ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 23 — 1991

Ressources épuisables et substitut

Gilles ROTILLON *

RÉSUMÉ. – Nous étudions un modèle de ressource épuisable avec un substitut qui n'est pas une « backstop technology ». Nous nous intéressons essentiellement à la politique optimale de consommation dont nous montrons qu'elle suit une règle de Ramsey comme chez DASGUPTA et HEAL [1974] dans leur article séminal sur ce sujet, mais avec un taux d'actualisation qui n'est pas toujours plus élevé que celui du cas sans substitut. Nous interprétons et commentons ce résultat.

Exhaustible Resources and Substitute

ABSTRACT. – We study a model with an exhaustible resource and a substitute which is not a backstop technology. We focuse our attention on the optimal policy of consumption which is described by a Ramsey's rule as in the seminal paper of DASGUPTA and HEAL [1974] but with a discount rate which is not always larger than the discount rate in the case without substitute. We interpret and comment this result.

* G. ROTILLON : Université Paris X-Nanterre. Je tiens à remercier Philippe Michel, Philippe Crabbe, Pierre Lasserre ainsi que les deux referees des Annales pour leurs remarques sur des versions préliminaires de ce texte. Selon la formule consacrée, je reste seul responsable des erreurs éventuelles.

1 Introduction

L'économie des ressources épuisables, initiée par Hotelling [1931], du moins sous sa forme moderne, a connu dans les quinze dernières années de nombreux développements et suscite encore de multiples recherches. Le livre de Dasgupta et Heal [1979] en est une première synthèse. Dans un premier temps, les économistes se sont surtout intéressés à la gestion d'un stock donné d'une ressource épuisable sous divers critères de décision et des structures de marché variées. Parmi ceux-ci, on peut citer Stiglitz [1974*a*, 1974*b*, 1976], Solow [1974], Sweeny [1977], Hartwick [1978], Cremer [1979], ou Dasgupta et Stiglitz [1982].

Mais la prise de conscience du caractère épuisable d'une ressource naturelle amène très vite à se poser la question de son remplacement.

A priori, deux solutions, non exclusives l'une de l'autre, sont envisageables. La première, étudiée, entre autres, par Arrow et Chang [1980], Desmukh et Pliska [1980], Pindyck [1980] ou, plus récemment, par Quyen [1988], consiste à mener une activité d'exploration pour découvrir de nouveaux stocks de ressource. Cependant, elle ne règle pas le problème de l'épuisabilité de la ressource et ne fait que le repousser. La seconde, quant à elle, consiste à développer un substitut à la ressource en investissant dans la recherche-développement (R-D). Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons uniquement à cette seconde approche que nous allons aborder dans une première partie en présentant rapidement l'état de la littérature sur le sujet.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons à la question de la gestion d'un stock d'une ressource épuisable, sachant qu'à une date T aléatoire, un substitut à la ressource sera disponible. On sait que la règle de gestion dégagée par les économistes ayant étudié ce problème est une « règle de Ramsey » faisant intervenir un taux d'actualisation supérieur à celui de l'économie et ce d'autant plus que la probabilité d'apparition du substitut est plus grande. Toutefois, et celà quel que soit le mode de traitement de la R-D (exogène ou endogène), ce résultat est obtenu sous l'hypothèse extrêmement forte que la nouvelle technologie disponible en T rend obsolète les stocks de ressource et, surtout, de capital à cette date.

C'est cette hypothèse que nous relaxons dans la suite de ce papier en considérant que le substitut consiste en une technologie nouvelle qui, si elle permet de se passer de la ressource, ne peut pas se passer du capital déjà accumulé dans l'économie. Autrement dit, dans notre approche, la découverte du substitut se résume à une nouvelle fonction de production qui prend en compte le capital restant dans l'économie à la date T, ce qui revient à endogénéiser la fonction valeur qui résume l'économie « post-substitut ». On montre alors que la consommation suit toujours une « règle de Ramsey » mais qui va dépendre de la comparaison entre l'utilité marginale de la consommation et le prix implicite du capital en T. On peut alors caractériser la consommation optimale en fonction de la date et de la probabilité d'apparition du substitut et la comparer avec les résultats classiques.

2 Substitut et ressource épuisable dans la théorie économique

En première approximation, on peut distinguer deux grandes lignes de recherche sur les rapports entre ressource épuisable et substitut.

L'une, concerne la mise en place d'une recherche-développement qui aboutit à une innovation technologique et s'interroge sur le rythme de la R-D en faisant la distinction entre la date d'invention du substitut et la date de sa mise en service, dite date d'innovation. Sur ce thème, on peut citer DASGUPTA [1981], DASGUPTA et STIGLITZ [1981 *a*] ou DIRICKS et KOK [1982], mais aussi DASGUPTA, GILBERT et STIGLITZ [1983] qui étudient l'effet d'un progrès technique endogène sur l'allocation de la ressource sous différentes structures de marché ou HUNG et QUYEN [1989 *a*] qui prolongent un modèle de DASGUPTA et STIGLITZ [1981 *b*] où la date de mise à disposition de la nouvelle technologie était aléatoire en considérant une R-D endogène.

