ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 23 — 1991

Échantillonnage représentatif optimum à probabilités inégales

Pascal ARDILLY *

RÉSUMÉ. – Nous proposons des algorithmes de tirage à probabilités inégales faciles à mettre en œuvre, approchant la représentativité des échantillons selon des variables de contrôle dont les valeurs sont connues pour chaque individu, et assurant l'optimalité des probabilités de tirage $p(s)$ des échantillons. On voit, sur des données cantonnales de 1982, qu'il est possible, dans le cas d'échantillons de petite taille (quelques unités) dans des populations elles-mêmes de taille limitée (inférieure à 100), de remplacer l'estimateur complexe de la régression par l'estimateur très simple des sommes dilatées avec une précision comparable, la prise en compte des variables auxiliaires se faisant au niveau du tirage et non de l'estimateur.

Optimum and Representative Proportional to Size Sampling Procedures

ABSTRACT. – We propose to use some inequal probability sampling algorithms in order to approach the representativeness of selected samples for a set of auxiliary variables, and to produce jointly optimal probabilities $p(s)$ for sample selection. On French Census datas and for small sample sizes (a few units) in a modest size population (below 100 people), we may use the very simple Horvitz estimator instead of the more complex regression estimator, because we don't take into account the auxiliary information in the estimator formula, but during the procedure of selection.

* P. ARDILLY: INSEE Direction des Statistiques Démographiques et Sociales, Division Méthodes Statistiques et Sondages. Je tiens à remercier J. C. Deville pour ses commentaires et suggestions.

1 Introduction

Dans la pratique des sondages, lorsqu'on cherche à estimer dans une population finie un paramètre fonction linéaire des données tel que total, moyenne ou pourcentage, on utilise communément l'estimateur sans biais classique des sommes dilatées (dit encore estimateur de Horvitz-Tompson) (1). Si on note Y_i la valeur de la variable d'intérêt pour l'individu i ($1 \leqslant i \leqslant N$), et P_i la probabilité qu'a ce même individu d'appartenir à l'échantillon s, cet estimateur, dans le cas de l'estimation du vrai total inconnu Y, a pour expression :

$$\hat{Y} = \sum_{i \in S} \frac{Y_i}{P_i}$$

Dans la pratique, la probabilité P_i est choisie proportionnelle à une variable de taille connue sur l'ensemble de la population. La théorie montre cependant qu'il est préférable, lorsqu'on connaît sur l'ensemble de la population une variable auxiliaire autre que la taille qui soit bien corrélée avec la variable d'intérêt, d'utiliser cette information pour améliorer la qualité des résultats, qualité mesurée par l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur dans la population finie. On peut tenir compte de l'information, soit au niveau du tirage grâce à une technique de stratification, soit au niveau de l'estimation, auquel cas on utilise essentiellement des estimateurs par le ratio ou par la régression (GROSBRAS [1987]).

Dans la première optique, lorsqu'on choisit un plan de sondage stratifié avec tirage proportionnel à la taille dans chaque strate, on se heurte au problème du calcul de la variance de l'estimateur, soit :

$$V(\hat{Y}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} (P_i . P_j - P_{ij}) . \left(\frac{Y_i}{P_i} - \frac{Y_j}{P_j} \right)^2$$

au travers des probabilités d'inclusion doubles P_{ij}, où P_{ij} est la probabilité que les individus i et j soient simultanément dans l'échantillon s. Les P_{ij} sont, hélas, fonction de l'algorithme de tirage utilisé, et on peut dire qu'il n'existe encore que très peu de procédures de tirage de taille fixe donnant lieu à des expressions analytiques exactes, valables quelles que soient la population et la taille de l'échantillon, et donnant lieu à une programmation qui reste accessible (BREWER, HANIF [1983]). Le tirage systématique sur fichier aléatoire (HARTLEY, RAO [1962], CONNOR [1966]) et l'algorithme de SUNTER [1986] sont parmi les plus satisfaisants, encore que, pour le premier, les expressions soient très complexes, et pour le second, outre le fait que la taille d'échantillon initialement prévue ne soit pas nécessairement respectée, les P_{ij} ne sont calculables que par récurrence. La stratification pose en outre le problème du choix de la variable de stratification, du nombre de strates, et de la limite des strates (GOURIEROUX [1981]); il existe certes de bonnes approximations des limites optimales de strates dans le cas où on utilise un sondage aléatoire simple avec allocation optimale de Neymann dans chaque

strate, mais le problème devient insoluble si on souhaite tirer les unités proportionnellement à leur taille dans chaque strate.

Dans la seconde optique, si on souhaite agir sur l'expression de l'estimateur en utilisant un estimateur par le ratio ou par la régression, il existe un biais qui peut-être important si l'échantillon est de petite taille. Comme dans le plan de sondage alternatif stratifié, les variances font encore intervenir P_{ij}. Il est donc impossible de fournir une valeur exacte de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur du total d'une variable d'intérêt partout connue, de même qu'il est impossible d'estimer sans biais l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur du total lorsque la taille de l'échantillon est faible (par exemple inférieure à 10). Lorsqu'on dispose de plusieurs informations auxiliaires, celles-ci seront probablement perdues dans la plupart des cas si on opte pour le ratio, car la méthode théorique du multiratio (COCHRAN [1977]) fait intervenir des pondérations pratiquement incalculables. Quant à l'estimateur par la régression, il ne serait pas raisonnable de l'utiliser si la taille de l'échantillon est inférieure à 10 (et encore, dans le cas où on ne dispose que d'un seul régresseur).

Du point de vue pratique, ratio et régression, dont on sait qu'ils peuvent réduire considérablement la variance si la variable d'intérêt et les variables auxiliaires sont bien corrélées, ont l'énorme inconvénient de nécessiter un traitement spécifique à chaque variable d'intérêt : l'estimateur par la régression impose un calcul des coefficients de régression propre à chaque variable, contrainte fortement dissuasive qui limite largement leur utilisation; sauf pour l'enquête de conjoncture auprès des entreprises où, typiquement, la seule connaissance de l'investissement est recherchée, cette méthode n'a jamais été utilisée à notre connaissance dans les enquêtes à grande échelle (encore faut-il nuancer, puisqu'on sait depuis peu (DEVILLE, SARNDAL [1990]) que les méthodes de calage sur marge sont asymptotiquement équivalentes à des estimations par régression). Dans les arguments qui pourraient privilégier l'utilisation de l'information auxiliaire au niveau du tirage sur sa prise en compte dans l'expression de l'estimateur, on trouve l'influence de l'ordre chronologique dans lequel s'effectuent les opérations : notre propos a son origine dans la constitution de l'échantillon-maître français de 1992.

L'échantillon-maître est une réserve de logements destinée à alimenter les échantillons de toutes les enquêtes-ménages de l'INSEE sur la période intercensitaire (sauf l'enquête emploi) (ARDILLY [1989]). Il est constitué sur la base d'un tirage stratifié à plusieurs degrés. Dans la strate des cantons ruraux ou des fractions rurales de cantons partiellement urbains, on souhaite tirer les cantons proportionnellement à leur taille car on estime que, pour la plupart des variables d'intérêt, les totaux par canton sont bien corrélés avec le nombre total de logements du canton. Il est cependant facile de comprendre, en zone rurale comme en fait partout ailleurs, que l'on ne doit pas imposer l'utilisation en « aval » de certains estimateurs plus compliqués que l'estimateur des sommes dilatées. Dans ces conditions, cela ne nous engage à rien d'utiliser en « amont » l'information au niveau du tirage : libre aux utilisateurs de n'employer que les sommes dilatées, sachant que la qualité devrait être améliorée par rapport à la situation actuelle (voir résultats), et libre à eux de programmer quand même un ratio ou une régression en sus si la taille de l'échantillon et le budget le permettent.

