw [1985]) que

$$\bar{q}(x)=\inf\{\sup\bar{p}.x_\alpha,\ 0\leqslant x_\alpha\uparrow x,\ (x_\alpha)\subset A_\omega\}\quad\forall x\in A_\omega^+.$$

On en déduit :

$$0=\inf\{\sup r.x_\alpha,\ 0\leqslant x_\alpha\uparrow x,\ (x_\alpha)\subset A_\omega\}\quad\forall x\in A_\omega^+.$$

Soient alors $\varepsilon=\bar{p}.\omega^j=r.\omega^j$ et $x^i\in A_\omega^+$ tel que $x^j\succ^j\bar{\bar{x}}^j$. Il existe une suite généralisée $(x_\alpha)\subset A_\omega$ telle que $0\leqslant x_\alpha\uparrow x^j$ et $\sup r.x_\alpha<r.\omega^j$. Or, pour α assez grand, $x_\alpha\succ^j\bar{\bar{x}}^j$ implique $\bar{p}.x_\alpha=r.x_\alpha\geqslant\bar{p}.\omega^j=r.\omega^j$, une contradiction.

Remarquons ici que, parce que $(A_\omega, \|.\|_\omega)$ est un espace de Riesz normé complet, $A'_\omega=A_\omega^\sim$, l'espace vectoriel des formes linéaires bornées sur A_ω. On en déduit $\bar{q}\in A'_\omega$. Puisque $\bar{q}>0$ et parce que $\omega\in\operatorname{int}(A_\omega^+)$, on a : $\bar{q}.\omega>0$.

2. On montre maintenant que $\forall i\in\mathcal{N}$, $x^i\succ^i\bar{\bar{x}}^i$ dans $A_\omega^+\Rightarrow\bar{q}.x^i\geqslant\bar{q}.\omega^i$. Supposons en effet que : $\exists j\in\mathcal{N}$, $x^j\succ^j\bar{\bar{x}}^j$ dans A_ω^+ et $\bar{q}.x^j<\bar{q}.\omega^j$.

Posons $\varepsilon=\bar{p}.\omega^j-\bar{q}.x^j$ (il est facile de voir que $\varepsilon>0$). Comme

$$\bar{q}.x^j=\inf\{\sup(\bar{q}+r).x_\alpha,\ 0\leqslant x_\alpha\uparrow x^j,\ (x_\alpha)\subset A_\omega\}$$
$$=\bar{q}.x^j+\inf\{\sup r.x_\alpha,\ 0\leqslant x_\alpha\uparrow x^j,\ (x_\alpha)\subset A_\omega\},$$

on en déduit l'existence d'une suite généralisée $(x_\alpha)\subset A_\omega$ telle que $0\leqslant x_\alpha\uparrow x^j$ et $\sup r.x_\alpha<\bar{p}.\omega^j-\bar{q}.x^j$. Ceci est impossible car, pour α assez grand, $x_\alpha\succ^j\bar{\bar{x}}^j$ implique $\bar{p}.x_\alpha\geqslant\bar{p}.\omega^j$, alors que

$$\bar{p}.x_\alpha=\bar{q}.x_\alpha+r.x_\alpha<\bar{q}.x_\alpha+\bar{p}.\omega^j-\bar{q}.x^j\leqslant\bar{p}.\omega^j.$$

3. Il reste à vérifier que $\bar{q}.\bar{\bar{x}}^i=\bar{q}.\omega^i\ \forall i\in\mathcal{N}$.
D'une part :

$$\bar{\bar{x}}^i+\alpha\omega\succ^i\bar{\bar{x}}^i\quad\forall\alpha>0\quad\Rightarrow\quad\bar{q}.\bar{\bar{x}}^i+\alpha\bar{q}.\omega\geqslant\bar{q}.\omega^i\,\forall\alpha>0\quad\Rightarrow\quad\bar{q}.\bar{\bar{x}}^i\geqslant\bar{q}.\omega^i$$

D'autre part, supposons que: $\exists j \in \mathcal{N}$, $\bar{q} . \bar{\bar{x}}^j > \bar{q} . \omega^j$; alors $\exists \delta$, $\bar{q} . \bar{\bar{x}}^j - \bar{q} . \omega^j = \delta > 0$. Par suite

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{q} . \bar{\bar{x}}^i - \sum_{i=1}^{n} \bar{q} . \omega^i \geqslant \delta \ \forall n \geqslant j;$$

comme $\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{x}}^i \uparrow \omega$ et $\bar{q} \in (A_\omega)_{\tilde{n}}$, $\bar{q} > 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \bar{q} . \bar{\bar{x}}^i \uparrow \bar{q} . \omega$ et, par suite, $0 \geqslant \delta > 0$, ce qui est impossible. $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ est bien un quasi-équilibre de $\mathscr{E}$ relativement à $\langle A_\omega, A'_\omega \rangle$. □

PROPOSITION 3 : Sous les hypothèses 1 à 9, l'économie $\mathscr{E}$ admet un équilibre $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ par rapport au système dual de Riesz $\langle \Lambda(P), P \rangle$.

Démonstration: On montre dans la proposition 3 de l'annexe que les hypothèses 1, 8 et 9 impliquent que $P = (A_\omega)_{\tilde{n}}$. $\bar{q}$ est donc bien un élément de P.

On voit aussi dans la même proposition que A_ω est dense pour l'ordre (et donc τ-dense) dans $\Lambda(P)$. Soit alors $x^i \in \Lambda(P)^+$. Il existe $(x^{i\nu}) \subset A_\omega^+$, $x^{i\nu} \xrightarrow{\tau} x^i$. Si $x^i \succ^i \bar{\bar{x}}^i$ alors, pour ν assez grand, $x^{i\nu} \succ^i \bar{\bar{x}}^i$ et $\bar{q} . x^{i\nu} \geqslant \bar{q} . \omega^i$; on en déduit: $\bar{q} . x^i \geqslant \bar{q} . \omega^i$ (car $\bar{q} \in P$). Ceci montre que $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ est un quasi-équilibre relativement à $\langle \Lambda(P), P \rangle$.