L'autre, s'intéresse surtout à la croissance optimale dans des modèles intégrant ressource épuisable et R-D et c'est dans cette ligne que nous allons maintenant nous situer.

Le premier travail ayant abordé cette question est celui de DASGUPTA et HEAL [1974] et comme il a ensuite servi de cadre de référence à de nombreux autres travaux, nous le présenterons en détail.

Dans ce modèle, l'économie considérée possède à l'instant initial un bien composite K_0 (le «capital») et un stock d'une ressource épuisable S_0. La production $F(K(t), R(t))$ sert à la consommation $C(t)$ et à l'investissement $\dot{K}(t)$, $R(t)$ désignant le taux d'extraction de la ressource. Jusqu'en T, date d'apparition du substitut, l'économie est soumise aux contraintes habituelles d'évolution des stocks de capital et de ressource.

(1) $$\dot{K}(t)=F(K(t), R(t))-C(t) \qquad K(0)=K_0$$

(2) $$\dot{S}(t)=-R(t) \qquad S(0)=S_0.$$

Après T, un substitut est disponible qui produit un flux de service constant à un taux M. La fonction de production est maintenant $G(K(t), Z(t))$ où $Z(t)$ est le taux d'utilisation du service à la date t. On suppose en outre que le substitut est un substitut parfait, c'est-à-dire que le stock constitué à partir du flux M vient s'ajouter au stock de ressources restant en T, l'équation d'évolution du substitut est donc:

(3) $$\dot{V}(t)=M-Z(t) \qquad \text{pour} \quad t \geqslant T \text{ avec } V(T)=S(T).$$

Quant à l'évolution du capital après T, on aura:

(4) $$\dot{K}(t)=G(K(t), Z(t))-C(t) \qquad K(T)\,\text{donné}.$$

T est un nombre aléatoire avec une fonction de densité de probabilité $\pi(t)>0$ connue. On suppose enfin que la ressource ne peut pas être épuisée avant T.

L'objectif est la maximisation de l'espérance mathématique de l'utilité U(.) actualisée de la consommation.

Soit W(K(T), V(T)) le maximum de la valeur de l'utilité actualisée de la consommation après T sous les contraintes (3) et (4). On a alors, en notant E l'opérateur espérance mathématique:

$$E\int_0^\infty e^{-\delta t}\,U(C(t))\,dt$$

$$=\int_0^\infty \pi(T)\left[\int_0^T e^{-\delta t}\,U(C(t)\,dt+W(K(T),\,V(T))\,e^{-\delta t}\right]dT.$$

En posant $\Omega(t)=\displaystyle\int_t^\infty \pi(s)\,ds$ et en intégrant par parties le membre de droite de l'égalité précédente, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}[U(C(t))\,\Omega(t)+\pi(t)\,W(K(t),V(t))]\,dt. \tag{5}$$

Le problème posé consiste alors à maximiser (5) sous les contraintes (1) et (2) avec $V(T)=S(T)$.

On notera qu'en fait on ne détermine la politique optimale que jusqu'à T puisque ensuite on obtient W(K(T), V(T)) qui n'est guère spécifié. Cette façon de considérer le problème est commune à toute la littérature sur la question et c'est elle que nous reconsidèrerons dans la deuxième partie.

Si on note $\Phi(t)=\pi(t)/\Omega(t)$ la densité conditionnelle que le substitut soit découvert en t sachant qu'il ne l'a pas été avant, F'(K) la productivité marginale du capital, U'(C) l'utilité marginale de la consommation et $\Theta(C)$ son élasticité, enfin W'(K) la dérivée par rapport au capital de la fonction valeur de l'économie après T, [1] le profil de la consommation optimale est donnée par

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{F'(K)-\delta+\Phi(t)\,[(W'(K)-U'(C))/U'(C)]}{\Theta(C)}. \tag{6}$$

A ce stade, et devant la difficulté d'interprétation de (6), mais au prix d'un véritable changement de modèle par rapport au modèle initial du substitut parfait, [2] Dasgupta et Heal font l'hypothèse qu'en T, **les stocks existants de capital et de ressource ont une valeur nulle**. Ils reconnaissent eux-mêmes le caractère extrêmement fort de cette hypothèse, mais ils la justifient sur

1. Ce qui n'est autre que le prix implicite du capital à cet instant.
2. Je tiens à remercier un référé de la revue pour cette remarque qui montre que ce n'est pas la difficulté de résolution du modèle initial qui explique cette hypothèse mais bien la conception même du substitut.

l'exemple de l'énergie nucléaire rendant très rapidement dépassée la production d'électricité à partir de produits pétroliers. [3]

Il s'ensuit que $W'(K)=W'(S)=0$ et on peut réécrire (6)

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{F'(K)-(\delta+\Phi(t))}{\Theta(C)}. \tag{7}$$

On retrouve ainsi la classique règle de Ramsey où le taux d'actualisation δ est remplacé par $\delta+\Phi(t)$. Ainsi, la politique optimale consiste à supposer que le substitut n'apparaîtra jamais et à gérer le stock de ressource en utilisant un taux d'actualisation plus élevé, ce qui traduit bien l'incertitude quant à la date d'arrivée du substitut.