Ce qui suit a pour but de proposer une méthode de tirage et des variantes permettant un calcul rigoureux, exact, de variance vraie à partir de simples estimateurs des sommes dilatées, et cela dans le cadre d'un tirage « aussi représentatif que possible » au sens de HAJEK [1981].

Le paragraphe II détaille l'approche optimale qui a été adoptée, sa traduction sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes, et la description des algorithmes mis en œuvre. Le paragraphe III présente une application de la méthode à des données issues de la Banque de Données Locales 1982. Les résultats sont analysés et comparés à ceux qui découlent des méthodes « classiques ». Le paragraphe IV indique des voies d'extensions possibles.

2 Les algorithmes de tirage d'échantillons

Les algorithmes proposés sont au nombre de trois. Tous résultent d'une approche du problème qui consiste à fabriquer une liste d'échantillons potentiels en tenant compte de l'information auxiliaire, échantillons auxquels on affecte une probabilité de tirage optimale selon un certain critère. En effet, les expressions originelles de l'espérance et de la variance d'un estimateur $\hat{Y}$ d'un paramètre de total Y font intervenir l'ensemble des échantillons s réalisables (noté S) à partir de la population finie dont on dispose. Ainsi :

$$E(\hat{Y}) = \sum_{s \in S} p(s) . \hat{Y}(s)$$

$$V(Y) = \sum_{s \in S} p(s) . (\hat{Y}(s) - E(\hat{Y}))^2$$

où $\hat{Y}(s)$ est l'estimateur de Y si on tire l'échantillon s, et $p(s)$ la probabilité de tirer l'échantillon s.

Ici, l'idée est d'agir directement au niveau des probabilités d'échantillon $p(s)$, au lieu de déterminer des probabilités d'inclusion P_i comme dans les approches traditionnelles.

Notre recherche d'optimalité doit tenir compte de contraintes, soit imposées par le sondeur pour améliorer l'efficacité des estimateurs, soit imposées « mathématiquement » par la théorie des probabilités.

En ce qui concerne le premier type de contraintes, on cherche à adapter au niveau du tirage la propriété fondamentale des estimateurs par le ratio ou la régression : estimer avec une variance nulle le total d'une variable auxiliaire connue sur l'ensemble de la population. L'idéal serait de réaliser

le tirage de l'échantillon (s) en imposant :

$$(1) \qquad \sum_{i \in s} \frac{X_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{N} X_i, \qquad \forall s \in S$$

où X_i est la variable auxiliaire attachée à l'individu i, P_i la probabilité d'inclusion de l'individu i, et N la taille de la population. Cette idée de l'échantillon équilibré qui apparaît chez HAJEK [1981] et ROYALL, HERSON [1973], a été exploitée à l'INSEE dans le cas d'un tirage aléatoire simple lorsque l'échantillon est de grande taille (DEVILLE, GROSBRAS, ROTH [1988]). Dans notre cadre, surtout si la taille de l'échantillon, n, est faible, il est probable que (1) soit numériquement irréalisable quelque soit s, par conséquent, on impose :

$$(2) \qquad \left| \frac{\sum_{i \in S} \frac{X_i}{P_i} - \sum_{i=1}^{N} X_i}{\sum_{i=1}^{N} X_i} \right| \leqslant l(x)$$

où $l(x)$ est un seuil maximum admissible, considéré comme paramètre du problème. Cette contrainte nous assure une estimation du total des variables connues aussi bonne que possible compte tenu de la structure des données, ce que ne permet pas systématiquement le critère classique de la variance. Elle correspond à la véritable notion de représentativité approchée d'un échantillon (que l'on confond très souvent avec l'allocation proportionnelle du tirage stratifié). La contrainte (2) peut être vue comme une manière de tronquer la loi de l'estimateur X pour diminuer sa variance. Si on dispose à l'origine de la liste complète S de tous les échantillons de taille fixe n réalisables, l'application de la contrainte (2) sélectionne un sous ensemble de S, noté S1, d'échantillons admissibles. On ne contrôle évidemment en rien la constitution de S1, et il est malheureusement possible que certains individus atypiques de la population y soient très peu représentés, voire pas du tout.

Le second type de contrainte s'obtient en écrivant la définition de la probabilité d'inclusion P_i de chacun des individus de la population. Ainsi :

$$(3) \qquad P_i = \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S1}} p(s), \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

On remarquera que la somme s'effectue sur les échantillons de S1 seulement, les autres éléments de S étant définitivement écartés. Le tirage étant de taille fixe n, proportionnel à une taille T_i, on impose :

$$(4) \qquad P_i = n. \frac{T_i}{\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} T_i}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

Comme $p(s)$ est une probabilité, on doit avoir :

$$0 \leqslant p(s) \leqslant 1, \qquad \forall s \in S1$$

et

$$\sum_{s \in S1} p(s) = 1$$

On peut cependant écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S1} p(s) &= \sum_{s \in S1} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{i \in s}}{n} \right) p(s) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{s \in S1} p(s) . \mathbf{1}_{i \in s} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S1}} p(s) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} P i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

La dernière contrainte est par conséquent impliquée par (3) et (4). Par ailleurs, si le tirage proportionnel à la taille est possible, c'est-à-dire si on a :

$$P_i \leqslant 1, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

alors d'après (3) :

$$p(s) \leqslant 1, \qquad \forall s \in S1.$$

• Programme du type « simplexe »

Si on s'intéresse prioritairement à l'estimateur $\hat{X}(s)$ d'un total X bien particulier, alors on peut chercher à obtenir une qualité maximale sur cet estimateur, compte tenu des deux types de contraintes que l'on s'est imposées. La formalisation de cet objectif va conduire au premier algorithme :

Chercher la famille $p(s)$, s décrivant S1, vérifiant le programme P :

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\text{Min} \sum_{s \in S1} p(s) . (\hat{X}(s) - X)^2 \\ &\text{s. c.} \begin{cases} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S1}} p(s) = P_i, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 \leqslant p(s), & \forall s \in S1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si on s'intéresse à un ensemble de variables auxiliaires X^k, $1 \leqslant k \leqslant K$, on peut choisir un critère $C(s)$ construit à partir des valeurs $\hat{X}^k(s)$ reflétant la

qualité d'ensemble du tirage, puis résoudre le programme P0 :

$$\text{Min} \sum_{s \in S1} p(s).C(s)$$

$$\text{(P0)} \qquad \text{s. c.} \begin{cases} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S1}} p(s) = P_i, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 \leqslant p(s), & \forall s \in S1. \end{cases}$$

Par exemple :

$$C(s) = \sum_{k=1}^{K} (\hat{X}^k(s) - X^k)^2 \tag{5}$$

ou

$$C(s) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(\hat{X}^k(s) - X^k)^2}{X^k} \tag{6}$$

ou

$$C(s) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\hat{X}^k(s) - X^k}{X^k} \right)^2 \tag{7}$$

Le critère (5) conduit à une minimisation de la somme des variances des estimateurs construits à partir des variables auxiliaires. En un certain sens, il donne bien une importance plus grande aux variables dont les valeurs numériques sont les plus fortes, et s'utilise donc si on accorde une importance moindre aux populations rares. Le critère (6) est du type chi-deux, et représente donc une distance classique. Le critère (7) est parfaitement homogène, et s'apparente à une minimisation de coefficient de variation.

La résolution numérique du problème s'effectue de la manière qui suit :

La première étape est une étape de génération d'échantillons qui conduit à la constitution de la liste S. On rappelle que tirer n individus parmi N nécessite, avec ce procédé, de constituer un fichier de C_N^n enregistrements : tirer 5 individus parmi 100 va créer 75 millions de possibilités! En tirer 5 parmi 50 ne va plus en créer que 2 millions (ce qui est à la portée des ordinateurs actuels si on n'est pas trop pressé...). Plus contraignant est le traitement de la minimisation, car les programmes adaptés ne peuvent pas manipuler un trop grand nombre de contraintes ni de variables (aucun problème cependant en dessous de 2 000 variables pour une centaine de contraintes). Pour ces raisons, il est nécessaire, avec l'informatique dont nous disposons actuellement, de nous limiter à des petites tailles d'échantillons dans une population restreinte.

