ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 27 — 1992

Inflation et accumulation du capital : Le rôle de la substituabilité entre consommation et encaisses réelles

Patrick VILLIEU *

RÉSUMÉ. – Cet article réexamine, dans un modèle d'optimisation intertemporelle à la SIDRAUSKI [1967], la relation entre le taux de croissance de la masse monétaire et l'accumulation du capital au voisinage de l'état stationnaire, avec une fonction d'utilité CES. Cette relation dépend du signe de la dérivée seconde croisée de la fonction d'utilité (u_{cm}). L'analyse permet d'expliquer intuitivement l'énigme de FISCHER [1979], en décomposant le lien taux de croissance de la masse monétaire/accumulation en un effet de la masse monétaire sur le taux d'intérêt nominal (effet prix-relatif) et une réaction de la consommation à cet effet prix-relatif.

Money-Consumption Substituability and Capital Accumulation on the Transition Path

ABSTRACT. – In a growth model à la SIDRAUSKI [1967], the connection between the growth rate of money and capital accumulation is investigated with a CES utility function. It is seen to depend on the cross derivative of the utility function (u_{cm}). The analysis provides a simple explanation of FISCHER [1979]'s puzzle: the effect of money growth on accumulation is decomposable into a relative-price effect (a nominal interest rate move) and the response of consumption to this move, which depends on the substituability between money and consumption in utility.

* P. VILLIEU : I.O.F., Université d'Orléans et M.A.D., Université de Paris-I.
Je remercie M. G. LAROQUE et deux rapporteurs anonymes de *Annales d'Économie et de Statistique,* dont les commentaires ont permis de nombreuses améliorations à cet article.

1 Introduction

Cet article étudie l'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur l'accumulation du capital dans un modèle d'optimisation intertemporelle à la SIDRAUSKI [1967].

Dans la spécification de SIDRAUSKI, la monnaie reste superneutre à long terme : le stock de capital d'état stationnaire demeure insensible aux variations du taux de croissance la masse monétaire.

FISCHER [1979], utilisant une fonction d'utilité de la forme COBB-DOUGLAS, étend ce résultat à la trajectoire d'ajustement lorsque la fonction d'utilité prend une forme logarithmique, l'inflation exerçant un effet positif sur l'accumulation à court terme lorsque l'élasticité de substitution intertemporelle (S) n'est pas unitaire.

Ce résultat demeure énigmatique à double titre.

D'une part, FISCHER ne parvient pas à expliquer intuitivement cette propriété, ni le rôle crucial joué par l'élasticité de substitution intertemporelle : le fait qu'une valeur unitaire de cette dernière suffise à anihiler le mécanisme de transmission des chocs monétaires demeure particulièrement déconcertant.

D'autre part, ASAKO [1983], utilisant une fonction d'utilité à arguments complémentaires, montre que, si la monnaie reste superneutre à long terme, le taux d'inflation peut avoir un effet positif, négatif ou nul sur la vitesse d'ajustement du capital à son niveau stationnaire, selon que l'élasticité de substitution intertemporelle ((S) est supérieure, inférieure ou égale à un : ce paramètre se voit attribuer un rôle bien plus important quant à la détermination du signe de la dérivée de l'investissement par rapport au taux de croissance de la masse monétaire. Celle-ci pourra devenir négative si le degré de substitution intertemporelle est faible ($S < 1$), tandis que le résultat de FISCHER pour une forme COBB-DOUGLAS reste préservé lorsque $S \geqslant 1$.

Cependant, plus que la remise en cause de la liaison positive entre taux de croissance de la masse monétaire et investissement en elle-même, le point à élucider demeure la différence entre les deux formulations, et plus encore le rôle conféré à l'élasticité de substitution intertemporelle comme déterminant exclusif de cette relation.

Cet article a pour objectif de résoudre cette énigme, par l'adoption d'une fonction d'utilité plus générale, à élasticité de substitution constante (σ) entre monnaie et consommation. Avec une telle spécification, la dérivée de l'investissement par rapport au taux de croissance de la masse monétaire est du signe de $(\sigma - S)$ $(1 - S)$, permettant donc de retrouver comme cas particuliers les analyses de FISCHER et d'ASAKO.

De plus, la prise en considération explicite des mouvements du taux d'intérêt nominal permet d'interpréter intuitivement l'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur l'investissement. Les variations du taux de croissance de la masse monétaire provoquent d'abord une modification du taux de croissance du taux d'intérêt nominal (prix relatif de la monnaie en termes de consommation), puis une réaction du taux de croissance de la consommation à cet effet-prix relatif.

La manière dont le taux d'intérêt réagit ne dépend que de l'élasticité de substitution intertemporelle, tandis que l'adaptation du comportement de consommation transite par la dérivée seconde croisée de la fonction d'utilité, qui exprime l'aspect complémentaire ou substituable de la monnaie et de la consommation.

L'état stationnaire du modèle est examiné en section deux, tandis que la section trois étudie l'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur la trajectoire. L'essentiel des résultats est présenté dans les deux propositions de cette section, les développements techniques figurant en annexe.