Pour montrer que $(\bar{q}, \bar{\bar{x}})$ est un équilibre par rapport $\langle \Lambda(P), P \rangle$, il suffit de montrer que $\bar{q} . \omega^i > 0 \ \forall i \in \mathcal{N}$. Soit $I = \{ i \in \mathcal{N} \mid \bar{q} . \omega^i > 0 \}$. Il est clair que $I \neq \varnothing$ (car $\bar{q} \in P$ et $\bar{q} . \omega > 0$). Si $I \neq \mathcal{N}$, par irréductibilité (hypothèse 7), $\exists i \in I$, $\exists j \notin I$, $\exists z^i \in X^i$, $z^i \leqslant \omega^j$, $\bar{\bar{x}}^i + z^i \succ^i \bar{\bar{x}}^i$. Puisque $i \in I$, $\bar{\bar{x}}^i$ est $\succsim^i$-max dans $B^i(\bar{q})$ et, par suite, $\bar{q} . \omega^j > 0$, ce qui contredit $j \notin I$. □

Pour conclure cette section, on remarquera que l'hypothèse d'existence d'un ensemble fini d'agents non négligeables n'est nullement choquante dans un modèle d'équilibre général intertemporel où une infinité dénombrable de consommateurs vivent chacun une infinité dénombrable de périodes. Pour un modèle à générations, elle implique en revanche que certains consommateurs soient effectivement dotés de ressources initiales en dehors de leurs périodes de vie. Ces actifs réels peuvent être interprétés comme des encaisses monétaires dont le montant dépend du niveau des prix. S'ils vérifient l'hypothèse 9, ces actifs garantissent l'existence d'un équilibre dont on vérifie aisément qu'il est Pareto-optimal (la valeur d'équilibre des ressources initiales totales est finie).

On verra dans la section suivante qu'en l'absence de tels actifs, le modèle à générations admet un équilibre (non nécessairement Pareto-optimal) tandis que leur présence dans le modèle à générations en l'absence de l'hypothèse 9 peut expliquer la nécessité de transferts monétaires pour la réalisation de l'équilibre.

4 Existence d'un équilibre dans le modèle à générations

On étudie désormais le modèle à générations défini dans tout ce papier par l'hypothèse suivante :

2′. Pour tout i, T^i, la durée de vie du consommateur i, est finie; pour tout t, I_t, l'ensemble des agents vivant à la période t, est fini.

Rappelons que $P=\left\{p\in\prod_{t=1}^{\infty} E'_t \,\middle|\, \sum_{t=1}^{\infty}|p_t|.\omega^i_t<+\infty,\ \forall i\in\mathcal{N}\right\}$. Il suit de l'hypothèse 2′ que

$$\forall i\in N,\quad X^i\subset\Lambda(P)=\left\{x\in\prod_{t=1}^{\infty}E_t\,\middle|\,\sum_{t=1}^{\infty}|p_t|.|x_t|<+\infty,\ \forall p\in P\right\}.$$

Nous ferons cependant référence à l'espace des prix et à l'espace des biens utilisés dans la section précédente et notés désormais :

$$P'=\left\{p\in\prod_{t=1}^{\infty}E'_t\,\middle|\,\sum_{t=1}^{\infty}|p_t|.\omega_t<+\infty\right\}$$

et $\Lambda(P')=\left\{x\in\prod_{t=1}^{\infty}E_t\,\middle|\,\sum_{t=1}^{\infty}|p_t|.|x_t|<+\infty,\ \forall p\in P'\right\}$.

On remarquera que $P'\subset P$ et $\Lambda(P)\subset\Lambda(P')$.

Un **équilibre avec transferts** de $\mathscr{E}$ est un couple $(\bar{p},\bar{x})\in P\times\prod_{i\in\mathbb{N}}X^i$ vérifiant :

(i) $\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^i\uparrow\omega$;

(ii) $x^i\succ^i\bar{x}^i\Rightarrow\bar{p}.x^i>\bar{p}.\bar{x}^i$.

La recherche d'un équilibre dans le modèle à générations est basée sur une technique de perturbation des dotations initiales individuelles, empruntée à Burke [1988].

Dans une première étape, on considère une suite d'économies $(\mathscr{E}_k)$, construite à partir de l'économie $\mathscr{E}$ en perturbant les dotations initiales individuelles sans changer la dotation initiale totale de telle sorte que chacune de ces économies vérifie l'hypothèse 9 et admette, en application du résultat de la section 3, un équilibre par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle\Lambda(P'),P'\rangle$; chaque équilibre ainsi trouvé est un équilibre avec transferts de l'économie originelle $\mathscr{E}$.

Dans une deuxième étape, on montre qu'une suite partielle (généralisée) de ces équilibres avec transferts converge, pour une topologie appropriée, vers un quasi-équilibre faible par rapport au système dual $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$.

Enfin, on montre que, sous l'hypothèse 10, ce quasi-équilibre faible du modèle à générations est en fait un équilibre.

PROPOSITION 4 : Sous les hypothèses 1, 2', 3 à 8, le modèle à générations $\mathscr{E}$ admet un équilibre avec transferts $(\bar{p}, \bar{x})$ vérifiant :

1) $\bar{p}.\bar{x}^i \geqslant \frac{1}{2}\bar{p}.\omega^i \, \forall i \in \mathscr{N}$;

2) $\bar{p}.\bar{x}^1 = 1$.