Ce modèle a connu de nombreux prolongements parmi lesquels on peut citer HEAL [1979] et plus particulièrement ceux qui endogénéisent l'arrivée du substitut tels les modèles de DASGUPTA, HEAL et MAJUMDAR [1977] KAMIEN et SCHWARTZ [1978] ou DAVISON [1978]. Dans ce cas, l'investissement en R-D permet d'améliorer la probabilité de découverte du substitut. Sur des questions semblables mais avec des approches légèrement différentes il faut aussi mentionner VOUSDEN [1975] et RILEY [1977]. En fait, cette amélioration du traitement de la R-D ne modifie pas qualitativement les résultats. Non seulement ces modèles obtiennent des règles de RAMSEY pour l'évolution de la consommation très semblables à celle que nous avons présentée ci-dessus, [4] mais ces règles sont toujours obtenues à partir de la même hypothèse sur la valeur nulle des stocks de capital et de ressource en T.

Et ce qui finalement justifie cette hypothèse, au-delà de l'exemple donné par DASGUPTA et HEAL concernant le nucléaire, c'est la conception même du substitut comme technologie de substitution (« backstop technology ») et du processus de R-D. C'est ce que GUESNERIE et TIROLE [1985] appellent « l'innovation comme course au trésor ». En effet, dans tous ces modèles, on ne se préoccupe pas de ce qui se passe après T. Or, l'examen de l'équation (6) [5] montre que l'évolution de la consommation dépend du rapport entre le prix implicite du capital $W'(K)$ une fois la technologie disponible et l'utilité marginale de la consommation $U'(C)$. Cette comparaison est ainsi beaucoup plus importante que la distinction entre R-D endogène et exogène puisque le résultat obtenu dans les deux cas est qualitativement le même. [6] C'est cet examen que nous allons entreprendre maintenant dans la seconde partie.

---

3. Donné en 1974 cet argument pouvait peut-être avoir quelque poids, ce n'est évidemment plus le cas aujourd'hui.
4. Voir ROTILLON [1987] pour une présentation plus détaillée de ces modèles.
5. Et on pourrait faire la même constatation à propos des modèles qui endogénéisent le substitut.
6. Taux d'actualisation supérieur à δ et règle de Ramsey pour la consommation.

3 Un modèle de substitut à une ressource épuisable

Afin de permettre les comparaisons avec les résultats présentés ci-dessus, nous allons reprendre le même cadre analytique mais sans faire l'hypothèse que le substitut est une « backstop technology ». Plus précisément, nous supposons que le substitut est une technologie nouvelle qui, si elle permet de se passer de ressource, ne permet pas de se passer de capital. Autrement dit, la découverte du substitut se résume à une nouvelle fonction de production $G(K(t))$ qui prend en compte le capital restant dans l'économie à la date T. De plus, nous considérons ici une R-D exogène dans la mesure où son endogénéisation ne modifie pas substantiellement les résultats obtenus.

Notre modèle est donc le suivant :

$$\max_{C,R} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}[U(C(t))\Omega(t)+\pi(t)W(K(t))]\,dt$$

$$\dot{K}=F(K(t),R(t))-C(t) \qquad K(0)=K_0$$

$$\dot{S}=-R(t) \qquad S(0)=S_0$$

$$S(t)\geqslant 0$$

où $W(.)$ est la fonction valeur de l'économie après l'utilisation du substitut,[7] c'est-à-dire la solution du programme :

$$\max_{C} \int_T^{\infty} U(C(t)e^{-\delta(t-T)}\,dt$$

$$\dot{K}=G(K(t))-C(t) \qquad K(T)=K_T.$$

On notera que la fonction valeur de l'économie « post-substitut » ne dépend plus que du capital puisque la ressource est devenue inutile avec l'apparition de la nouvelle technologie. Celà étant, on ne peut plus poser $W'(K)=0$ dans l'équation (6) qui détermine le taux de croissance de la consommation avant l'arrivée du substitut et on est obligé de discuter suivant les valeurs respectives de l'utilité marginale de la consommation et du prix implicite du capital à l'instant du passage au substitut.