2 Présentation et état stationnaire du modèle

On considère un modèle de croissance à la SIDRAUSKI [1967]-FISCHER [1979] en temps continu. Le programme de l'agent représentatif s'écrit :

$$\text{Max} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} u(c, m)\, dt$$

sous les contraintes :

(1) $$\dot{a} = f(k) - \delta k + \rho b - c + (1 - \pi^a) m + \tau$$

(2) $$a = m + k + b$$

(3) $$a_0 = m_0 + k_0 + b_0$$

donnée et la condition de solvabilité :

(4) $$\lim_{t \to +\infty} e^{-R_t} a_t \geqslant 0$$

où a, m, k, b représentent respectivement les stocks réels de richesse, de monnaie, de capital et de titres indexés à maturité instantanée; δ et π^a figurent respectivement le taux de dépréciation du capital et le taux brut d'inflation anticipé (*i. e.* $\dot{p}/p \equiv \pi^a - 1$); $\rho\,(= 1 + r - \pi^a)$ représente le taux d'intérêt réel, β le taux d'actualisation subjectif constant de l'agent représentatif, et τ est un transfert monétaire forfaitaire distribué par le gouvernement. $f(.)$ est une fonction de production néo-classique ($f'(.) > 0$ et $f''(.) < 0$). Les variables sont exprimées en valeur réelle (*voir* SIDRAUSKI [1967] pour les détails).

Le Hamiltonien courant de ce programme s'écrit :

$$H_c = u(c, m) + \lambda[f(k) - \delta k + \rho b - c + (1 - \pi^a) m + \tau] + q[a - m - b - k]$$

dont la maximisation par rapport à a, k, m, b et c procure les conditions de premier ordre suivantes :

(5) $$\dot{\lambda} = \lambda(\beta - \rho)$$

(6) $$f'(k) = \delta + \rho$$

(7), (8) $$\left.\begin{array}{l} u_c(c, m) = \lambda \\ u_m(c, m) = \lambda r \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (9) \quad r = \frac{u_m(.)}{u_c(.)}$$

auxquelles s'ajoute la condition de transversalité :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\beta t} \lambda_t a_t = 0$$

qui permettra de définir la trajectoire optimale.

Le taux de croissance du prix dual de la richesse est égal, de manière habituelle, à la différence entre le taux d'actualisation subjectif et le taux d'intérêt réel (5). Pour satisfaire la condition d'arbitrage entre titres indexés et capital, le stock s'ajoute de manière à ce que sa productivité marginale nette s'égalise au taux d'intérêt réel (6).

De la même manière, l'arbitrage du consommateur se traduit par l'égalisation de l'utilité marginale de la consommation au prix dual de la richesse (7), ainsi que de l'utilité marginale des encaisses réelles au rendement nominal du titre indexé (8). Le taux d'intérêt nominal s'exprime donc comme le rapport entre l'utilité marginale directe d'une unité de monnaie et l'utilité marginale de la consommation (9).

Pour analyser la relation inflation − accumulation dans un cadre macro-économique, il convient d'associer à ces équations les conditions d'équilibre sur les différents marchés, ainsi qu'une hypothèse quant à la manière dont l'agent représentatif formule ses anticipations.

On fera l'hypothèse d'anticipations rationnelles, ce qui, dans un contexte d'information parfaite, revient à des prévisions parfaites. L'évolution des prix est donnée par $\dot{p}/p$ et le taux *brut* d'inflation par π :

(10) $$\pi^a - 1 = \dot{p}/p \equiv \pi - 1.$$

De plus, à l'équilibre, les désirs d'encaisses doivent coïncider avec la masse monétaire ($\bar{m}$), et les excès de demande nette de biens doivent s'annuler :

(11) $$m = \bar{m}$$

(12) $$f(k) = \dot{k} + \delta k + c$$

D'autre part, en l'absence d'effets publics, la condition d'équilibre sur le marché des titres indique que les excès de demande nette d'effets privés doivent s'annuler; compte tenu de la symétrie du modèle aucun agent ne prend donc position sur le marché financier [1] :

(13) $$b=0$$

Les autorités monétaires adoptent une règle de taux de croissance (brut) constant de la masse monétaire (ω), soit en termes réels :

(14) $$\dot{\bar{m}}/\bar{m}=\omega-\pi$$

L'interdiction pour le gouvernement d'émettre des effets publics ramène **à l'équilibre** sa contrainte budgétaire à la forme simple :

(15) $$\tau=\dot{\bar{m}}+(\pi-1)\,\bar{m}=(\omega-1)\,\bar{m}$$

Le gouvernement distribue au consommateur l'accroissement de la masse monétaire en valeur nominale. Cependant, cette propriété n'est valable qu'à l'équilibre, et il importe que l'agent représentatif n'en tienne pas compte pour définir son comportement (hypothèse de petit agent n'ayant pas internalisé la contrainte de budget du gouvernement) : le consommateur ne remarque pas que le transfert monétaire qu'il reçoit est proportionnel au stock de monnaie qu'il détient, mais le tient pour forfaitaire [2].

L'état stationnaire, défini comme le lieu de constance de la consommation et des stocks d'encaisses réelles et de capital, se caractérise par la superneutralité de la monnaie :

(16) $$f'(k^*)=\delta+\beta$$

(17) $$c^*=f(k^*)-\delta k^*$$

(18) $$\pi^*=\omega \Rightarrow r^*=\beta+\omega-1^{3} \qquad \frac{\partial r^*}{\partial\omega}=1$$

(19) $$u_m(c^*,\,m^*)=u_c(c^*,\,m^*)\,r^* \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial m^*}{\partial\omega}=\frac{u_c(\,.\,^*)}{u_{mm}(\,.\,^*)-r^*\,u_{cm}(\,.\,^*)}.$$

---

1. La pertinence d'une modélisation de prix d'actifs non détenus à l'équilibre, pratique courante dans la littérature financière, est discutée par DONALDSON et MEHRA [1984], par exemple.