Démonstration: On démontre, en fait, que l'économie $\mathscr{E}$ admet une suite d'équilibres avec transferts vérifiant les conditions 1) et 2). Soit $\varepsilon \in \Lambda(\mathrm{P}')$ tel que $\varepsilon = \sum_{i \in \mathscr{N}} \varepsilon^i$, $0 \leqslant \varepsilon^i \leqslant \omega^i$ pour tout i de $\mathscr{N}$, et pour tout t, ε_t strictement positif dans E_t. On construit maintenant une suite d'économies $(\mathscr{E}_k)$ de la façon suivante : pour tout $k \geqslant 4$, $\mathscr{E}_k$ est constituée des mêmes consommateurs que dans l'économie $\mathscr{E}$, munis des mêmes préférences sur les mêmes ensembles de consommation et des dotations initiales suivantes :

$$\omega^i(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\omega^i + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{2^i} - \varepsilon^i\right) \qquad \forall i, \qquad i \neq k$$

et

$$\omega^k(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\omega^k + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{2^k} - \varepsilon^k\right) + \frac{1}{k}\omega.$$

On note que la dotation totale de l'économie $\mathscr{E}_k$ est précisément ω (la dotation totale de l'économie originelle $\mathscr{E}$). On a aussi les relations suivantes :

$$\omega^i(k) \geqslant \left(1 - \frac{2}{k}\right)\omega^i + \frac{1}{k}\,\frac{\varepsilon}{2^i} \quad \forall i \qquad (i = k \text{ ou } i \neq k)$$

et $\omega^k(k) \geqslant \frac{1}{k}\omega$. Cette dernière relation implique la vérification de l'hypothèse 9 pour l'économie $\mathscr{E}_k$.

Il est facile de voir que chacune des économies $\mathscr{E}_k$, considérée par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle \Lambda(\mathrm{P}'), \mathrm{P}' \rangle$, vérifie les hypothèses 1 à 9, sauf l'irréductibilité 7; en revanche $\forall p \in \mathrm{P}'$, $p > 0$, on a pour tout i :

$$p.\omega^i(k) \geqslant \frac{1}{k\,2^i} p.\varepsilon = \frac{1}{k\,2^i} \sum_{t=1}^{\infty} p_t.\varepsilon_t > 0.$$

En vertu des résultats de la section 3, l'économie $\mathscr{E}_k$ admet un équilibre $(\bar{q}(k), \bar{x}(k))$ par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle \Lambda(\mathrm{P}'), \mathrm{P}' \rangle$ avec $\bar{q}(k) > 0$. Comme pour tout i, $\bar{q}(k).\bar{x}^i(k) = \bar{q}(k).\omega^i(k)$, cet équilibre de $\mathscr{E}_k$ est évidemment un équilibre avec transferts de $\mathscr{E}$. De plus, de $k \geqslant 4$

on déduit :

$$\bar{q}(k).\bar{x}^i(k)=\bar{q}(k).\omega^i(k)\geq\frac{1}{2}\bar{q}(k).\omega^i.$$

Puisque $\bar{q}(k).\bar{x}^i(k)>0\ \forall i$, on peut normaliser $\bar{q}(k)$ par la condition $\bar{q}(k).\bar{x}^1(k)=1$. □

L'ensemble des prix associés à un équilibre avec transferts de $\mathscr{E}$ vérifiant les relations 1) et 2) de la proposition 4 sera noté dans toute la suite $\mathrm{P}_{1/2}$. L'objectif des deux lemmes techniques suivants est de montrer que l'ensemble $\mathrm{P}_{1/2}$ est un sous-ensemble relativement dénombrablement compact de P pour une topologie à définir.

LEMME 5 : Soit $(\bar{p}^k, \bar{x}^k)$ une suite d'équilibres avec transferts de l'économie $\mathscr{E}$ vérifiant les conditions de la proposition 4. Pour tout couple $(i, j)\in\mathscr{N}\times\mathscr{N}$, il existe $k_{ij}>0$ tel que, pour k assez grand,

$$0<\bar{p}^k.\bar{x}^{ik}<k_{ij}\bar{p}^k.\bar{x}^{jk}.$$

Démonstration : On démontre ce lemme par l'absurde.

Supposons que $\exists\, i_0, j_0\in\mathscr{N}$ tels que $\liminf\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\bar{p}^k.\bar{x}^{j_0 k}}{\bar{p}^k.\bar{x}^{i_0 k}}=0.$

Soient $\mathscr{N}_0=\left\{i\in\mathscr{N}\mid\liminf\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\bar{p}^k.\bar{x}^{ik}}{\bar{p}^k.\bar{x}^{i_0 k}}=0\right\}$

et $\mathscr{N}_1=\left\{i\in\mathscr{N}\mid\liminf\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\bar{p}^k.\bar{x}^{ik}}{\bar{p}^k.\bar{x}^{i_0 k}}>0\right\}.$

Le procédé de diagonalisation de Cantor garantit l'existence d'un sous-ensemble non vide $\mathscr{N}'_0$ de $\mathscr{N}_0$, de $\mathscr{N}'_1$ contenant $\mathscr{N}_1$ et d'une suite partielle, notée ici identiquement, telle que

$\forall i\in\mathscr{N}'_0,\quad\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\bar{p}^k.\bar{x}^{ik}}{\bar{p}^k.\bar{x}^{i_0 k}}=0$

$\forall i\in\mathscr{N}'_1$, il existe α^i tel que pour k assez grand, $\dfrac{\bar{p}^k.\bar{x}^{ik}}{\bar{p}^k.\bar{x}^{i_0 k}}>\alpha^i>0.$

$\mathscr{N}'_0$ et $\mathscr{N}'_1$ forment une partition non triviale de $\mathscr{N}$.