Posons alors $\tau_t=\delta+\mu[1-W'(K(t))/U'(C(t))]$, ce qui permet d'écrire l'équation (6)

(8) $$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{[F'(K)-\tau_t]}{\Theta}.$$

7. Nous ne distinguons pas dans ce modèle entre la découverte du substitut et son utilisation.

On a de nouveau une règle de Ramsey pour l'évolution de la consommation avec un « taux d'actualisation » τ_t.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, ce taux d'actualisation sera inférieur à δ ou compris entre δ et $\delta+\mu$ selon que l'utilité marginale de la consommation sera inférieure ou supérieure au prix implicite du capital.

Mais d'autre part, le prix implicite du capital de l'économie post-substitut est égal, à l'optimum, à l'utilité marginale de la consommation. Un écart entre ce prix implicite et l'utilité marginale de la consommation dans l'économie sans substitut indique donc un saut du niveau de la consommation au moment du passage au substitut.

Puisque nous ne faisons pas l'hypothèse d'une « backstop technology », on voit donc que la description de la trajectoire de consommation optimale nécessite de comparer l'utilité marginale de la consommation $U'(C)$ avec $W'(K)$ le prix implicite du capital de l'économie « post-substitut ».

Toutefois, sous cette forme très générale, il est difficile d'avoir des résultats explicites, aussi allons nous spécifier notre modèle en posant :

$U(C(t)) = -1/2(C(t)-C^*)^2$ où C^* est une norme de consommation désirée [8]

$$F(K(t), R(t)) = aK(t) + bR(t)$$
$$G(K(t)) = \beta K(t)$$

et $\pi(t) = \mu e^{-\mu t}$ d'où $\Omega(t) = e^{-\mu t}$.

On suppose en outre que $\delta < \beta$ et que $K_0 < K^*$ avec $K^* = C^*/\beta$. La première hypothèse est nécessaire pour obtenir l'expression de la fonction valeur de l'économie « post-substitut » donnée ci-dessous. [9] La seconde hypothèse quant à elle, garde un intérêt économique au problème « post-substitut » dans la mesure où $K_0 > K^*$ donnerait une consommation optimale égale à C^* à chaque instant après la découverte du substitut (*voir* annexe A), ce qui serait une autre façon de retrouver la « backstop technology » que nous critiquions plus haut.

Enfin, on impose que le stock de capital initial K_0 soit supérieur à $(\beta-\delta)K^*/(2\beta-\delta)$. Sous cette condition, on montre dans l'annexe D que la fonction valeur de l'économie après T s'écrit :

$$W(K(T)) = \frac{1}{2}(\delta - 2\beta)(K_T - K^*)^2. \tag{9}$$

En fait, la condition précédente est équivalente à

$$C^* \leqslant \beta(2\beta-\delta)K_0/(\beta-\delta) \tag{10}$$

8. En toute rigueur, nous devrions poser $C^* = C^*(t)$ et endogénéiser la norme de consommation. Il est évidemment difficile de justifier *a priori* la donnée d'une telle norme, si ce n'est que comme une simplification pour obtenir des résultats analytiques.

9. Le cas $\delta > \beta$ conduit à une expression plus complexe de la fonction valeur ce qui rend les calculs beaucoup plus lourds. Notre objectif dans ce travail est surtout de tester la robustesse du résultat standard sur le profil de consommation plutôt que de résoudre exhaustivement un modèle nécessairement réducteur.

et prend alors un sens économique. En effet, nous montrons dans l'annexe A que si la norme de consommation désirée C* est supérieure à la valeur limite donnée par (10), (et $\delta<\beta$), la consommation optimale sera nulle pendant un certain temps après la découverte du substitut. Connaissant les paramètres de l'économie, le planificateur peut donc toujours choisir C* pour que la relation (10) soit vérifiée.

Compte tenu de ces diverses spécifications notre modèle devient :

$$\underset{C,R}{\text{Max}} \int_0^{\infty} e^{-(\delta+\mu)t}\left[-\frac{1}{2}(C-C^*)^2+\frac{1}{2}\mu(\delta-2\beta)(K-K^*)^2\right]dt$$

$$\dot{K}=aK(t)+bR(t)-C(t) \qquad K(0)=K_0$$

$$\dot{S}=-R(t) \qquad S(0)=S_0$$

$$S(t)\geqslant 0$$

La résolution de ce problème est faite dans l'annexe B et va maintenant nous permettre de décrire la trajectoire de consommation optimale donnée par l'équation (6) ou (8).

On a vu que cette évolution dépendait de la valeur de τ_t, c'est-à-dire du rapport entre l'utilité marginale de la consommation et le prix implicite du capital.