2. Cette hypothèse est nécessaire pour toute analyse des politiques économiques, de façon à éviter l'apparition triviale de la propriété de superneutralité, dès la dérivation des conditions de premier ordre, comme l'indiquent FISHER [1979] et ABEL [1985], par exemple.

   Il convient de remarquer que cette difficulté d'interprétation du fait que le consommateur considère comme forfaitaire un transfert qui *semble*, à l'équilibre, proportionnel à sa détention de monnaie (qui *paraît* alors rapporter intérêt), tient au raisonnement sur un agent représentatif, et disparaîtrait d'un modèle avec individus hétérogènes.

3. Si le gouvernement adopte une règle de politique monétaire fixant le taux de croissance de la masse monétaire à 1-β, la politique monétaire demeurera, trivialement, superneutre le long de la trajectoire d'ajustement. Cette règle correspond à la politique monétaire optimale selon FRIEDMAN [1969] : le transfert monétaire optimal est celui qui annule le taux d'intérêt nominal, éliminant ainsi le biais, dans les taux marginaux de substitution entraîné par les contraintes de transactions.

   ABEL [1985] obtient également ce résultat dans un modèle en temps discret, tandis que FISHER [1979] pose $\omega \neq 1-\beta$ comme préalable à l'existence d'un équilibre.

Une augmentation du taux de croissance de la masse monétaire n'entraîne à long terme qu'un accroissement égal du taux d'intérêt nominal, laissant le stock de capital et la consommation inchangés : le modèle retrouve donc le résultat de superneutralité mis en évidence par SIDRAUSKI [1967], FISCHER [1979] et ASAKO [1983].

Cependant, cette propriété de superneutralité revêt un statut différent selon la fonction d'utilité envisagée. L'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur la demande d'encaisses réelles de long terme dépendra en effet de l'utilité marginale croisée entre consommation et encaisses. Cet impact demeure ambigu lorsque la consommation et la monnaie sont substituables au sens d'EDGEWORTH ($u_{cm}<0$). Avec une fonction séparable entre monnaie et consommation (comme la foncion de COBB-DOUGLAS utilisée par FISCHER [1979]), toute augmentation du taux de croissance de la masse monétaire affectera négativement la demande d'encaisses réelles de long terme. Il en va de même lorsque monnaie et consommation sont compléments en utilité ($u_{cm}>0$), excepté dans la situation limite où elles deviennent compléments stricts (fonction d'utilité à arguments complémentaires à la ASAKO [1983], par exemple), dans laquelle la demande réelle de monnaie est indépendante de la politique monétaire à long terme :

$$\frac{\partial m^*}{\partial \omega} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } u_{cm} \rightarrow +\infty.$$

Dans ce dernier cas, la proposition de superneutralité de la monnaie s'étend aux encaisses réelles : la superneutralité en vigueur dans les modèles « **cash-in-advance** » sera donc de nature plus forte que celle prévalant dans les modèles où encaisses et consommation sont un tant soit peu substituables. Cette particularité procède de la complémentarité stricte entre consommation et encaisses : si le stock d'encaisses réelles de long terme était affecté par ω, la consommation le serait également, et, par suite, l'investissement et le capital.

Le rôle de la substituabilité entre consommation et monnaie sera encore plus remarquable en ce qui concerne l'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur la trajectoire de l'économie.

3 La relation inflation-accumulation sur la trajectoire : une explication intuitive

Après avoir établi l'existence d'un équilibre stationnaire, il convient de s'interroger sur sa stabilité, afin d'examiner l'impact de l'inflation au voisinage de l'équilibre de long terme.

Une forme réduite du modèle en trois variables indépendantes (c, k, r) peut être aisément obtenue, en calculant π dans (6) :

$$\pi = 1 + \delta + r - f'(k)$$

et, en remplaçant dans (14) :

$$\dot{m}/m = [\omega - 1 - \delta - r + f'(k)] \tag{20}$$

Le système autonome déterminant la dynamique de l'économie s'obtient à partir de la relation d'évolution du stock de capital (12), et de la différenciation des relations (7), (8), (9), où l'on substitue (20) :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{u_c}{cu_{cc}} [\beta + \delta - f'(k)] - \frac{mu_{cm}}{cu_{cc}} [\omega - 1 - \delta - r + f'(k)] \tag{21}$$

$$\dot{k} = f(k) - \delta k - c \tag{22}$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{J_1}{u_m u_{cc}} [\beta + \delta - f'(k)] - \frac{mJ_2}{u_m u_{cc}} [\omega - 1 - \delta - r + f'(k)] \tag{23}$$

où $J_1 \equiv u_{cm} u_c - u_{cc} u_m > 0$ sous l'hypothèse de biens normaux, et $J_2 \equiv u_{cm}^2 - u_{cc} u_{mm} < 0$ par concavité de $u(.)$.