La seconde étape, après test d'admissibilité sur chacun des échantillons de la liste S, conduit à la liste S1 vérifiant (2). Partant de là, si on s'attache à la résolution de P0, on sait que, sauf configuration très particulière des données, on obtient toujours une solution si le domaine défini par les contraintes n'est pas vide. En théorie, dans une population de taille N quelconque, si on se donne *a priori* un ensemble de réels P_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$

compris entre 0 et 1 qui vérifient :

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = n, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

il est toujours possible de déterminer un système de probabilités $p(s)$ tel que :

$$\sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S}} p(s) = P_i, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Ayant éliminé les échantillons ne satisfaisant pas à (2), le théorème ne s'applique plus, et le domaine des contraintes de P0 peut être vide. Pour minimiser ce risque, nous avons cherché à constituer des échantillons tels que chaque individu apparaisse dans un nombre d'échantillons à peu près proportionnel à sa taille. Cette technique permet de limiter les inconvénients introduits par l'effet de grappe que l'on génère : supposons par exemple qu'un individu i de taille Ti importante prenne des valeurs Xi atypiques, et qu'il ne soit présent que dans le seul échantillon $\bar{s}$. Pour que soit à peu près équilibré au sens de (2), il est fort probable que i sera associé à au moins un individu j de faible taille. Dans ce cas, on aura :

$$P_j = \sum_{s \ni j} p(s) \geqslant p(\bar{s}) = P_i$$

ce qui est contredit par l'ordre des tailles de i et j. Ne contrôlant pas la structure des données, et compte tenu de l'absence de liaison entre la taille et le caractère plus ou moins atypique des variables auxiliaires, on peut constater dans la liste S1 de forts écarts à la proportionnalité recherchée pour certains individus.

A la troisième étape, on est par conséquent amené à sélectionner un sous ensemble S2 de S1 qui résulte de l'algorithme suivant :

- on considère tous les échantillons admissibles S1
- on les classe par valeur croissante du critère $C(s)$
- on calcule, pour chaque individu i, le nombre théorique $N_i(1)$ d'échantillons où il doit être présent, compte tenu de la taille prévue de S2.
- A l'étape u, on retient l'échantillon s classé en position u si pour tout i de s, on a $N_i(u) > 0$, et on met à jour le compteur $N(i)$, soit : $N_i(u+1) = N_i(u) - 1$.

Sinon on passe directement à l'échantillon classé $u+1$.

On arrête la procédure lorsque S2 comprend le nombre d'échantillons que l'on s'était fixé comme limite *a priori* (mettons de l'ordre de 2 000). En réalité, on obtient systématiquement moins d'échantillons que ce qui était demandé à cause de l'épuisement plus ou moins rapide des individus dans les échantillons sélectionnés. Pour cette raison, la méthode n'est pas optimale, et la question de son amélioration reste ouverte.

Le problème devient finalement P1 :

$$\text{Min} \sum_{s \in S2} p(s).C(s)$$

$$\text{(P1)} \qquad \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S2}} p(s) = P_i, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 \leqslant p(s), & \forall s \in S2. \end{cases}$$

P1 est un programme de minimisation de fonction linéaire sous contraintes linéaires dans le domaine convexe des variables positives. L'algorithme du simplexe est adapté à un tel problème (CIARLET [1985]), et son utilisation à partir de librairies scientifiques standards (IMSL ou Harwell) fournit directement en sortie les valeurs des $p(s)$ optimisées. Les variances des estimateurs des totaux des variables auxiliaires peuvent alors être calculées de manière exacte, et fournir une référence numérique pour les calculs de précision ultérieurs à partir d'autres variables qui leurs seraient corrélées. Les probabilités P_{ij} d'inclusion doubles sont immédiatement calculables à partir de :

$$P_{ij} = \sum_{\substack{s \ni i \\ s \ni j}} p(s), \qquad \forall (i, j) \in \{1, \ldots, N\}^2$$

• Programme minimax-quadratique

Dans la méthode précédente, par construction les probabilités $p(s)$ de tirage, sont fonction des variables auxiliaires. Si les variables d'intérêt sont bien corrélées avec les variables auxiliaires, alors on peut s'attendre à une bonne précision. Dans le cas contraire, on prend un risque, que l'on peut tenter de minimiser en résolvant un programme de type minimax envisageant toutes les valeurs *a priori* possibles des variables auxiliaires. Dans un premier temps, on peut, sans fixer les probabilités d'inclusion et en ajoutant une contrainte évidente de normalisation, formuler la question ainsi :

$$\underset{p(s)}{\text{Min}} \left(\underset{C(s)}{\text{Max}} \sum_{s \in S2} p(s).C(s) \right)$$

$$\text{(P2)} \qquad \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{s \in S2} p(s) = 1 \\ 0 \leqslant p(s) \leqslant 1, & \forall s \in S2 \\ \sum_{s \in S2} C^2(s) = 1. \end{cases}$$

Cette optique minimax conduit à choisir des probabilités $p(s)$ constantes. On est donc tenté de rechercher un jeu de probabilités $p(s)$ présentant une aussi faible variabilité que possible. On peut utiliser, à cette fin, deux critères

concurrents qui vont mener aux deux algorithmes simples suivants :

Le premier utilise un critère quadratique :

$$\text{Min} \sum_{s \in S2} \left(p(s) - \frac{1}{|S2|} \right)^2$$

$$\text{(P2)} \qquad \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S2}} p(s) = P_i, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 \leqslant p(s), & \forall s \in S2 \end{cases}$$

où $|S2|$ représente le cardinal de S2.

Si on ne tient pas compte des contraintes de positivité, on obtient :

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{e} + A' . B^{-1} . \mathbf{R}, \qquad \mathbf{v} = (p(s))_{1 \leqslant s \leqslant |S2|}$$

où

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{|S2|} \right)$$

vecteur de coordonnées constantes de taille $|S2|$

$$A = (A_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant |S2|,$$

avec $A_{ij} = 1$ si l'individu (i) appartient à l'échantillon (j)

$$B = (B_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant N,$$

avec $B_{ij} = \text{Card} \{ s \in S2 / i \in s \text{ et } j \in \bar{s} \}$

$$\mathbf{R} = (R_i),\ 1 \leqslant i \leqslant N,$$

avec

$$R_i = P_i - \frac{B_{ii}}{|S2|}$$

Compte tenu de la relation :

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} = n . B_{ii}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

on peut aussi écrire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{e} + A' . \left(B^{-1} . \mathbf{P} - \frac{\mathbf{e}}{n} \right)$$

où $\mathbf{P}$ est le vecteur des probabilités d'inclusion P_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. De plus :

$$\text{(9)} \qquad P_{ij} = \frac{B_{ij}}{|S2|} + C_{ij} . A' . \left(B^{-1} \mathbf{P} - \frac{\mathbf{e}}{n} \right) = \frac{B_{ij}}{|S2|} + C_{ij} . (\mathbf{v} - \mathbf{e})$$

où C_{ij} est un vecteur ligne de taille $|S2|$, avec C_{ij}, $k=1$ si l'échantillon (k) contient (i) et (j).

On voit que pour minimiser notre critère, il est avantageux de construire S2 de façon à obtenir :

$$P_i \simeq \frac{B_{ii}}{|S2|}$$

c'est-à-dire B_{ii} autant que possible proportionnel à la taille T_i de l'individu i.