Sous l'hypothèse que le substitut est une technologie plus performante que celle qui était primitivement disponible, c'est-à-dire qu'elle a une productivité marginale du capital ($=\beta$) supérieure à celle de la technologie initiale ($=a$),[10] nous montrons dans l'annexe B que l'utilité marginale de la consommation en t est égale à $\mu(2\beta-\delta)e^{-(\delta+\mu)t}K(t)/\beta$, tandis que le prix implicite du capital de l'économie « post-substitut » est $(2\beta-\delta)(K^*-K(t))$ si le substitut est disponible en t.
On aura donc $U'(C(t))<W'(K(t))$ si et seulement si :

(11) $$(\mu e^{-(\delta+\mu)t}+\beta)K(t)<\beta K^* \text{ soit } \Gamma(t)<\beta K^*$$

On montre dans l'annexe E que $\Gamma(t)$ est une fonction décroissante de t et que $\Gamma(\infty)<\beta K^*$, l'inégalité (11) sera donc vérifiée pour tout t ou pas selon que $\Gamma(0)$ sera inférieur ou pas à βK^*.
Or, $\Gamma(0)=(\mu+\beta)K_0$, par conséquent $\Gamma(0)<\beta K^*$ est équivalent à

(12) $$\mu<\beta(K^*/K_0-1) \text{ soit } \mu<\mu^*.$$

Ainsi, si $\mu<\mu^*$ l'utilité marginale de la consommation sera toujours inférieure au prix implicite du capital au moment de l'utilisation du substitut.

En revanche, si $\mu>\mu^*$, on a $\Gamma(0)>\beta K^*$ et $\Gamma(\infty)<\beta K^*$, il existe une date T*, définie par $\Gamma(T^*)=\beta K^*$ telle que si le substitut arrive avant $T^*(T<T^*)$ l'utilité marginale de la consommation sera supérieure au prix implicite du capital avant T, alors que ce sera l'inverse si le substitut arrive après $T^*(T>T^*)$.

10. Très précisément, nous supposons que $\beta>2(a+1)$.

On remarquera que pour la valeur particulière μ^*, on a $T^*=0$ ce qui permet d'interpréter μ^* comme la probabilité que le substitut soit disponible immédiatement.

Par conséquent, le taux d'actualisation τ_t sera inférieur à δ ou compris entre δ et $\delta+\mu$ selon la position de μ par rapport à μ^* et celle de l'utilité marginale de la consommation par rapport au prix implicite du capital. Ce que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous :

	$\mu<\mu^*$	$\mu>\mu^*$
$T<T^*$	$\tau_t<\delta$	$\delta<\tau_t<\delta+\mu$
$T>T^*$	$\tau_t<\delta$	$\tau_t<\delta$

- **Cas $\mu>\mu^*$**

Il existe donc une date charnière T^* qui nous donnera des trajectoires de consommation différentes selon que la technologie apparaîtra avant ou après T^*.

Si la technologie apparaît avant T^* :

L'utilité marginale de la consommation sera supérieure au prix implicite du capital de l'économie « post-substitut », on aura donc un niveau de consommation qui va monter de façon discontinue au moment du passage au substitut. Quant au taux de croissance de la consommation, il sera égal à :

$$(13) \qquad [F'(K(t))-\tau_t]/\Theta \qquad \text{avec} \quad \delta<\tau_t<\delta+\mu.$$

Dans cette situation, la probabilité de disposer de la technologie nouvelle est « élevée » et celle-ci est effectivement disponible « rapidement ». La consommation évolue donc moins vite que dans le cas standard[11] de la gestion d'une ressource épuisable (à cause de l'incertitude) mais plus vite que dans celui étudié par Dasgupta et Heal à cause de l'existence en T d'un stock de capital utilisable qui réduit cette incertitude.

Si la technologie n'apparaît pas avant T^* :

Il se produit en T^* une inversion entre l'utilité marginale de la consommation et le prix implicite du capital de l'économie « post-substitut ». Avant T^*, le taux de croissance de la consommation est donné par (13), tandis que de T^* à T, date d'arrivée du substitut, il est donné par

$$(14) \qquad [F'(K(t))-\tau_t]/\Theta \qquad \text{avec} \quad \tau_t<\delta$$

Après T^*, la consommation évolue plus rapidement qu'avant, comme si la probabilité élevée de disposer du substitut et le fait qu'il n'ait pas encore été disponible rendait sa découverte imminente et permettait donc d'accroître la consommation avant cet événement. A l'arrivée du substitut, le niveau de consommation baisse brusquement puisque l'utilité marginale de la consommation de l'économie « post-substitut » (égale, rappelons-le, au prix

11. C'est-à-dire sans substitut et sans incertitude.

implicite du capital) est supérieure à l'utilité marginale de la consommation avant T.