Pour analyser l'impact du taux de croissance de la masse monétaire au voisinage de l'état stationnaire, on fait une hypothèse sur la forme de la fonction d'utilité. FISCHER [1979] adopte une fonction de COBB-DOUGLAS, et montre que la dérivée de l'accumulation par rapport au taux de croissance de la masse monétaire a le signe de $(S-1)^2$, où S représente l'élasticité de substitution intertemporelle, tandis qu'ASAKO [1983] utilisant une spécification à arguments complémentaires, trouve qu'elle a le signe de $(S-1)$. Ici, une fonction d'utilité plus générale sera adoptée, en l'occurrence une fonction CES, permettant de prendre en considération différentes valeurs de l'élasticité de substitution monnaie-consommation (σ) :

$$u(c, m) = \frac{S}{S-1} [ac^{(\sigma - 1/\sigma)} + (1-a) m^{(\sigma - 1/\sigma)}]^{(\sigma (S-1)/S (\sigma - 1))} \tag{24}$$

Sous une telle spécification, le système (21)-(23) linéarisé au voisinage de l'état stationnaire devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} c_t - c^* \\ k_t - k^* \\ r_t - r^* \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne J, dont la forme explicite est dérivée en annexe A 1, possède une trace positive et un déterminant négatif. Suivant le raisonnement utilisé par FISCHER [1979], cette matrice admet donc une valeur propre négative (supposée réelle, pour éviter les retournements de trajectoire) et deux valeurs propres positives (complexes ou réelles). En effet, un déterminant (produit des trois valeurs propres) négatif implique un nombre impair de valeurs propres négatives, nombre qui ne peut être trois car la trace (somme des valeurs propres) est positive. L'équilibre stationnaire est donc un point-selle et il n'existe qu'une seule trajectoire convergente, associée à l'ensemble de paramètres $\{\beta, \delta, \sigma, S, \omega\}$.

Pour examiner l'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur l'accumulation au voisinage de l'équilibre stationnaire, on compare deux trajectoires stables différant seulement par la valeur du taux de croissance constant de la masse monétaire, l'une associée à ω, l'autre à $\omega' > \omega$. Considérant une « petite » variation du taux de croissance de la masse monétaire, il s'agira donc d'étudier le signe de l'expression : $\left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}<k^*}$ pour un stock de capital prédéterminé, inférieur à sa valeur de long terme.

Proposition 1 : Au voisinage de l'état stationnaire et pour un stock de capital prédéterminé inférieur à sa valeur de long terme, la dérivée de l'investissement par rapport au taux de croissance de la masse monétaire sur la trajectoire est du signe de $(\sigma - S)(1 - S)$.

Démonstration : Pour un stock de capital prédéterminé, l'influence du taux de croissance de la masse monétaire sur la vitesse d'ajustement du stock de capital à son niveau stationnaire le long de la trajectoire se dérive de la relation suivante :

$$\dot{k} = \eta^* (k_t - k^*)$$

où $\eta^* < 0$ représente la valeur propre stable de J.

Comme le stock de capital d'état stationnaire demeure indépendant de l'inflation anticipée (superneutralité à long terme), l'influence de celle-ci sur la trajectoire d'investissement passe par les variations qu'elle implique dans la vitesse d'ajustement η^*. L'annexe A 2 montre que :

$$\operatorname{Sgn} \left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}<k^*} = -\operatorname{Sgn} \left.\frac{d\eta^*}{d\omega}\right|_{\bar{k}<k^*} = \operatorname{Sgn} (S-\sigma)(S-1) \quad \square$$

La dérivée de l'accumulation par rapport au taux de croissance de la masse monétaire a donc le signe de $(S-\sigma)(S-1)$, permettant de retrouver comme cas particulers les analyses de Fischer (fonction COBB-DOUGLAS lorsque $\sigma = 1$) et d'Asako (fonction à arguments complémentaires si $\sigma = 0$).

De plus, la substitution d'une forme réduite en (c, k, r) aux formes (c, m, k) utilisées par ces auteurs permet une interprétation intuitive de la relation inflation-accumulation.

Cohen [1985] met en évidence que l'augmentation du taux de croissance de la masse monétaire n'entraîne pas d'effet richesse, lorsque l'on prend en compte la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent représentatif. L'impact provient donc exclusivement d'un mécanisme de substitution. Cependant, Cohen ne précise pas les mécanismes de transmission en jeu. Ici, le signe de la dérivée de l'accumulation par rapport à l'inflation est le produit du signe de la dérivée du taux de croissance du taux d'intérêt nominal (prix relatif de la monnaie en termes de consommation) par rapport au taux de croissance de la masse monétaire, et du signe de la dérivée du taux de croissance de la consommation par rapport au taux de croissance de ce prix relatif.

> PROPOSITION 2 : Au voisinage de l'état stationnaire et pour un stock de capital prédéterminé, inférieur à sa valeur de long terme :
> *a*) Le signe de la dérivée de l'accumulation par rapport au taux de croissance de la masse monétaire est le produit du signe de la dérivée du taux de croissance du taux d'intérêt nominal par rapport au taux de croissance de la masse monétaire et du signe de la dérivée du taux de croissance de la consommation par rapport au taux de croissance du taux d'intérêt nominal.
> *b*) La dérivée du taux de croissance du taux d'intérêt nominal par rapport au taux de croissance de la masse monétaire le long de la trajectoire a le signe de $(1-S)$.
> *c*) La dérivée du taux de croissance de la consommation par rapport au taux de croissance du taux d'intérêt nominal le long de la trajectoire a un signe opposé à celui de l'utilité marginale croisée entre consommation et monnaie.