La suite $(\bar{x}^k)$, étant dans $\prod\limits_{i\in\mathscr{N}}(\prod\limits_{t\in\mathrm{T}^i}[0,\omega_t])$ qui est $\prod\limits_{i\in\mathscr{N}}(\prod\limits_{t\in\mathrm{T}^i}\sigma(\mathrm{E}_t,\mathrm{E}'_t))$-compact, admet une suite partielle généralisée $(\bar{x}^\alpha)$ qui converge vers $\bar{x}$. Il est clair que $\bar{x}$ est une allocation réalisable. Par l'irréductibilité 7, on a : $\exists\, i\in\mathscr{N}'_1$, $\exists j\in\mathscr{N}'_0$, $\exists\, z^i\in\mathrm{X}^i$, $z^i\leqslant\omega^j$ tels que $\bar{x}^i+z^i\succ^i\bar{x}^i$ et, par la continuité des préférences, pour α assez grand et λ assez proche de 1, $\lambda(\bar{x}^{i\alpha}+z^i)\succ^i\bar{x}^{i\alpha}$. On peut alors construire une suite croissante k_n d'entiers vérifiant $\lambda(\bar{x}^{ik_n}+z^i)\succ^i\bar{x}^{ik_n}$. Par suite,

$$\bar{p}^{k_n}.[\lambda(\bar{x}^{ik_n}+z^i)]>\bar{p}^{k_n}.\bar{x}^{ik_n},$$

i.e. $\lambda\bar{p}^{k_n}.z^i>(1-\lambda)\bar{p}^{k_n}.\bar{x}^{ik_n}.$

Or on a: $\overline{p}^{k_n}.\omega^j \geq \overline{p}^{k_n}.z^i$ et $\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{jk_n} \geq \frac{1}{2}\overline{p}^{k_n}.\omega^j$, par suite

$$2\lambda \overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{jk_n} > (1-\lambda)\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{ik_n},$$

ce qui implique

$$\frac{\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{jk_n}}{\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{i_0 k_n}} > \frac{1-\lambda}{2\lambda}\,\frac{\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{ik_n}}{\overline{p}^{k_n}.\overline{x}^{i_0 k_n}}.$$

Ceci est impossible car $i \in \mathcal{N}'_1$ et $j \in \mathcal{N}'_0$. □

On rappelle maintenant que, pour tout t, E_t est un espace de Riesz Dedekind-complet et que ω_t est un élément-unité de E_t. Soit $\|.\|_{\omega_t}$ la norme de Riesz définie sur E_t par: $\forall x \in E_t$, $\|x\|_{\omega_t} = \inf\{\lambda > 0 \mid |x| \leq \lambda\omega_t\}$. E_t, muni de cette norme, est un AM-espace avec unité. On note E_t^* le dual topologique de $(E_t, \|.\|_{\omega_t})$.

Lemme 6 : Si $(\overline{p}^k, \overline{x}^k)$ est une suite d'équilibres avec transferts de $\mathcal{E}$ vérifiant les relations 1) et 2) de la proposition 4, alors elle admet une suite partielle (généralisée) qui converge vers $(\overline{p}, \overline{x}) \in \prod_{t=1}^{\infty} E'_t \times \prod_{i \in \mathcal{N}} X^i$ pour la topologie $\prod_{t=1}^{\infty} \sigma(E_t^*, E_t) \times \prod_{i \in \mathcal{N}} (\prod_{t \in T^i} \sigma(E_t, E'_t))$. De plus, on a: $\forall i \in \mathcal{N}$, $x^i \succ^i \overline{x}^i \Rightarrow \overline{p}.x^i \geq \lim_{k \to +\infty} \overline{p}^k.\overline{x}^{ik}$.

Démonstration: En fonction du lemme 5, on peut supposer que, pour tout i, $\overline{p}^k.\overline{x}^{ik}$ converge et que $\lim_{k \to +\infty} \overline{p}^k.\overline{x}^{ik} > 0$. Il suit aussi du lemme 5 et de l'hypothèse 10 que pour tout t, il existe K_t tel que $\overline{p}_t^k.\omega_t < K_t$ si k est assez grand. On en déduit que la suite $\{(\overline{p}^k, \overline{x}^k)\}$ est dans un ensemble $\prod_{t=1}^{\infty} \sigma(E_t^*, E_t) \times \prod_{i \in \mathcal{N}} (\prod_{t \in T^i} \sigma(E_t, E'_t))$-compact et donc admet une suite partielle (généralisée) $(\overline{p}^\nu, \overline{x}^\nu)$ qui converge (pour cette dernière topologie) vers $(\overline{p}, \overline{x}) \in \prod_{t=1}^{\infty} E_t^* \times \prod_{i \in \mathcal{N}} X^i$. Il est clair que $\overline{x}$ est une allocation réalisable.

Pour tout i, si $x^i \succ^i \overline{x}^i$, alors pour ν assez grand on a: $x^i \succ^i \overline{x}^{i\nu}$ et, par suite, $\overline{p}^\nu.x^i > \overline{p}^\nu.\overline{x}^{i\nu}$. Par passage à la limite, on a:

$$\overline{p}.x^i \geq \lim_{\nu \to +\infty} \overline{p}^\nu.\overline{x}^{i\nu} = \lim_{k \to +\infty} \overline{p}^k.\overline{x}^{ik}.$$

On remarque que $\overline{p} \neq 0$.