• **Cas** $\mu < \mu^*$

Dans cette situation, la probabilité de disposer du substitut à un instant donné sachant qu'il n'a pas encore été découvert avant est « faible ». Il n'existe alors pas de date où l'on reconsidère les choix de consommation, celle-ci s'effectuant à un taux supérieur au cas sans substitut ce qui n'est pas *a priori* un résultat intuitif.[12] On peut cependant en proposer l'explication suivante : dans le cas présent, la faible probabilité de découverte instantanée du substitut, empêche de considérer qu'il existe une date charnière où le rythme de croissance de la consommation puisse être modifié, en revanche, la certitude d'obtenir le substitut et le fait qu'à ce moment le stock de capital restant permettra de poursuivre la croissance après T autorise un niveau de consommation plus élevé que dans le cas sans substitut où la contrainte d'épuisabilité de la ressource pèse finalement plus fortement. Dans ce cas, le niveau de consommation baisse brusquement au moment du passage au substitut. On peut résumer qualitativement l'ensemble des résultats précédents dans les graphiques de la page suivante.

4 Conclusion

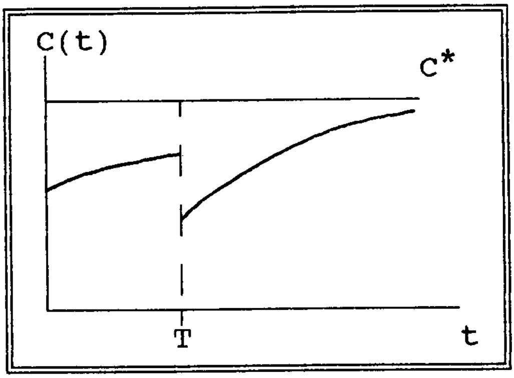
L'objectif essentiel de ce travail était de tester la robustesse de l'hypothèse de « backstop technology » faite habituellement lors de l'étude d'un modèle de gestion de ressource épuisable avec substitut à partir de l'examen des trajectoires de consommation.

Le résultat classique d'une consommation suivant une règle de Ramsey avec un taux d'actualisation d'autant plus élevé que l'incertitude sur la date d'arrivée du substitut est forte doit être relativisé.

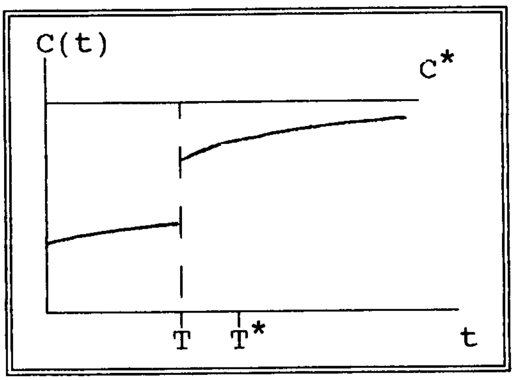
On a obtenu, en effet, des résultats nettement contrastés selon la probabilité instantanée d'apparition du substitut et sa date de disponibilité qui mettent en évidence le caractère extrême de l'hypothèse de « backstop technology » sur l'économie post-substitut. Ces résultats concernent aussi bien le rythme auquel évolue la consommation avant l'arrivée du substitut que son niveau au moment de cette arrivée. En particulier, nous avons mis en évidence le rôle d'une valeur critique μ^* de la densité conditionnelle d'apparition du substitut pour la reconsidération des choix de consommation avant l'arrivée du substitut. Si μ est inférieur à μ^*, il n'y a pas de date où l'on revoit la trajectoire de consommation et c'est l'inverse si μ est

12. On peut rapprocher ce résultat de celui obtenu par Hung et Quyen [1989 *b*] qui montrent que dans certains cas l'incertitude sur le processus de R-D induit un comportement moins conservateur qu'en situation de certitude.

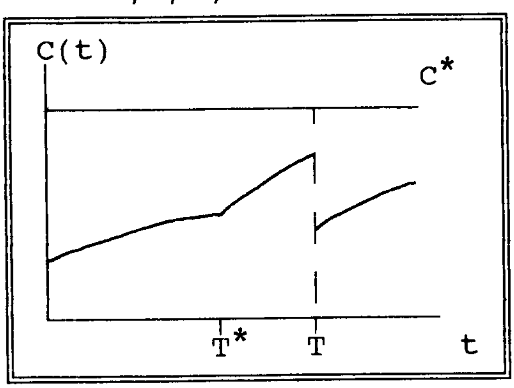
$\mu<\mu^*$



$\mu>\mu^*$, $T<T^*$



$\mu>\mu^*$, $T<T^*$



supérieur à μ^*. Pour la valeur particulière μ^*, cette date charnière est $T^* = 0$ ce qui permet d'interpréter μ^* comme la probabilité que le substitut soit disponible immédiatement.