Démonstration : A un instant donné, pour un stock de capital prédéterminé, l'accumulation réagit de manière opposée à la consommation, puisque la production $f(\bar{k})$ se partage en consommation et investissement (i) :

$$\frac{\partial \dot{k}_t}{\partial \omega}\bigg|_{\bar{k}_t < k^*} = \frac{\partial i_t}{\partial \omega}\bigg|_{\bar{k}_t < k^*} = -\frac{\partial c_t}{\partial \omega}\bigg|_{\bar{k}_t < k^*} \tag{25}$$

L'impact d'une modification du taux de croissance de la masse monétaire tient donc au comportement de consommation : analyser la relation inflation-accumulation revient à examiner la transmission des mouvements du taux d'intérêt nominal à la trajectoire de consommation.

La proposition 2 *a* se dérive directement de l'écriture de la consommation en t, avec $\gamma = \dot{c}/c$:

$$c^* = c_t \exp \int_t^{+\infty} \gamma_s \, ds \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_t}\frac{\partial c_t}{\partial \omega} = -\int_t^{+\infty} \frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \omega} \, ds$$

Utilisant (25), il vient, au voisinage de l'équilibre stationnaire et pour un stock de capital prédéterminé :

$$\text{Sng} \frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega} = -\text{Sgn} \frac{\partial c_t}{\partial \omega} = \text{Sgn} \frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \omega} = \text{Sng} \frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \dot{r}/r} \cdot \frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega}$$

Le signe de la dérivée de l'accumulation par rapport à l'inflation est le produit du signe de la dérivée du taux de croissance du taux d'intérêt nominal (prix relatif de la monnaie en termes de consommation) par rapport au taux de croissance de la masse monétaire et du signe de la dérivée du taux de croissance de la consommation par rapport au taux de croissance de ce prix relatif.

La proposition $2b$ est démontrée dans l'annexe A 2; au voisinage de l'équilibre stationnaire et pour un stock de capital prédéterminé :

$$\operatorname{Sgn} \frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega} = -\operatorname{Sgn}\left[1 - \frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right] = \operatorname{Sgn}(r_t - r^*) = \operatorname{Sgn}(1 - S)$$

Le modèle généralise donc le phénomène d'ajustement du taux d'intérêt à sa valeur stationnaire mis en évidence par COHEN [1985] pour une forme COBB-DOUGLAS : lors d'une augmentation du taux de croissance de la masse monétaire, le taux d'intérêt nominal se surajuste (respectivement se sous-ajuste) à sa valeur de long terme si l'élasticité de substitution intertemporelle est inférieure (respectivement supérieure) à l'unité. Dans les deux cas, l'écart du taux d'intérêt initial à sa valeur stationnaire s'accroît en valeur absolue, quelque soit la valeur du taux de substitution intertemporelle (différente de un).

Ce comportement du taux d'intérêt nominal demeure valide pour toute fonction d'utilité de la forme CES; en revanche, la proposition $2c$ est plus générale, puisqu'elle résulte directement de la relation (21), valide pour toute fonction d'utilité aux propriétés standards. Dérivant la relation (21) par rapport au taux de croissance de la masse monétaire au voisinage de l'état stationnaire, il vient :

$$\left.\frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = -u_{cm}\left(\frac{u_m}{u_{cm}^2 - u_{cc}\,u_{mm}}\right)\left.\frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}$$

$$+$$

ou encore, puisque la consommation demeure inchangée à long terme :

$$\operatorname{Sgn}\left\{\underbrace{\left.\frac{\partial c^*}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}}_{(0)} - \left.\frac{\partial c_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}\right\} = u_{cm}\operatorname{Sgn}\left\{\underbrace{\left.\frac{\partial r^*}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}}_{(1)} - \left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}\right\}$$

La dérivée de la différence (consommation à long terme moins consommation à court terme) a le signe du produit de l'utilité marginale croisée consommation-monnaie et de la dérivée de la différence (taux d'intérêt nominal à long terme moins taux d'intérêt nominal à court terme).

La transmission des mouvements du taux d'intérêt nominal au taux de croissance de la consommation, qui détermine la réaction de l'investissement, dépend donc exclusivement du signe de l'utilité marginale croisée entre monnaie et consommation.

Au total, la relation inflation-accumulation se décompose donc comme suit :

$$\operatorname{Sgn} \frac{\partial \dot{k}}{\partial \omega} = \operatorname{Sgn} \frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \dot{r}/r} \cdot \frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega} = \operatorname{Sgn}\left(-u_{cm}(c^*, m^*) \cdot (1 - S)\right) \quad \square$$

où les dérivées s'entendent au voisinage de l'équilibre stationnaire, pour un stock de capital prédéterminé.

Pour la fonction CES (24), l'utilité marginale croisée entre consommation et monnaie[4] prend précisément le signe de $(S-\sigma)$. L'impact du taux de croissance de la masse monétaire sur l'investissement aura donc le signe de $(\sigma-S)(1-S)$.

Cette décomposition permet une interprétation intuitive de l'impact du taux de croissance de la masse monétaire durant la trajectoire d'ajustement.

Le comportament du taux d'intérêt nominal résulte d'un mécanisme de substitution intertemporelle.