On retrouve la condition qui conduisait à la constitution de S2 pour P1, consistant à placer chaque individu dans un nombre d'échantillons autant que possible proportionnel à sa taille. Dans ce cas, les probabilités doubles données par (9) se réduisent à la proportion empirique d'échantillons contenant le couple (i, j).

(8) ayant été établie sans tenir compte des contraintes de positivité (ce qui entrainerait une trop grande complication), la pratique a consisté à rendre nulles les quelques probabilités négatives (voir résultats), et à normer celles qui étaient positives.

• Programme minimax-entropie

Le second algorithme permettant de réduire la dispersion des probabilités $p(s)$ utilise un critère de type « entropie » :

$$\text{Min} \sum_{s \in S2} p(s) . \text{Log}(p(s))$$

$$\text{(P3)} \qquad \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S2}} p(s) = P_i, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 0 \leqslant p(s), & \forall s \in S2. \end{cases}$$

On sait en effet qu'une minimisation d'entropie sous contraintes de normalisation conduit à un minimum où toutes les variables prennent la même valeur. Outre le fait de fournir une solution numérique différente de celle qui résulte du critère quadratique, et donc conduisant peut-être à des variances plus faibles (les applications numériques fourniront des réponses partielles sur ce point), l'avantage de ce critère réside dans l'économie des corrections *a posteriori* pour rendre les $p(s)$ positives. Il n'est en effet plus nécessaire de tenir compte des contraintes d'inégalité qui sont automatiquement vérifiées puisque :

$$p(s) = \exp\left(-1 - \sum_{i=1}^{N} L_i . A_{is} \right)$$

où L_i est le multiplicateur associé à l'individu i. Les multiplicateurs s'obtiennent en résolvant le système :

$$P_i = \exp(-1) . \sum_{\substack{s \ni i \\ s \in S2}} \prod_{j \in s} \exp(-L_j), \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

grâce à un algorithme approprié traitant les systèmes non linéaires (et il s'agit bien, là encore, de recherche opérationnelle standard).

3 Résultats numériques

Les algorithmes précédents ont été appliqués à des données issues de la Banque de Données Locales 1982, et constituées par des effectifs cantonaux en zone rurale. Les variables suivantes ont été retenues:

– Nombre d'agriculteurs exploitants hommes et femmes dans le canton (Noté AGRI).

– Nombre d'ouvriers (y.c. agricoles) hommes et femmes dans le canton (Noté OUVR.).

– Nombre d'hommes et femmes dans le canton classés dans une des CSP suivante: Artisans, commerçants, chefs d'entreprise, cadres, professions intellectuelles supérieures (Noté CADR).

– Nombre total de jeunes de 19 ans et moins résidant dans le canton (Noté JEUNES).

– Population du canton ayant un emploi résidant et travaillant dans la même commune (Noté MIGR).

– Population totale active française dans le canton (Noté ACTIF).

– Nombre de résidences secondaires dans le canton (Y.C. logements meublés loués ou à louer) (Noté NRESSEC).

– Population totale du canton (Noté PENQ).

– Population totale ayant un emploi dans l'industrie (Noté INDUS).

– Population de 15 ans ou plus ayant un bac général ou technique (Noté POPBAC).

– Population totale de 60 ans et plus (Noté VIEUX).

– Variable constante valant 1 dans chaque canton (Noté CSTE).

Le contrôle (2) a porté sur les 8 premières. Nous nous sommes limités aux cantons du Limousin (RG=74) et de la Provence – Côte d'Azur (RG=93) où, sur des populations respectives de 55 et 61 cantons, nous avons fixé la taille de l'échantillon à 3: cette valeur est exactement le nombre de cantons présents dans la strate correspondante de l'échantillon-maître issu du Recensement 1982.

Le tableau 1 fournit les coefficients de variation des variables de la liste pour 11 plans de sondage concurrents :

. LIGNE 1 : Simplexe P1 avec, pour les variables considérées dans l'ordre de la liste, les seuils $l(x)$ respectifs :
15 %, 20 %, 20 %, 15 %, 20 %, 15 %, 15 %, 15 %; pour RG93 et 15 % partout pour RG74.
Critère selon (5); limite souhaitée à 2 000 échantillons pour S2. Nombre d'échantillons finalement présents dans S2 : 1 724 pour RG74 et 1 072 pour RG93.

. LIGNE 2 : Idem avec le critère (6).

. LIGNE 3 : Idem avec le critère (7)

. LIGNE 4 : Idem avec le critère : $\sum_{s \in S2} p(s).(\hat{X}(s)-X)^2$. où Xi représente la population totale du canton i.

. LIGNE 5 : Minimax P2, critère $C(s)$ selon (5).

. LIGNE 6 : Minimax P3, critère $C(s)$ selon (5).

. LIGNE 7 : Tirage systématique sur fichier trié selon la taille.
Estimateur des sommes dilatées.

. LIGNE 8 : Tirage selon la méthode de Sunter. Estimateur des sommes dilatées.

. LIGNE 9 : Stratification en 3 strates, selon la 1re composante principale, avec limites de strates « optimales » déterminées par simulation. Tirage proportionnel à la taille d'un individu par strate.

. LIGNE 10 : Tirage systématique (fichier trié) et estimateur par le ratio. N' est retenu que le meilleur coefficient de variation parmi les 11 ratios possibles pour chaque variable.

. LIGNE 11 : Tirage systématique (fichier trié) et estimation par la régression. Les paramètres de la régression sont estimés sur l'ensemble des variables auxiliaires dont la significativité n'est pas manifestement nulle.

Le jeu de seuils utilisé n'est évidemment pas optimum. Il résulte d'un balayage qui constitue un compromis entre le désir de « serrer » les seuils $l(x)$ au maximum pour obtenir des échantillons aussi représentatifs que possible, et la nécessité de ne pas engager des coûts informatiques sans commune mesure avec le gain qui pourrait résulter d'un abaissement marginal de ceux-ci. Dans notre cas, une recherche optimale de seuils équivaudrait à une estimation de densité d'un vecteur aléatoire à 8 dimensions! Les seuils imposés dans les deux régions ont été fixés par tâtonnement. Une valeur uniformément égale à 15 % en région 74 permettait à chaque canton d'être présent au moins une fois dans la liste S2. Cela ne fonctionnait plus avec la région 93, prinipalement à cause de la présence d'un tout petit canton atypique : d'où le choix, dans cette région, de seuils différenciés.

Nous avons utilisé l'algorithme du simplexe ZX3LP programmé dans la librairie IMSL, ainsi que le programme ZSPOW de résolution des systèmes d'équations non linéaires. Les variances des tirages stratifiés et systématiques sont issues de simulations (280 tirages indépendants).

Le tableau 2 donne les coefficients de corrélation linéaire entre la variable de taille et les variables d'intérêt.