De nombreux prolongements à ce travail sont envisageables. [13] Il resterait d'abord à le compléter pour caractériser complètement la solution de notre modèle, d'une part dans le cas $\delta < \beta$ et d'autre part pour étudier le profil d'extraction de la ressource. Dans le même cadre analytique, on pourrait aussi introduire la distinction entre invention et innovation, c'est-à-dire le moment où le substitut est découvert et celui où il est utilisé, ou encore l'activité d'exploration ou l'endogénéisation du substitut. Il nous semble toutefois que de tels prolongements, outre les complications techniques qu'ils induisent risquent d'être trop dépendants des spécifications retenues. [14] Aussi, serait-il sans doute utile de chercher à résoudre le problème de l'exploitation d'une ressource épuisable avec substitut dans un cadre plus général que celui que nous avons proposé, d'abord avec des spécifications différentes de celles que nous adoptées (par exemple en prenant une fonction CARA comme fonction d'utilité) et même, si possible, sans spécification particulière des fonctions d'utilité et de production. Il s'agit là d'une tâche dont les difficultés techniques sont très grandes mais dont le travail ci-dessus a montré la nécessité pour traiter de façon plus satisfaisante le problème d'une ressource épuisable avec substitut.

---

13. On peut aussi noter que notre modèle peut être utilisé sans référence particulière à la théorie des ressources épuisables pour analyser un changement de technologie en croissance optimale.

14. Quant aux modèles intégrant l'ensemble des problèmes soulevés par la gestion d'une ressource épuisable en incertitude, tel celui de CRABBE [1982], ils sont en général trop complexes pour être traités analytiquement.

Étude du modèle après T[15]

Ce modèle est en fait un modèle à un secteur avec un objectif de consommation désirée sous contrainte de l'évolution du capital. On note W(K(T)) la fonction valeur du problème (P) ci-dessous :

$$(P) \qquad \begin{array}{c} \max\limits_{C} \displaystyle\int_{T}^{\infty} -\frac{1}{2}(C-C^*)^2 e^{-\delta(t-T)}\,dt \\ \dot{K}=\beta K - C \qquad K(T)=K_T \\ C \geqslant 0, \qquad K \geqslant 0 \end{array}$$

En fait, comme le modèle est stationnaire, on peut l'étudier avec T=0. Le hamiltonien s'écrit :

$$H=-\frac{1}{2}(C-C^*)^2+p(\beta K - C)$$

où p est le prix implicite du capital, ce qui nous donne les conditions nécessaires suivantes :

$$-(\bar{C}-C^*)-p \leqslant 0 \qquad (=0 \text{ si } \bar{C} \geqslant 0) \tag{15}$$

$$\dot{p}=(\delta-\beta)p. \tag{16}$$

Montrons tout d'abord que l'on a nécessairement $p(t) \geqslant 0$ quel que soit t.

En effet, soit $\bar{C}>0$ et d'après (15) $p(t)=(C^*-\bar{C})>0$; soit $\bar{C}=0$ et toujours d'après (15) $p(t) \geqslant C^*>0$.

On en déduit que si $0 \leqslant p(t) \leqslant C^*$ on aura $\bar{C}(t)=C^*-p(t)$, tandis que si $p(t) \geqslant C^*$ on aura $\bar{C}(t)=0$. D'autre part, (16) implique que $p(t)$ est égal à $p_0 e^{(\delta-\beta)t}$

Comme $K_0<K^*=(C^*/\beta)$, on en déduit immédiatement que p_0 n'est pas nul.

Supposons alors que le stock initial de capital soit suffisamment élevé pour que $po \leqslant C^*$.

Puisque $\delta<\beta$, $p(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

On a donc $\bar{C}=C^*-p_0 e^{-(\beta-\delta)t}$ et d'après (16) :

$$\dot{K}=\beta K - C^* + p_0 e^{-(\beta-\delta)t} \tag{17}$$

15. Nous ne résolvons dans cette annexe que le problème répondant aux conditions sur β, δ, K_0 et C^* données dans le texte. Pour un traitement complet voir ROTILLON [1990].

La solution est de la forme $K(t) = ue^{\beta t} + v + we^{-(\beta-\delta)t}$. En différentiant cette expression et en identifiant avec (17) on obtient :

$$v = C^*/\beta, \qquad w = -p_0/(2\beta-\delta) \qquad \text{et} \qquad u+v+w = K_0.$$

Mais d'autre part la condition suffisante $\lim p(t)\,K(t) = 0$ quand t tend vers l'infini implique $u = 0$. On en déduit la valeur de p_0, soit $p_0 = (2\beta-\delta)(K^*-K_0)$.

Ceci n'est valable que si $p_0 \leqslant C^* = \beta K^*$ ou encore :

$$K_0 \geqslant (\beta-\delta)\,K^*/(2\beta-\delta) \tag{18}$$

qui est l'hypothèse faite dans le texte.
La consommation optimale est alors donnée par

$$\bar{C} = C^* - (2\beta-\delta)(K^*-K_0)\,e^{-(\beta-\delta)t}$$

En reportant cette expression dans la fonction objectif du problème (P), un calcul immédiat donne :

$$W(K_0) = (\delta - 2\beta)(K_0 - K^*)^2/2$$

qui est la formule utilisée dans le texte avec $K_0 = K_T$.