Toute élévation du taux de croissance de la masse monétaire est synonyme d'inflation anticipée, et de réduction de la valeur réelle des encaisses futures. Le consommateur souhaite donc détenir relativement moins de monnaie sur la nouvelle trajectoire d'ajustement.

Si l'agent représentatif substitue aisément la consommation et la monnaie dans le temps $(S>1)$, il est tenté de substituer la consommation aux encaisses plutôt à long terme qu'initialement, de façon à échapper à cette taxe inflationniste : le taux d'intérêt nominal s'accroit davantage à long terme, et le taux d'intérêt initial (dans (9)) se sous-ajuste par rapport à sa valeur stationnaire.

Dans le cas contraire $(S<1)$, l'agent représentatif, éprouvant des difficultés à substituer détention de monnaie et consommation dans le temps, substituera la consommation aux encaisses plutôt initialement qu'à long terme. De cette manière, il lissera sa demande d'encaisses réelles : le taux d'intérêt nominal intital se surajuste à sa valeur stationnaire.

Cependant, l'histoire ne s'arrête pas là : l'ajustement du taux d'intérêt nominal s'interprète comme un effet-prix relatif de la monnaie en termes de consommation : toute élévation (relativement à sa valeur stationnaire) du prix relatif de la monnaie en termes de consommation entraîne – dans (20) – une réduction du taux de croissance des encaisses désirées sur la nouvelle trajectoire d'ajustement, par rapport à l'ancienne trajectoire.

La réaction de la consommation, donc de l'accumulation du capital, procède d'un mécanisme de substitution entre consommation et encaisses.

Si la monnaie et la consommation sont complémentaires au sens d'EDGEWORTH $(u_{cm}>0)$, l'agent représentatif souhaite voir les deux arguments évoluer dans le même sens, et la réduction du taux de croissance des encaisses réelles provoque celle du taux de croissance de la consommation, tandis que si les deux variables sont substituables $(u_{cm}<0)$, ce dernier s'élève, l'individu profitant de la baisse du taux de croissance des encaisses réelles pour accroître celui de la consommation. Sur la nouvelle trajectoire d'ajustement, le taux de croissance de la consommation sera donc respectivement inférieur ou supérieur, par rapport à l'ancienne trajectoire.

---

4. En effet :

$$u_{cm}(c, m)=\left(\frac{S-\sigma}{S\sigma}\right)(1-a)m^{-1/\sigma}ac^{-1/\sigma}[ac^{\sigma-1/\sigma}+(1-a)m^{\sigma-1/\sigma}]^{\sigma(S-1)/S(\sigma-1)-2}$$

CHARPIN [1989] dérive une expression similaire dans un modèle de cycle de vie.

Ces modifications souhaitées du taux de croissance de la consommation provoquent un mouvement de même sens de l'accumulation du capital, par le biais d'un saut initial du niveau de l'investissement, qui prendra donc le signe de $(S-1) \,.\, u_{cm}$.

4 Conclusion

La relation inflation-accumulation est donc fondée, d'une part sur un mécanisme de substitution intertemporelle suscitant une modification de la trajectoire du prix relatif de la monnaie en termes de consommation, et, d'autre part, sur la réaction de la trajectoire de consommation à cet effet-prix relatif, qui dépend du signe de la dérivée seconde croisée de la fonction d'utilité, traduisant l'aspect complémentaire ou substituable de la consommation et des encaisses.

La promotion de l'élasticité de substitution intertemporelle au rang de déterminant exclusif du sens de la relation inflation – accumulation, suscitant l'énigme de Fischer [1979], est une illusion provenant de la spécification particulière de la fonction d'utilité employée par cet auteur, dans laquelle l'utilité marginale croisée monnaie – consommation prend le signe de $(S-1)$.

Une forme plus générale de fonction d'utilité permet au contraire de dériver l'impact de l'inflation sur l'investissement comme fonction de la complémentarité ou de la substituabilité au sens d'EDGEWORTH entre consommation et monnaie, et de l'interpréter comme un effet-prix relatif monnaie – consommation durant la trajectoire d'ajustement.

Les modèles introduisant la monnaie dans la fonction d'utilité souffrent donc d'un certain manque de robustesse, puisque l'impact de l'inflation sur la trajectoire d'ajustement dépendra de l'hypothèse « **ad hoc** » en matière de complémentarité ou de substituabilité des deux arguments. L'introduction de coûts de tansactions tendrait à privilégier une complémentarité des encaisses et de la consommation en termes d'utilité. Cependant, le recours à de telles externalités se justifie difficilement dans les modèles à monnaie dans la fonction d'utilité, où aucun argument de coût de transactions n'apparaît explicitement. L'avantage d'une formulation à arguments complémentaires, formellement équivalente aux modèles « **cash-in-advance** » à la Clower [1967]-Lucas [1980], et justifiée économiquement par la présence de décalages de type Robertson entre perception et dépense du revenu, est de pouvoir être dérivée d'une technologie de transactions explicite.