Il reste à montrer que $\overline{p} \in \prod_{t=1}^{\infty} E'_t$. Soit pour tout t, $y_t^\beta \downarrow 0$ dans E_t. On peut supposer que $y_t^\beta \leq \omega_t$. D'après la propriété d'interpolation dans les espaces de Riesz, il existe, pour tout $i \in I_t$, $y_t^{i\beta}$ tel que $y_t^\beta = \sum_{i \in I_t} y_t^{i\beta}$ et $0 \leqslant y_t^{i\beta} \leqslant \bar{x}_t^i$. Soit

$$y^{i\beta} = (0, \ldots, 0, y_t^{i\beta}, 0, \ldots) \in X^i.$$

Si $\alpha > 0$, $i \in I_t$, de par la désirabilité de ω, il existe $z^i \in X^i$, $z^i \leqslant \alpha\omega$ tel que $\bar{x}^i + z^i \succ^i \bar{x}^i$. On en déduit pour ν et β assez grands, $\bar{x}^{i\nu} - y^{i\beta} + z^i \succ^i \bar{x}^{i\nu}$ et donc $\bar{p}^\nu . y^{i\beta} < \bar{p}^\nu . z^i$. Soit v^i défini par $v_t^i = \omega_t \forall t \in T^i$ et $v_t^i = 0$ sinon. Alors $z_t^i \leqslant \alpha v_t^i \ \forall t \in T^i$ et, par suite, $\bar{p}^\nu . y^{i\beta} < \alpha \bar{p}^\nu . v^i$. Passant à la limite sur ν, on obtient: $\bar{p}_t . y_t^{i\beta} \leqslant \alpha \bar{p} . v^i$, ce qui montre que $\bar{p}_t . y_t^{i\beta} \mapsto 0 \ \forall i \in I_t$ et donc que $\bar{p}_t . y_t^\beta \mapsto 0$. □

Nous pouvons maintenant démontrer le principal résultat d'existence de cette section :

PROPOSITION 7 : Sous les hypothèses 1, 2′, 3 et 8, le modèle à générations $\mathscr{E}$ admet un quasi-équilibre faible par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle \Lambda(P), P \rangle$, tel que pour tout $i \in N$:

$\bar{p} . \bar{x}^i \geqslant \bar{p} . \omega^i$

$\bar{p} . \bar{x}^i = \bar{p} . \omega^i$, si ω^i n'a qu'un nombre fini de coordonnées non nulles.

Démonstration : On a démontré, dans le lemme 6, que $P_{1/2}$ est relativement dénombrablement $\prod_{t=1}^{\infty} \sigma(E_t^*, E_t)$-compact et donc borné (voir par exemple KÖTHE [1969], p. 310). On peut donc choisir $\varepsilon = (\varepsilon_t) \in \Lambda(P')$ tel que $\varepsilon = \sum_{i \in \mathscr{N}} \varepsilon^i$, pour tout i, $0 \leqslant \varepsilon^i \leqslant \omega^i$, pour tout t, ε_t est un élément strictement positif de E_t et pour tout p de $P_{1/2}$, $p . \varepsilon \leqslant 1$. Soient alors $(\mathscr{E}_k)$, la suite d'économies définie dans la démonstration de la proposition 4, et $(\bar{p}(k), \bar{x}(k))$ la suite correspondante des équilibres de transfert de $\mathscr{E}$. De

$$\bar{p}(k) . \bar{x}^i(k) = \bar{p}(k) . \omega^i(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \bar{p}(k) . \omega^i + \frac{1}{k} \bar{p}(k) . \left(\frac{\varepsilon}{2^i} - \varepsilon^i\right) \qquad \forall i, \quad i \neq k$$

on obtient, en passant à la limite dans une suite partielle (généralisée) convergeant vers $(\bar{p}, \bar{x})$:

$$\lim_{k \to +\infty} \bar{p}(k) . \bar{x}^i(k) = \lim_k \bar{p}^k . \omega^i \ \forall i \in \mathscr{N}, \text{ ce qui montre que } \lim_k \bar{p}^k . \omega^i \text{ existe.}$$

On déduit alors du lemme 6 que pour tout i,

$$x^i \succ^i \bar{x}^i \text{ implique } \bar{p} . x^i \geqslant \lim_k \bar{p}^k . \omega^i.$$

De la désirabilité de ω (hypothèse 6) et des propriétés de continuité des préordres de préférence (hypothèse 5), on déduit aisément que pour tout t

et pour tout $i \in \mathrm{I}_t$,

$$\bar{p}_t . \bar{x}_t^i \geqslant \lim_k \bar{p}_t^k . \bar{x}_t^{ik}.$$

Comme

$$\sum_{i \in \mathrm{I}_t} \bar{p}_t . \bar{x}_t^i = \bar{p}_t . \sum_{i \in \mathrm{I}_t} \bar{x}_t^i = \lim_k \bar{p}_t^k . \sum_{i \in \mathrm{I}_t} \bar{x}_t^i = \lim_k \bar{p}_t^k . \sum_{i \in \mathrm{I}_t} \bar{x}_t^{ik} = \sum_{i \in \mathrm{I}_t} \lim_k \bar{p}_t^k . \bar{x}_t^{ik},$$

on a pour tout t et pour tout $i \in \mathrm{I}_t$,

$$\bar{p}_t . \bar{x}_t^i = \lim_k \bar{p}_t^k . \bar{x}_t^{ik}.$$

Finalement, pour tout i, $\bar{p} . \bar{x}^i = \lim_k \bar{p}^k . \bar{x}^{ik} = \lim_k \bar{p}^k . \omega^i$.