TABLEAU 1

Région 74

	ACTIF	JEUNES	AGRI	CADR	INDUS	MIGR	NRESSEC	OUVR	PENQ	POPBAC	VIEUX	CSTE
Simplexe P1 critère (5)	2,15	3,44	4,70	8,25	17,28	4,21	5,26	3,42	0,75	26,16	4,48	13,01
Simplexe P1 critère (6)	2,59	3,32	4,24	6,29	8,21	4,43	4,56	3,22	1,50	29,06	4,39	15,03
Simplexe P1 critère (7)	3,48	4,81	5,57	6,49	10,73	6,03	6,51	4,99	3,18	26,54	6,20	16,26
Simplexe P1	4,14	5,37	8,02	6,60	21,77	6,39	7,38	6,97	0,09	26,50	5,01	17,30
Minimax P2 critère (5)	3,15	4,56	5,90	7,16	18,10	5,18	7,03	4,86	1,55	30,24	5,38	15,81
Minimax P3 critère (5)	3,43	5,05	6,46	7,30	18,69	5,39	7,36	5,49	1,85	30,12	5,42	15,00
Systématique	6,98	10,63	11,38	9,94	21,73	10,46	15,87	9,63	5,75	31,43	5,86	16,96
Sunter	10,15	13,21	16,27	12,62	28,55	9,91	17,03	15,89	7,36	34,31	5,97	16,87
Strates	8,74	12,33	16,85	11,43	27,09	10,17	13,25	13,96	6,29	33,75	6,27	8,11
Ratio	3,74	6,75	10,69	8,55	17,12	8,77	15,87	5,10	3,93	26,82	5,86	18,09
Régression	1,45	3,11	4,89	5,06	14,51	6,78	17,30	3,22	1,35	37,85	2,57	–

Région 93

	ACTIF	JEUNES	AGRI	CADR	INDUS	MIGR	NRESSEC	OUVR	PENQ	POPBAC	VIEUX	CSTE
Simplexe P1 critère (5)	3,01	5,98	9,88	10,15	20,40	8,18	9,37	4,37	1,38	28,43	11,57	85,56
Simplexe P1 critère (6)	3,75	6,35	9,72	8,61	11,49	6,95	9,25	4,10	2,12	24,58	12,12	82,71
Simplexe P1 critère (7)	4,08	8,09	10,32	8,91	14,46	8,29	9,70	6,03	2,95	24,25	11,48	83,40
Simplexe P1	4,19	7,38	12,37	11,59	19,87	11,27	9,35	7,25	0,79	26,26	12,97	86,09
Minimax P2 critère (5)	4,62	6,71	9,49	8,82	18,95	8,47	8,81	6,36	2,62	27,42	11,37	85,80
Minimax P3 critère (5)	4,80	6,76	11,82	10,86	20,25	10,19	9,83	6,46	2,96	25,25	12,07	81,05
Systématique	12,58	15,94	26,60	16,39	25,20	13,12	26,31	15,00	11,72	23,59	13,35	152,35
Sunter	18,04	22,47	37,59	20,08	33,08	22,12	41,53	20,91	18,50	28,23	17,80	81,60
Strates	18,33	23,46	39,42	20,65	34,37	23,01	41,62	21,34	18,77	28,48	17,93	50,12
Ratio	5,04	6,90	28,90	11,50	17,00	15,10	26,30	8,50	5,10	21,40	12,30	179,14
Regression	3,05	2,91	11,20	7,18	20,85	7,06	36,26	3,97	1,21	26,71	4,10	

TABLEAU 2

Corrélation entre la taille et les variables d'intérêts

	ACTIF	JEUNES	AGRI	CADR	INDUS	MIGR	NRESSEC	OUVR	PENQ	POPBAC	VIEUX
RG74.....	0,87	0,80	0,67	0,86	0,65	0,85	0,56	0,78	0,93	0,38	0,95
RG93.....	0,80	0,73	0,60	0,81	0,58	0,78	0,68	0,76	0,78	0,71	0,78

Les principales conclusions sont les suivantes:

(a) Les coefficients de variation de P1 ont des ordres de grandeur comparables à ceux des estimateurs par régression: même si certaines variables sont nettement améliorées par l'une ou l'autre des méthodes, l'amélioration d'ensemble apportée par la régression reste globalement peu importante.

La comparaison directe des coefficients de variation doit être tout de même tempérée par les remarques suivantes:

Les résultats de la méthode du simplexe sont fournis pour des variables qui sont intégrées dans le critère d'optimisation, ce qui, par construction les «avantage» par rapport à l'estimation de la régression. En réalité, il faudrait exclure la variable d'intérêt du critère d'optimisation pour obtenir des chiffres directement comparables. Néanmoins, à part le cas de VIEUX en RG93, les variables absentes du critère INDUS, POPBAC et VIEUX ont des comportements comparables dans les deux méthodes. Par ailleurs et surtout, il est très fréquent de manipuler des variables non contrôlées directement, mais assez bien corrélées avec l'une au moins des variables contrôlées, auquel cas le programme P1 devrait pouvoir approcher les précisions dues à la régression. Cependant, et cela est à l'avantage de P1, les coefficients de régression utilisés ici ont été calculés sur l'ensembles des 55 ou des 61 cantons de la région. Il s'agit donc de paramètres vrais optimaux issus d'une connaissance exhaustive que l'on a jamais en pratique (par définition). L'argument majeur à ce niveau est encore une fois qu'avec nos 3 cantons échantillonnés nous n'aurions jamais pu obtenir la moindre estimation de ces coefficients de régression! Au niveau théorique, pour de gros échantillons et sur les variables auxiliaires bien connues pour chaque individu, il n'en reste pas moins que l'estimateur par régression demeure imbattable de par sa construction même.

(b) Par rapport au tirage systématique et à la méthode de Sunter [algorithmes n'utilisant pas d'information auxiliaire autre que les tailles (lignes 7 et 8)], ainsi que par rapport au tirage stratifié qui intègre une information synthétique au travers de la première composante principale (ligne 9), l'amélioration apportée par les algorithmes d'optimisation est considérable.

On remarquera que le tirage systématique sur un fichier trié selon la taille donne tout de même de bons résultats: cela n'est pas surprenant, car ce type de tirage est à peu près équivalent à un tirage stratifié selon la taille.

(c) Comme prévu, le critère (5) favorise les variables à fort total, et on voit que pour celles qui ont un total plutôt faible, on peut avoir intérêt à utiliser le critère (6) du type chi-deux pour obtenir des gains (surtout sensible sur INDUS). Par contre, le critère (7) qui accorde la même importance à chaque variable n'est presque jamais meilleur que le critère (6). La ligne 4 permet de voir que, sans dégrader nettement la qualité des estimations des variables autres que INDUS, on peut compenser presque totalement la complication du ratio ou de la régression par un tirage d'échantillon auquel on affecte directement des probabilités bien choisies: dans les deux cas, la population totale PENQ est estimée de façon parfaite ou presque parfaite.

(d) Une constante, ou une variable peu dispersée (par «continuité») sont aussi bien voire mieux estimées par P1, P2, P3 que par un tirage systématique simple sur fichier trié ou que par un tirage selon l'algorithme de Sunter (sur un fichier lui aussi trié selon la taille). Le schéma optimum est, dans ce cas, une stratification selon un critère corrélé à la taille. Il n'est pas surprenant d'obtenir des précisions très médiocres sur des variables à faible variance dans la population avec les programmes P1, P2 et P3 puisque les critères déterminant la composition des échantillons ne font intervenir que des variables assez corrélées à la taille. On peut constater qu'il n'est pas rare que l'échantillon comprenne une petite unité, une moyenne et une grosse. Un tirage parfaitement équilibré sur la constante vérifierait:

$$\frac{1}{\bar{T}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i \in s} \frac{1}{T_i}, \qquad \forall s \in S2$$

ce qui se produit plus facilement avec une telle structure d'échantillon. Cette condition pourrait d'ailleurs être utilisée comme critère de sélection dans (2), sachant qu'alors, d'après l'inégalité de Jensen, l'échantillon serait constitué d'unités dont la taille moyenne deviendrait supérieure à celle que l'on rencontre dans l'ensemble de la population.

(e) Les probabilités de tirage $p(s)$ issues de P1, P2 et P3 sont sans corrélation avec la valeur du critère $C(s)$. Cela tient encore à la composition des échantillons: les $p(s)$ sont soumis à de fortes contraintes pour respecter les probabilités d'inclusion, alors que la qualité des échantillons a peu de rapport avec la taille des unités qui les constituent.