Écriture explicite de la matrice Jacobienne

$$J=\begin{bmatrix} 0 & \left[S\sigma\left[\dfrac{1+Ar^{*\sigma-1}}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]+\dfrac{S-\sigma}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]f''c^* & \left[\dfrac{\sigma-S}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]c^* \\ -1 & \beta & 0 \\ 0 & \left[\dfrac{1+Ar^{*\sigma-1}}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right](S-1)f''r^* & \left[\dfrac{1+Ar^{*\sigma-1}}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]r^* \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(J)=\beta+\left[\frac{1+Ar^{*\sigma-1}}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]r^*>0$$

et

$$\mathrm{Det}\,(J)=\left[\frac{1+Ar^{*\sigma-1}}{S+\sigma Ar^{*\sigma-1}}\right]S\,c^*\,r^*\,f''<0$$

où : $A\equiv\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^{\sigma}$.

ANNEXE A2

Influence de l'inflation durant la trajectoire

L'équation caractéristique de J s'écrit :

$$\mathscr{A}(\eta^*, \omega) = \mathrm{Det}(J - \eta^* I) = 0$$

Comme $\mathscr{A}(.)$ est une fonction de deux variables, sa différentielle totale permet de déterminer :

$$\text{(A.1)} \qquad \left.\frac{d\eta^*}{d\omega}\right|_{(*)} = -\left.\frac{\partial\mathscr{A}/\partial\omega}{\partial\mathscr{A}/\partial\eta^*}\right|_{(*)}$$

où toutes les dérivées sont entendues au point stationnaire.

On montre aisément que $\partial\mathscr{A}/\partial\eta^* < 0$. En effet, l'équation caractéristique s'annule pour une seule valeur négative de η^*, et prend une valeur négative lorsque $\eta^* = 0$, puisque $\mathscr{A}(0, \omega) = \mathrm{Det}\ J$. Comme η^* est l'unique valeur propre négative, on ne peut avoir à la fois $\partial\mathscr{A}/\partial\omega > 0$ et $\mathscr{A}(0, \omega) < 0$ (abandon de la figure 1), soit :

$$\mathrm{Sgn}\ \frac{d\eta^*}{d\omega} = \mathrm{Sgn}\ \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial\omega}$$

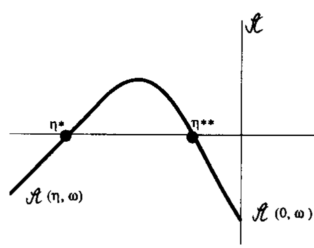

FIGURE 1

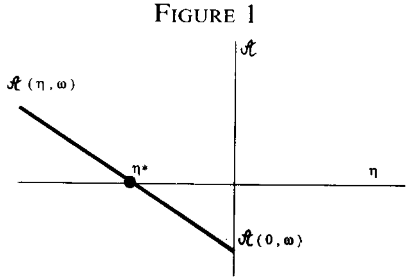

FIGURE 2

Or, l'équation caractéristique s'écrit :

$$(A.2) \quad \mathscr{A}(\eta^*, \omega) = [\eta^{*2} - \beta\eta^* + S f'' c^*] \\ [(1 + A r^{*\sigma-1}) r^* - \eta^* (S + \sigma A r^{*\sigma-1})] \\ - \eta^* f'' c^* (S-1)(\sigma - S) = 0$$

soit, utilisant (A.2) :

$$(A.3) \quad \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \omega} = \frac{\eta^* f'' c^* (S-1)(\sigma-S)}{[(1 + A r^{*\sigma-1}) r^* - \eta^* (S + \sigma A r^{*\sigma-1})]} \\ [1 + A\sigma r^{*\sigma-1} - (\sigma-1)\sigma A r^{*\sigma-2} \eta^*]$$

Le second membre entre crochets est strictement positif pour $\sigma \geqslant 1$. La substitution de la valeur que prend η^* dans $\mathscr{A}(.)$ permettrait de montrer qu'il le demeure pour $\sigma \in]0, 1[$, mais invoquerait le recours à une arithmétique assez complexe.

Une preuve plus simple peut être dérivée en réécrivant l'équation caractéristique sous la forme :

$$\mathscr{B}(u^*, \omega) = [(u^* r^*)^2 - \beta u^* r^* + S f'' c^*][(1 + A r^{*\sigma-1}) - u^* (S + \sigma A r^{*\sigma-1})] \\ - u^* f'' c^* (S-1)(\sigma-S) = 0 \qquad \text{où} \quad u^* = \eta^*/r^*$$

avec :

$$\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial \omega} \geqslant 0 \quad \text{sans ambiguïté pour } \sigma \leqslant 1.$$

La méthode employée pour $\mathscr{A}(.)$ reste – trivialement – valide pour $\mathscr{B}(.)$, et l'on a donc également :

$$\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial u^*} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$(A.4) \qquad \frac{du^*}{d\omega} \geqslant 0 \qquad \text{pour} \quad \sigma \leqslant 1$$

Par définition de la matrice jacobienne, la consommation et le taux d'intérêt nominal suivent l'évolution suivante, pour un stock de capital prédéterminé :

$$c_t - c^* = (\beta - \eta^*)(k_t - k^*) \quad \Rightarrow$$

$$(A.5) \qquad \left.\frac{\partial c_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = -\frac{\partial \eta^*}{\partial \omega}(k_t - k^*)$$

$$(A.6) \qquad r_t - r^* = \frac{f'' r^* (1-S)(1 + A r^{*\sigma-1})}{[(1 + A r^{*\sigma-1}) r^* - \eta^* (S + \sigma A r^{*\sigma-1})]}(k_t - k^*)$$

En statique comparative, ces variables doivent subir un saut lorsque le taux de croissance de la masse monétaire est accru.