Évidemment, $\lim_k \bar{p}^k . \omega^i = \bar{p} . \omega^i$ si ω^i n'a qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Sinon, de $\forall k$, $\forall \mathrm{T}$, $\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \bar{p}_t^k . \omega_t^i \leqslant \bar{p}^k . \omega^i$, on déduit $\forall \mathrm{T}$, $\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \bar{p}_t . \omega_t^i \leqslant \lim_k \bar{p}^k . \omega^i$, et, donc, $\bar{p} \in \mathrm{P}$ et $\bar{p} . \omega^i \leqslant \lim_k \bar{p}^k . \omega^i$.

Puisque $\bar{x}$ est réalisable et $\bar{p} \neq 0$, $(\bar{p}, \bar{x})$ est un quasi-équilibre faible de $\mathscr{E}$ par rapport au système de Riesz dual symétrique $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$. □

Puisque pour tout i, $\lim_k \bar{p}^k . \bar{x}^{ik} > 0$, $(\bar{p}, \bar{x})$ est-ce que GEANAKOPLOS et POLEMARCHAKIS [1991] appellent un **équilibre compensé**, c'est-à-dire un équilibre réalisé moyennant des transferts (monétaires) tous positifs ou nuls. Il en résulte que la proposition 7 énonce, pour des préférences transitives des agents mais avec un espace de biens de dimension éventuellement infinie à chaque période, un résultat analogue au théorème 1 de WILSON [1981]. Si il existe i tel que $\bar{p} . \bar{x}^i > \bar{p} . \omega^i$, l'équilibre compensé $(\bar{p}, \bar{x})$ est interprété par Wilson comme un équilibre monétaire à la Samuelson.

Le corollaire évident suivant étend du point de vue des durées de vie et de la structure démographique à chaque période le théorème d'existence de ALIPRANTIS *et al.* [1989 *a*] :

COROLLAIRE 8 : Sous les hypothèses de la proposition 7, si les ressources initiales de chacun des consommateurs sont nulles en dehors de ses périodes de vie (hypothèse 10), le modèle à générations admet un équilibre par rapport au système de Riesz dual symétrique $\left\langle \Phi, \prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}_t' \right\rangle$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que sous les hypothèses 2′ et 10, $\mathrm{P} = \prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}_t'$ et $\Lambda(\mathrm{P}) = \Phi$. □

5 Le modèle à générations avec des préférences propres

L'hypothèse 8 sur les ressources initiales totales, qui a été faite tout au long de ce papier, limite l'application des résultats obtenus au cas où la dualité quantités-prix à chaque période est du type $\langle L_\infty, L_1 \rangle$. Dans cette section, afin d'obtenir un résultat d'existence dans le cas où cette dualité est du type $\langle L_p, L_q \rangle$, $p \geqslant 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, nous affaiblissons l'hypothèse 8, au prix d'une hypothèse de propreté des préférences que nous précisons ci-dessous.

Rappelons que pour tout t, $\langle E_t, E_t' \rangle$ est un système de Riesz dual symétrique; on note τ_t la topologie donnée sur E_t. On dit, pour tout i, que $\gtrsim^i$ est **uniformément** $\prod_{t \in T^i}$ **τ_t-propre** s'il existe $v^i \in X^i$, $v^i > 0$, et V_i, un voisinage de 0 dans X^i pour la topologie produit $\prod_{t \in T^i} \tau_t$, tels que pour tout $x^i \in X^i$, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $z^i \in \alpha V^i$, on ait: $x^i + \alpha v^i + z^i \succ^i x^i$.

Si pour tout i, $\gtrsim^i$ est uniformément $\prod_{t \in T^i} \tau_t$-propre, on peut remplacer l'hypothèse 8 par:

8'. $\forall t$, ω_t est un élément strictement positif de E_t, *i.e.* pour tout $p_t > 0$ dans E_t', $p_t . \omega_t > 0$ (on écrit: $\omega_t \gg 0$).

PROPOSITION 9 : Si les préférences de tous les consommateurs sont uniformément propres, alors sous les hypothèses 1, 2', 3 à 7, 8' et 10, le modèle à générations $\mathscr{E}$ admet un équilibre par rapport au système de Riesz dual symétrique $\left\langle \Phi, \prod_{t=1}^{\infty} E_t' \right\rangle$.

Démonstration: Soit, pour tout t, A_{ω_t}, l'idéal de E_t engendré par ω_t. D'après le corollaire de la proposition 7, l'économie $\mathscr{E}$ admet un équilibre $(\bar{p}, \bar{x})$ par rapport au système de Riesz dual symétrique

$$\left\langle \Psi, \prod_{t=1}^{\infty} (A_{\omega_t})_{\tilde{n}} \right\rangle,$$

où Ψ désigne l'ensemble des éléments de $\prod_{t=1}^{\infty} A_{\omega_t}$ qui n'ont qu'un nombre fini de composantes non nulles.

On montre d'abord que, pour tout t, $\bar{p}_t$ est τ_t-continue sur A_{ω_t}; pour cela on adapte la démarche de YANNELIS et ZAME [1986], ALIPRANTIS *et al.* [1989].

On peut supposer, sans perte de généralité, que pour tout i, $v^i = (\omega_t)_{t \in T^i}$ est le vecteur d'uniforme $\prod_{t \in T^i} \tau_t$-propreté et que $V^i = \prod_{t \in T^i} V_t^i$ avec $V_t^i \in \mathscr{V}_{\tau_t}(0)$.

Soient t une période fixée, $I(t)$ l'ensemble des agents vivant à la période t, $V_t = \bigcap_{i \in I(t)} V_t^i$ et soit ρ la jauge de V_t. Il est clair que ρ est une semi-norme monotone et τ_t-continue.