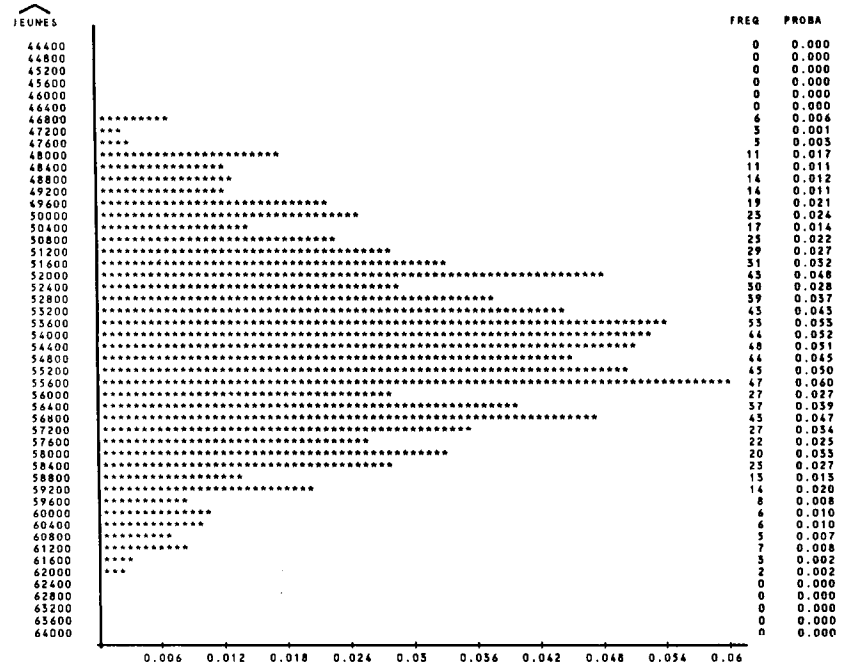
(f) Les programmes P2 et P3 sont équivalents, avec une légère supériorité pour P2 (malgré la mise à zéro d'autorité des $p(s)$ négatifs). Ces deux programmes donnent des résultats moins satisfaisants que ceux de la méthode du simplexe; en ce qui concerne la constante, l'amélioration qu'ils apportent est négligeable. Ce résultat est logique pour les variables liées à la taille, mais plus surprenant pour les variables peu dispersées.

(g) Pour les variables non prises en compte dans le critère et médiocrement corrélées avec la taille, le critère (5) du simplexe est presque toujours à conseiller.

(h) Pour les programmes P2 et P3, les estimateurs $\hat{X}(s)$ ont une distribution d'allure symétrique (figure 1). Pour P1, cette question est moins

FIGURE 1

Loi de l'estimateur JEUNES (programmation minimax).



Rappel : La vraie valeur est 54352.

pertinente : le nombre d'échantillons vérifiant $p(s)>0$ est égal à la taille de la population, car on se situe sur un sommet du convexe formé par les contraintes. Le tableau 3 fournit un exemple d'échantillons possibles et de leurs estimateurs associés. Les valeurs extrêmes sont en gras. En un certain sens, on peut dire que P1 conduit à la constitution d'échantillons d'unités-types selon un plan de sondage rigoureusement aléatoire.

(i) L'influence des seuils $l(x)$ et du nombre maximum d'échantillons demandés est assez faible. On peut prendre conscience de l'imprécision attachée aux tirages non équilibrés en constatant que la sélection d'échantillons constituant S2 devient impossible si tous les seuils sont amenés à 10 % en RG74, ou à 15 % uniformément en RG93. Si, par contre, les seuils sont augmentés, on ne gagne rien, et la liste S2 n'est pas modifiée : en effet, les échantillons correspondant à des $C(s)$ faibles sont aussi ceux qui ont des biais relatifs faibles au sens de (2). On peut même constater qu'en limitant la taille de S2 à 500, on ne perd globalement presque rien sur une taille limite de 2 000, et que, pour certaines variables, la première situation est même préférable. Lorsqu'on utilise P2, on obtient presque systématiquement une dégradation des coefficients de variations lorsqu'on admet davantage d'échantillons (seuils fixés).

TABLEAU 3

Échantillons ayant une probabilité non nulle d'être tirés

NUM 1	NUM 2	NUM 3	AGRI	JEUNES	CADR	ACTIF	INDUS	MIGR	NRESSEC	OUVR	POPBAC	VIEUX	PENQ	POPULA	PROBA
18	41	46	30332	54872	14859	102779	20473	63749	28415	47123	705	88637	259998	51	0.0025
10	18	35	32603	52753	13877	103638	19241	65773	29907	45746	951	90903	260748	62	0.0161
10	35	38	33008	54520	14617	103280	16659	64784	27538	44636	985	86752	261078	58	0.0247
3	17	54	31451	55692	14896	103293	17466	66517	28125	45823	1268	80272	259517	65	0.0054
7	18	33	33200	53546	14830	103307	15531	65130	27929	45733	940	89141	261525	69	0.0190
17	41	46	32595	55150	15643	103533	17702	63814	28373	43855	972	85313	259348	51	0.0169
26	27	32	30497	52803	15551	102754	20932	65377	29863	41131	1203	91122	258759	56	0.0355
7	18	35	31726	55135	15020	103938	17478	63121	30914	45785	1141	86369	258797	68	0.0002
29	39	40	32448	54989	13456	101672	21650	66883	28518	45498	1007	80021	258636	52	0.0524
21	25	30	31296	52977	16063	103959	19982	64402	27714	46871	919	87645	260582	57	0.0237
13	44	54	31045	52893	16298	103678	18466	65280	28678	47568	1214	86500	260137	49	0.0385
33	46	55	33695	54654	15199	103669	14591	66589	27929	44451	690	86598	259063	42	0.0160
17	26	55	32113	53746	15200	100831	**23703**	65163	30102	44695	941	89125	258045	51	0.0166
8	15	54	32671	55877	14104	102025	15487	62332	29489	44348	1294	81389	258973	62	0.0014
19	38	48	32388	55370	15575	102938	22701	67049	27533	47325	1017	85037	259028	50	0.0347
18	30	35	31766	54220	1363	103687	20815	61993	30816	47068	1030	88652	259678	57	0.0016
18	40	49	32851	55665	12948	101719	23175	67011	27856	46220	526	84484	258618	50	0.0081
11	31	50	32199	57287	13960	102494	15377	6583	27562	47180	875	84860	260029	55	0.0067
12	28	45	31770	54298	13624	102247	12632	66046	30255	42773	1469	86221	259232	56	0.0098
7	19	27	32727	52101	14975	103504	15907	62744	30244	45580	1204	87395	257661	69	0.0138
15	36	53	31567	51203	14251	103242	15513	62718	29325	44960	1464	86638	260923	52	0.0426
16	24	25	33304	51877	13348	101647	17491	63174	30687	46532	563	85923	258502	60	0.0138
4	45	46	30655	32870	13333	105683	14719	62718	28230	45217	1079	86835	259370	58	0.0319
8	48	54	32186	52807	15082	103627	19521	61568	27617	45657	1254	85294	258033	53	0.0034
32	46	51	33326	55634	15407	104161	17165	65084	29390	44206	1114	84282	256564	44	0.0009
24	31	47	35126	56364	14187	102339	16746	65645	28627	45230	628	84452	261589	51	0.0310
39	47	55	31857	51679	14081	101023	21482	64831	28385	45473	651	86241	256951	40	0.0075
45	49	53	**28681**	53152	12460	101222	16424	64303	28125	46043	909	88707	260407	39	0.0040
28	49	55	32230	54523	13908	101146	18024	68535	27136	46028	818	88095	260008	42	0.0425
30	33	35	34346	54101	13545	103933	14192	62747	28311	44697	1154	83921	256578	54	0.0141
34	36	55	31831	54380	14941	104527	17443	61756	31926	45571	1244	83091	258271	45	0.0147
17	43	47	31013	50835	14860	101230	20888	65579	27176	45945	1128	90587	258413	50	0.0070
22	32	50	33113	56428	14260	104049	15575	65471	29684	46402	1592	81524	255828	51	0.0176
14	50	52	28976	55071	14990	102351	16922	63715	27470	48736	1465	84610	258390	48	0.0179
25	41	52	31668	52459	**16428**	103077	16026	67294	26007	45576	1209	85861	259935	48	0.0141
24	45	51	33984	57412	12497	105127	16879	65947	29804	46958	879	82445	259413	45	0.0030
5	12	50	33267	54876	**12184**	102264	14465	63708	31608	44468	1499	82202	262570	68	0.0320
24	27	31	31914	55534	14531	**99224**	16140	65384	31187	44121	**529**	85991	258260	57	0.0030
33	45	51	32011	56125	12319	100607	11989	62918	26761	43624	1092	86451	259372	44	0.0056
30	34	49	32052	52351	13400	103126	21424	64660	29102	46769	747	82819	255059	49	0.0143
9	48	54	29384	54029	15441	101341	19351	63387	**32960**	47537	1027	85558	259251	52	0.0361
50	51	52	31467	54816	14560	104565	19880	66142	**25857**	49916	1255	84403	258912	**37**	0.0013
23	45	52	30193	52078	14611	104109	14600	67206	31453	46028	1269	90720	262955	45	0.0177
20	44	51	34382	56494	12403	99375	17573	65624	26809	44845	962	82190	261390	46	0.0320
8	31	52	33450	51123	15632	100283	14576	67405	28049	41976	1086	84641	259670	59	0.0132
16	43	51	33563	**50530**	12771	99747	19983	66022	26452	45199	788	**92662**	258728	49	0.0318
8	20	52	33935	58201	13086	101055	14441	67893	29237	44508	1352	80297	262233	60	0.0171
6	41	47	32720	51269	12936	100630	**10828**	67196	31774	43454	**1926**	87921	262546	60	0.0273
6	49	51	29734	55968	12328	101623	18623	**69409**	30662	47813	1744	81336	262442	56	0.0056
3	14	37	30840	57465	15347	106743	16871	61069	27151	46785	723	74897	256276	72	0.0257
11	42	53	29187	54608	14470	107090	13574	59235	29239	48159	1162	83952	258882	52	0.0349
22	23	37	30750	55775	15068	107162	19676	**58712**	29798	47850	847	80725	260599	56	0.0329
2	13	46	**36400**	57044	13155	99865	14143	64315	30170	**40996**	1079	86478	260259	69	0.0039
2	34	43	34322	57873	12451	100009	18067	68204	28048	44457	1101	85902	**264174**	65	0.0267
1	21	42	31115	**58551**	14887	**109274**	18175	59901	32372	**50305**	821	**72871**	**254553**	**73**	0.0267
Vrais totaux REGION 74*			32064	54352	14300	102964	17580	64680	28990	45904	1072	85044	259684	55	–