De plus :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \eta^* \left(1 - \frac{c^*}{c_t}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\text{(A.7)} \qquad \left.\frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = \frac{\partial \eta^*}{\partial \omega} \left\{ \left[1 - \frac{c^*}{c_t}\right] - \frac{\eta^*}{c_t^2} [k_t - k^*] \right\}$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = u^* (r_t - r^*) \quad \Rightarrow$$

$$\text{(A.8)} \qquad \left.\frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = \frac{\partial u^*}{\partial \omega} (r_t - r^*) + u^* \left[1 - \left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}\right]$$

Or, le système original (21-(22)-(23) devient, avec la fonction d'utilité CES (24) :

$$\frac{\dot{c}}{c} = -S\sigma \left[\frac{1 + A r^{*\sigma - 1}}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] [\beta + \delta - f'(k)]$$

$$+ \left[\frac{S - \sigma}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] [\omega - 1 - \delta - r + f'(k)]$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = -S \left[\frac{1 + A r^{*\sigma - 1}}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] [\beta + \delta - f'(k)]$$

$$- \left[\frac{1 + A r^{*\sigma - 1}}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] [\omega - 1 - \delta - r + f'(k)]$$

Soit, au voisinage de l'état stationnaire, pour un stock de capital prédéterminé :

$$\text{(A.9)} \qquad \left.\frac{\partial \dot{c}/c}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = \left[\frac{S - \sigma}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] \left[1 - \left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}\right]$$

$$\text{(A.10)} \qquad \left.\frac{\partial \dot{r}/r}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} = \left[\frac{1 + A r^{*\sigma - 1}}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}}\right] \left[\left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} - 1\right]$$

Égalisant (A.8) et (A.10), il vient :

$$\text{(A.11)} \qquad \left[\frac{1 + A r^{*\sigma - 1}}{S + \sigma A r^{*\sigma - 1}} - u^*\right] \left[\left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} - 1\right] = \frac{\partial u^*}{\partial \omega} (r_t - r^*)$$

soit, avec (A.4) et (A.6)

$$\mathrm{Sgn} \left\{ \left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} - 1 \right\} = \mathrm{Sgn}\,(r_t - r^*) = \mathrm{Sgn}\,(1 - S) \qquad \text{pour} \quad \sigma \leqslant 1$$

D'autre part, utilisant (A.7) et (A.9), en y substituant (A.1) et (A.3) par leur valeur, il vient :

$$(A.12) \quad \left\{1 - \left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*}\right\} = \frac{\eta^* f'' c^* (S-1) X \{[1-(c^*/c_t)] - (\eta^*/c_t^2)[k_t - k^*]\}}{[[(1 + A r^{*\sigma - 1})/(S + \sigma A r^{*\sigma - 1})] r^* - \eta^*] \partial \mathscr{A}/\partial \eta^*}$$

où $X \equiv [1 + A \sigma r^{*\sigma - 1} - (\sigma - 1) \sigma A r^{*\sigma - 2} \eta^*]$
soit :

$$\text{Sgn} \left\{\left.\frac{\partial r_t}{\partial \omega}\right|_{\bar{k}_t < k^*} - 1\right\} = \text{Sgn } (1 - S) \text{ pour } \sigma \geqslant 1$$

Ce qui prouve la proposition $2b$ dans le texte, ainsi que la proposition 1, par égalisation de (A.11) et (A.12) : $X \geqslant 0 \, \forall \, \sigma$, soit :

$$\text{Sgn } \frac{d\eta^*}{d\omega} = \text{Sgn } (S-1)(\sigma - S)$$

• Références bibliographiques

ABEL, A. B. (1985). — « Dynamic Behaviour of Capital Accumulation in a Cash-in-Advance Model », *Journal of Monetary Economics*, vol. 16, n° 1, juillet, pp. 55-71.

ASAKO, K. (1983). — « The Utility Function and the Superneutrality of Money on the Transition Path », *Econometrica*, vol. 51, n° 5, septembre, pp. 1593-1596.

CHARPIN, F. (1989). — « Les effets de l'inflations dans la théorie du cycle de vie », *Document de travail OFCE* n° 89-02, juin.

CLOWER, R. W. (1967). — « A Reconsideration of the Microfoundations of Money », *Western Economic Journal*, vol. 6, pp. 1-9.

COHEN, D. (1985). — « Inflation Wealth and Interest Rates in an Intertemporal Optimizing Model », *Journal of Monetary Economics*, vol. 16, n° 1, juillet, pp. 73-85.

DONALDSON, J. B. et MEHRA, R. (1984). — « Comparative Dynamics of an Equilibrium Intertempral Asset Pricing Model », *Review of Economic Studies*, vol. 51, n° 166, juillet, pp. 491-508.

FISCHER, S. (1979). — « Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model », *Econometrica*, vol. 47, n° 6, novembre, pp. 1433-1439.

FRIEDMAN, M. (1969). — « The Optimum Quantity of Money » in: *« The Optimum Quantity of Money and Other Essays »*, Chicago, pp. 1-50.

LUCAS, J. R. (1980). — « Equilibrium in a Pure Currency Economy », *Economic Inquiry*, vol. 18, n° 2, avril, pp. 203-220.

SIDRAUSKI, M. (1967). — « Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy », *American Economic Review*, *Papers ans Proceedings*, vol. 57, n° 2, mai, pp. 534-544.