Soit $z_t \in E_t$, $0 \leqslant z_t \leqslant \omega_t$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété de décomposition de Riesz, il existe, pour tout $i \in I(t)$, $z_t^i : 0 \leqslant z_t^i \leqslant \bar{x}_t^i$ tels que $z_t = \sum_{i \in I(t)} z_t^i$. Soit maintenant $\hat{z}^i \in X^i$, $\hat{z}_t^i = z_t^i$ et $\hat{z}_{t'}^i = 0$ si $t' \neq t$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a par l'uniforme propreté :

$$\bar{x}^i + (\rho(z_t^i) + \varepsilon)\, v^i - \hat{z}^i \succ^i \bar{x}^i.$$

On en déduit alors :

$$\bar{p} \cdot \bar{x}^i + (\rho(z_t^i) + \varepsilon)\, \bar{p} \cdot v^i - \bar{p} \cdot \hat{z}^i > \bar{p} \cdot \bar{x}^i,$$

c'est-à-dire

$$\bar{p}_t \cdot z_t^i < (\rho(z_t^i) + \varepsilon)\, \bar{p} \cdot v^i \leqslant (\rho(z_t) + \varepsilon)\, \bar{p} \cdot v^i.$$

Sommant sur i, on obtient :

$$\bar{p}_t \cdot z_t < (\rho(z_t) + \varepsilon) \sum_{i \in I(t)} \bar{p} \cdot v^i,$$

ce qui démontre que $\bar{p}_t$ est τ_t-continue sur A_{ω_t}. A_{ω_t} étant τ_t-dense dans E_t, $\bar{p}_t$ admet une extension $\bar{\bar{p}}_t$, unique, τ_t-continue sur E_t. Un dernier argument de densité montre que $(\bar{\bar{p}}, \bar{x})$ est un quasi-équilibre de $\mathscr{E}$ par rapport à $\left\langle \Phi, \prod_{t=1}^{\infty} E_t' \right\rangle$. Puisque, pour tout i, $\bar{\bar{p}} \cdot \omega^i = \bar{p} \cdot \omega^i > 0$, $(\bar{\bar{p}}, \bar{x})$ est un équilibre. □

Étude du système dual $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$

Soient $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$, τ et τ' définis comme dans la section 2.

PROPOSITION 10 : $\langle \Lambda(\mathrm{P}), \mathrm{P} \rangle$ est une paire duale. τ (resp. τ') est une topologie localement convexe-solide séparée, compatible avec la dualité.

Démonstration: Soient Φ (resp. Φ'), l'ensemble des éléments de $\prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}_t$ $\left(\text{resp. } \prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}'_t\right)$ qui n'ont qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Il est clair que $\Lambda(\mathrm{P})$ et P sont des espaces de Riesz, plus précisément les idéaux de $\prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}_t$ et $\prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}'_t$, contenant respectivement Φ et Φ'. Les propriétés de séparation de la forme bilinéaire $\langle x, p \rangle = p.x = \sum_{t=1}^{\infty} p_t.x_t$ se déduisent de cette remarque.

Chaque semi-norme $\rho_p(x)$ [resp; $\rho_x(p)] = \sum_{t=1}^{\infty} |p_t|.|x_t|$ est évidemment monotone; par suite τ (resp. τ') est une topologie localement convexe-solide sur $\Lambda(\mathrm{P})$ (resp. P).

Il est clair que $\mathrm{P} \subset (\Lambda(\mathrm{P}), \tau)'$, le dual topologique de $\Lambda(\mathrm{P})$. Pour démontrer la réciproque, on remarque d'abord que sur chaque E_t, τ coïncide avec la topologie faible absolue $|\sigma|(\mathrm{E}_t, \mathrm{E}'_t)$ engendrée par les semi-normes: $x_t \mapsto |p_t|.|x_t|$. Par suite, si $f \in (\Lambda(\mathrm{P}), \tau)'$, alors pour tout t, il existe $p_t \in \mathrm{E}'_t$ (unique) tel que $f(0, \ldots, 0, x_t, 0, \ldots) = p_t.x_t$. Comme pour tout $x \in \Lambda(\mathrm{P})$, $(x_1, x_2, \ldots, x_t, 0, \ldots) \xrightarrow{\tau} x$, alors $f(x) = \sum_{t=1}^{\infty} p_t.x_t$. Il reste à prouver que $p = (p_t) \in \mathrm{P}$ *i.e.* $\sum_{t=1}^{\infty} |p_t|.\omega_t^i < +\infty \ \forall i \in \mathcal{N}$. $(\Lambda(\mathrm{P}), \tau)'$ étant un espace de Riesz, $|f| \in (\Lambda(\mathrm{P}), \tau)'$ et, par suite, il existe $(q_t) \in \prod_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}'_t$ tel que $|f|(x) = \sum_{t=1}^{\infty} q_t.x_t \, \forall x \in \Lambda(\mathrm{P})$; on a $q_t = |p_t| \ \forall t$ et donc

$$\sum_{t=1}^{\infty} |p_t|.\omega_t^i = |f|(\omega^i) < +\infty \, \forall i \in \mathcal{N}.$$

On démontre de même que $\Lambda(P)=(P, \tau')'$. Enfin τ et τ' sont séparées, puisque compatibles avec une dualité séparante. □

PROPOSITION 11 : Tout intervalle d'ordre de $\Lambda(P)$ (resp. de P) est τ-équicontinu (resp. τ'-équicontinu) donc $\sigma(\Lambda(P), P)$-compact [resp. $\sigma(P, \Lambda(P))$-compact].