* Source: RP 82.

(j) Du point de vue pratique, la constitution des échantillons représentant les individus proportionnellement à leur taille a l'intérêt de faire ressortir ceux qui contribuent le plus à la variance: il suffit pour cela de mesurer l'écart entre le nombre d'échanillons prévus contenant l'individu et le nombre effectivement présent. En RG93, par exemple, le canton 0404 devrait être présent dans 311 échantillons sur les 2000 demandés. En réalité, seulement 21 le contiennent; il est facile de voir que ce décalage est dû au

taux anormalement fort de résidences secondaires, et, dans ce cas, le tirage proportionnel à la taille en nombre de logements n'est pas recommandé. Outre l'aspect opérationnel du système, nous avons constaté que, si on se limite à une simple liste d'échantillons triés par critère $C(s)$ croissant, l'ensemble des $p(s)$ vérifiant les contraintes est très fréquemment vide : il en ressort qu'il est impossible dans ce cas de réaliser un tirage proportionnel à la taille (quelque soit l'algorithme utilisé) qui garantisse une représentativité « optimale » au sens de (2); autrement dit, il est nécessaire d'autoriser un certain nombre d'échantillons peu satisfaisants si on s'en tient à cette méthode de tirage.

(k) Il n'y a pas de relation entre la taille de l'individu et la qualité des échantillons dans lesquels il apparaît; en RG93, où les tailles sont fortement dispersées, les petites unités se trouvent même en majorité dans les échantillons les plus équilibrés.

(l) Pour de nombreux couples (i, j), on a :

$$\mathbf{P}_{ij} = 0,$$

ce qui interdit malheureusement toute estimation sans biais de la variance. Ce résultat est directement issu du mode de constitution des échantillons, où on génère volontairement des effets de grappe. La mise en œuvre d'algorithmes autorisant toutes les associations 2 à 2 d'individus ne permet pas d'éviter des « catastrophes » avec l'estimateur des sommes dilatées. On peut donc voir l'absence d'estimateur de variance comme le prix à payer pour se protéger de regroupements malencontreux au sein du même échantillon. Cependant, le problème de la présence des $\mathbf{P}_{ij}$ nuls devrait s'atténuer lorsque la taille de l'échantillon augmente.

On peut enfin noter que la connaissance que nous avons des $p(s)$ nous permet de calculer les probabilités d'inclusion à n'importe quel ordre, ce que très peu d'algorithmes autorisent.

On peut donc dire, en résumé, qu'au sein d'une classe de méthodes d'échantillonnage *a priori* favorables à l'estimation de totaux de variables assez bien corrélées à la probabilité d'inclusion, on peut réaliser, avec les trois techniques précédentes, des gains de variance importants approchant ceux qui résultent d'une estimation par régression. L'avantage est aussi de pouvoir utiliser un estimateur sans biais d'une grande simplicité et des méthodes de programmation standards, sans dégrader les estimations de totaux de variables peu liées à la taille, mais en contrepartie sans pouvoir estimer la variance. Sauf si la configuration initiale des données se caractérise par la présence d'unités très atypiques, auquel cas les estimateurs seront de toute façon très imprécis compte tenu des tailles d'échantillons envisagées ici, le calcul des probabilités optimales attachées à des échantillons représentatifs est possible à moindre coût, et donne lieu à des estimateurs d'allure Gaussienne.

Pour pouvoir réaliser automatiquement la méthode du simplexe P1, il existe une procédure informatique sur l'ordinateur IBM 3090-200 E de l'INSEE qui traite l'ensemble des opérations en un temps inférieur à 3 minutes dès lors qu'il y a moins de 426 010 combinaisons à examiner si

la taille de l'échantillon est 4 ou moins, ou qu'il y a moins de 294 930 combinaisons à examiner si la taille de l'échantillon est supérieure à 4. Au-delà de ces limites, on retient les 65 540 meilleurs échantillons parmi les 426 010 (ou 294 930) premiers générés, et, grâce à une recherche dichotomique, on insère éventuellement les échantillons de rang supérieur parmi les 65 540 meilleurs. Tous ces seuils numériques résultent d'un compromis optimum entre taille occupée et temps consommé. On a donc, à chaque instant, les meilleurs échantillons en mémoire centrale en limitant constamment la taille des tableaux manipulés.

La contrepartie réside dans le temps CPU consommé, qui augmente très vite dès lors qu'il y a davantage d'échantillons à insérer (la génération proprement dite est très peu coûteuse, mais la recherche dichotomique l'est beaucoup). On relève, par exemple :

- $n=4$, $N=58$ ou $n=6$, $N=26$, ou $n=7$, $N=23$: quelques secondes CPU,
- $n=7$, $N=25$ avec 20 905 insertions : 8 minutes et 2 secondes CPU,
- $n=7$, $N=26$ avec 42 675 insertions : 16 minutes, 27 secondes CPU.

4 Extensions

• Utilisation de coefficients de régression

Connaissant les coefficients de régression B_k de Y sur les X^k, on peut tenir compte de cette information dans le critère lui-même. Si :

$$Y_i = \sum_{k=1}^{K} B_k . X_i^k + U_i, \qquad E(U_i) = 0, \qquad V(U_i) = \sigma^2$$

on résout P1 avec :

$$C(s) = \sum_{k=1}^{K} B_k^2 . (\hat{X}^k(s) - X^k)^2 + 2 . \sum_{k<k'}^{K} B_k . B_{k'} . (\hat{X}^k(s) - X^k) . (\hat{X}^{k'}(s) - X^{k'}).$$

En RG93, sur les 4 variables JEUNES, CADR, PENQ et VIEUX, on obtient les coefficients de variation respectifs : 3,93 %, 9,50 %, 1,54 % et 11,57 %. Il peut donc y avoir amélioration du critère, mais la connaissance des B_k nous fait toujours privilégier l'estimateur par la régression.

• Estimation de variance

Pour limiter le cas des P_{ij} nuls, nous avons essayé d'augmenter les seuils et le nombre d'échantillons autorisés. Ce type de tentative est un échec car il existe encore trop d'associations dont le biais selon (2) est fort, voire très fort (du moins pour une faible taille d'échantillon). En modifiant l'algorithme de façon à sélectionner un maximum de couples (i,j), on peut diminuer assez nettement le nombre de P_{ij} nuls. Dans ce cas, sans détériorer beaucoup les coefficients de variation, de plus en plus d'échantillons fournissent des estimateurs de variance positifs proches des vraies variances. Il subsiste encore malgré tout de nombreux cas d'estimateurs négatifs, même avec des seuils $l(x)$ de 50 % :

Comme :

$$V = \sum_{\substack{i,\, j/P_{ij}>0 \\ i<j}} (P_i P_j - P_{ij}) \left(\frac{Y_i}{P_i} - \frac{Y_j}{P_j} \right)^2 + \sum_{\substack{i,\, j/P_{ij}=0 \\ i<j}} P_i P_j \cdot \left(\frac{Y_i}{P_i} - \frac{Y_j}{P_j} \right)^2$$

on estime sans biais :

$$V - \sum_{\substack{i,\, j/P_{ij}=0 \\ i<j}} P_i P_j \cdot \left(\frac{Y_i}{P_i} - \frac{Y_j}{P_j} \right)^2$$

La présence d'estimateurs négatifs peut s'expliquer par le fait que les couples (i, j) pour lesquels P_{ij} est nul sont précisément ceux pour lesquels

$$\left(\frac{Y_i}{P_i} - \frac{Y_j}{P_j} \right)^2$$

est grand.

• Cas d'une population trop nombreuse

Si la taille de la population est trop importante, il est envisageable de former, par k tirages systématiques de PAS égal à k sur le fichier trié par taille, et dont les premières unités respectives seraient $1, 2, \ldots, k$, k sous-populations de taille N/k qui aient une structure voisine par construction. Les procédés précédents pourraient être appliqués sur chacune des sous-populations au niveau seulement de la génération des échantillons et du calcul du critère. On contournerait ainsi la principale difficulté actuelle qui réside dans l'impossibilité de traiter en une seule fois un trop grand nombre d'échantillons. Les k listes seraient ensuite fusionnées, et l'optimisation réalisée normalement avec les contraintes habituelles. Il ne fait aucun doute que l'on obtienne ainsi une liste de $p(s)$ optimisés, mais la perte éventuelle d'efficacité par rapport à la génération d'échantillons sur l'ensemble de la population reste à mesurer.

• Application au tirage de deux échantillons

Les critères P1, P2 et P3 pourraient être utilisés pour déterminer un plan de sondage lié, par exemple, au problème suivant : on veut déterminer deux échantillons-maître disjoints dans une même population, de façon à pouvoir considérer que les deux échantillons de tailles respectives n et m sont tirés proportionnellement à la taille. On aimerait, autant que possible, que les unités respectives des deux échantillons ne soient pas trop distantes géographiquement, à la fois au sein du premier échantillon et d'un échantillon à l'autre.

On veut déterminer $p(s_1)$, probabilité de tirage de l'échantillon s_1 constituant le premier échantillon-maître parmi une liste d'échantillons possibles $S2(a)$ contrôlés selon les critères déjà vus auxquels on rajoute une mesure de proximité géographique entre les unités primaires de s_1. Pour chaque s_1 envisageable, on décide de retenir, pour le 2e échantillon-maître, l'unité i n'appartenant pas à s_1 avec la probabilité conditionnelle $P(i|s_1)$. Si X_i est la taille de l'unité primaire i, les contraintes sont :

$$\sum_{s1 \in S2(a)} p(s_1).P(i|s_1) = m.\frac{X_i}{X}, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\sum_{\substack{s1 \in S2(a) \\ i \in s1}} p(s_1) = n.\frac{X_i}{X}, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N} P(i|s_1) = m, \qquad \forall s_1 \in S2(a)$$

Étant donnée une mesure de proximité $d(i, s_1)$ de chaque unité primaire i à s_1, on pose :

$$\forall i, \forall s_1 : P(i|s_1) = \frac{\lambda(s_1)}{d(i, s_1)} . \mathbf{1}_{[i \notin s_1]}$$

Si $C(s_1)$ est un des critères précédemment utilisés, on peut résoudre :

$$\text{Min} \sum_{s_1 \in S2(a)} p(s_1).C(s_1)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{s_1 \ni i \\ s_1 \in S2}} p(s_1) = n.\frac{X_i}{X}, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ \displaystyle\sum_{\substack{s_1 \ni i \\ s_1 \in S2(a)}} p(s_1).\frac{\lambda(s_1)}{d(i, s_1)} = m.\frac{X_i}{X}, & \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ i \notin s_1}} \frac{\lambda(s_1)}{d(i, s_1)} = m, & \forall s_1 \in S2(a) \\ 0 \leqslant p(s_1), & \forall s_1 \in S2(a) \end{cases}$$

La 3e contrainte d'égalité ne sert qu'à déterminer $\lambda(s_1)$, et l'ensemble des contraintes d'égalité reste linéaire en $p(s_1)$ avec 2 N équations.

• Références bibliographiques

ARDILLY, P. (1989). – « Principe de tirage des enquêtes-ménages en France entre 1984 et 1992 », *STATECO*.

BREWER, K. R. W. et HANIF, N. (1983). – *Unequal Probability Sampling*, Springer-Verlag.

CIARLET, P. G. (1985). – « Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation », Masson.

COCHRAN, W. (1977). – *Sampling Techniques*, J. Wiley, New York.

CONNOR, W. S. (1966). – « An Exact Formula for the Probability that two Specified Sampling Units will Occur in a Sample Drawn with Unequal Probabilities and Without Replacement, *JASA*, (61).

DEVILLE, J. C., GROSBRAS, J. M. et ROTH N. (1988). – « Efficient Sampling Algorithms and Balanced Samples », *Compstat*.

DEVILLE, J. C. et SARNDAL, C. E. (1990). – « Estimateurs par calage et technique de ratissage généralisé pour les enquêtes par sondage », soumis à *JASA*.

GOURIÉROUX, C. (1981). – « Théorie des sondages », *Economica*.

GROSBRAS, J. M. (1987). – Méthodes statistiques des sondages, *Economica*.

HAJEK, K. J. (1981). – « Sampling from a finite population », *Dekker*.

HARTLEY, H. O. et RAO, J. N. K. (1962). – « Sampling with Unequal Probabilities and Without Replacement », *Annals of Mathematical Statistics*, (33).

ROYALL, R. et HERSON, J. (1973). – « Robust Estimation in Finite Populations », *JASA*, (68).

SUNTER, A. B. (1986). – « Solutions to the problem of unequal probability sampling without replacement », *Inst. Statist. Revue*, (54).