Démonstration: Rappelons ici que pour tout t, $\langle E_t, E_t' \rangle$ est un système de Riesz dual symétrique. Soit $u>0$ dans $\Lambda(P)$ et $[-u, u]$ un intervalle d'ordre de $\Lambda(P)$. Pour tout $\varepsilon>0$, $\rho_u(p)<\varepsilon$ et $x\in[-u, u]$ impliquent

$$\left|\sum_{t=1}^{\infty} p_t . x_t\right| \leqslant \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . |x_t| \leqslant \sum_{t=1}^{\infty} |p_t| . u_t < \varepsilon.$$

Ceci montre que $[-u, u]$ est τ'-*équicontinu* donc, d'aprés le théorème d'Alaoglu-Bourbaki, relativement $\sigma(\Lambda(P), P)$-compact. Chaque intervalle d'ordre $[-u_t, u_t]$ de E_t étant $\sigma(E_t, E_t')$-compact, on en déduit facilement que $[-u, u]$ est $\sigma(\Lambda(P), P)$-fermé et donc $\sigma(\Lambda(P), P)$-compact. □

Appliquant le théorème 22.1 de ALIPRANTIS et BURKINSHAW [1978], on déduit des propositions 10 et 11 que $\Lambda(P)$ et P sont deux espaces de Riesz Dedekind-complets et que τ et τ' sont deux topologies continues pour l'ordre. Si $(\Lambda(P))_n^{\sim}$ (resp. $P_n^{\sim}$) désigne l'ensemble des formes linéaires continues pour l'ordre sur $\Lambda(P)$ (resp. sur P), $P \subset (\Lambda(P))_n^{\sim}$ [resp. $\Lambda(P) \subset P_n^{\sim}$].

On suppose maintenant, comme dans l'hypothèse 8, que, pour tout t, ω_t est un élément-unité de E_t et que $E_t'=(E_t)_n^{\sim}$. On rappelle que sous l'hypothèse 9, $\omega\in\Lambda(P)$; A_ω désigne dans ce cas l'idéal principal de $\Lambda(P)$ engendré par ω.

PROPOSITION 12 : Sous les hypothèses 1, 8 et 9, A_ω est τ-dense dans $\Lambda(P)$ et $(A_\omega)_n^{\sim} \subset P \subset (\Lambda(P))_n^{\sim} \subset (A_\omega)_n^{\sim}$.

Démonstration: D'après l'hypothèse 8, A_{ω_t}, l'idéal principal de E_t engendré par ω_t, coïncide avec $E_t . \forall x\in\Lambda(P)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_t, 0, \ldots)\uparrow x$. Puisque τ est une topologie continue pour l'ordre, on en déduit que A_ω est τ-dense dans $\Lambda(P)$.

On a déjà démontré que $P \subset (\Lambda(P))_n^{\sim}$ et il est facile de voir que $(\Lambda(P))_n^{\sim} \subset (A_\omega)_n^{\sim}$. Il reste à démontrer que $(A_\omega)_n^{\sim} \subset P$. Soit $f\in(A_\omega)_n^{\sim}$. De $(E_t)_n^{\sim}=E_t'$, on déduit qu'il existe, pour tout t, $p_t\in E_t'$ tel que $f(x)=\sum_{t=1}^{\infty} p_t . x_t$ avec $p=(p_t)\in P$. □

• Références bibliographiques

ALIPRANTIS, C. D., BROWN, D. J. et BURKINSHAW, O. (1989*a*). – "Equilibria in Exchange Economies with a Countable Number of Agents", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 142, pp. 250-299.

ALIPRANTIS, C. D., BROWN, D. J. et BURKINSHAW, O. (1989*b*). – "Existence and Optimality of Competitive Equilibria", Springer-Verlag, Berlin.

ALIPRANTIS, C. D. et BURKINSHAW, O. (1978). – "Locally Solid Riesz Spaces", Academic Press, New York et Londres.

ALIPRANTIS, C. D. et BURKINSHAW, O. (1985). – "Positive Operators", Academic Press, New York et Londres.

BALASKO, Y., CASS, D. et SHELL, K. (1980). – "Existence of Competitive Equilibrium in a General Overlapping-Generations Model", *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 307-322.

BALASKO, Y. et SHELL, K. (1980). – "The Overlapping-Generations Model, I: The Case of Pure exchange Without Money", *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 281-306.

BESADA, M., ESTEVES, M. et HERVES, C. (1988). – "Equilibria in Economies with Countably many Commodities", *Economics Letters*, 26, pp. 203-207.

BEWLEY, T. F. (1972). – "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely many Commodities", *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 514-540.

BURKE, J. (1988). – "On the Existence of Price Equilibria in Dynamic Economies", *Journal of Economic Theory*, 44, pp. 281-300.

FLORENZANO, M. (1990). – "Markets with Countably many Periods", *Couverture orange CEPREMAP*, n° 9019.

GEANAKOPLOS, J. D. et POLEMARCHAKIS, H. M. (1991). – "Overlapping Generations", In: HILDENBRAND, W. et SONNENSCHEIN, H. Eds., *Handbook of Mathematical Economics*, IV, pp. 1899-1960, North-Holland, Amsterdam.

KÖTHE, (1969). – "Topological Vector Spaces", Springer-Verlag, Berlin.

MAS-COLELL, A. (1986). – "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices", *Econometrica*, 54, pp. 1039-1053.

RICHARD, S. F. et SRIVASTAVA S. (1988). – "Equilibrium in Economies with Infinitely many Consumers and Infinitely many Commodities", *Journal of Mathematical Economics*, 17, pp. 9-21.

SAMUELSON, P. A. (1958). – "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy* 66, pp. 467-482.

WILSON, C. A. (1981). – "Equilibrium in Dynamic Models with an Infinity of Agents", *Journal of Economic Theory*, 24, pp. 95-111.

YANNELIS, N. C. et ZAME, W. R. (1986). – "Equilibria in Banach Lattices without Ordered Preferences", *Journal of Mathematical Economics*, 15, pp. 85-110.