Détermination de la fonction valeur du problème global

On notera $\bar{W}(K, S)$ cette fonction valeur qui est la solution du problème ci-dessous où on a posé $\sigma = \mu(\delta - 2\beta)$ et $r = \delta + \mu$

$$\underset{C,R}{\mathrm{Max}} \int_0^\infty e^{-rt}\left[-\frac{1}{2}(C - C^*)^2 + (\sigma/2)(K - K^*)^2\right] dt$$

$$\dot{K} = aK + bR - C \qquad K(0) = K_0$$

$$\dot{S} = -R \qquad S(0) = S_0$$

$$\lim S(t) \geqslant 0 \text{ quand } t \text{ tend vers l'infini.}$$

L'équation de Bellman s'écrit :

$$-re^{-rt}\bar{W} = \underset{C,R}{\mathrm{Max}} \left\{ e^{-rt}\left[-\frac{1}{2}(C - C^*)^2 + (\sigma/2)(K - K^*)^2\right] + \bar{W}_K(aK + bR - C) - \bar{W}_S R \right\}$$

où $\bar{W}_K$ et $\bar{W}_S$ désignent respectivement les dérivées partielles de $\bar{W}(K, S)$.

La maximisation du second membre implique

(19) $$\bar{W}_K = -(C - C^*)e^{-rt}$$

et

(20) $$\bar{W}_S = b\bar{W}_K.$$

En les reportant dans l'équation de Bellman et après avoir posé $\bar{V}(K, S) = e^{rt}\bar{W}(K, S)$, $\bar{V}_K = e^{rt}\bar{W}_K$ et simplifié par e^{-rt} on obtient :
$$-re^{-rt}\bar{V}(K, S) = \frac{1}{2}(\bar{V}_K)^2 + \bar{V}_K(aK - C^*) + (\sigma/2)(K - K^*)^2.$$
On peut alors considérer une fonction valeur quadratique de la forme $\bar{V}(K, S) = uK^2 + vS^2 + w$ et en déduire par identification les coefficients u, v et w. On obtient le système ci-dessous :

(i) $-rwe^{-rt} = \sigma(K^*)^2/2$

(ii) $2uC^* + \sigma K^* = 0$

(iii) $-re^{-rt}(u + (bu)^2/v) = 2u(a + u) + \sigma/2$

(i) détermine w, $u = -\sigma/2\beta$ d'après (ii) et on peut alors utiliser (iii) pour calculer v.

Nous nous intéressons essentiellement à la comparaison entre l'utilité marginale de la consommation en T avec le prix implicite du capital dans l'économie « post-substitut ».

La première est égale à $\bar{W}_K$ d'après (19) et le second est égal à $W'(K(T))$, dérivée par rapport à K de la fonction valeur de l'économie après T. On a donc

$$\bar{W}_K = e^{-rT}\,\bar{V}_K = e^{-rT}(2uK) = -\sigma e^{-rT} K/\beta = [\mu(2\beta-\delta)/\beta]\, e^{-(\delta+\mu)T} K(T)$$

et, compte tenu de l'expression de la fonction valeur calculée dans l'annexe A

$$W'(K(T)) = (K(T) - K^*)(\delta - 2\beta)$$

Calcul de K (t)

Notre propos dans cette annexe est d'intégrer l'équation d'évolution du capital

$$(21) \qquad \dot{K} = aK + bR - C$$

On a vu dans l'annexe B que la fonction valeur $\bar{W}(K(t), S(t))$ pouvait s'écrire sous la forme $uK^2 + vS^2 + w$. En tenant compte de la relation (20) on en déduit que $S = ubK/v$, d'où

$$(22) \qquad R = -\dot{S} = -ub\dot{K}/v$$

On sait aussi que $-(C - C^*) = 2uK$, soit $C = C^* - 2uK$, ce qui reporté dans (21) et en tenant compte de (22) nous donne l'équation d'évolution du capital.

$$(23) \qquad \dot{K} = [(a + 2u)K - C^*]/(1 + ub^2/v)$$

En divisant par u la relation (iii) de l'annexe B on obtient

$$(24) \qquad 1 + ub^2/v = [(\beta - 2(a+u))/r]\,e^{rt}$$

Ce qui, reporté dans (23) donne

$$(25) \qquad \dot{K} = [(a + 2u)K - C^*]\,re^{-rt}/[\beta - 2(a+u)]$$

Cette équation différentielle est de la forme $\dot{K} = (gK - h)e^{-rt}$, avec $g = r(a + 2u)/[\beta - 2(a+u)]$, $h = rC^*/[\beta - 2(a+u)]$ et $u = -\sigma/2\beta$. Elle a pour solution

$$(26) \qquad K(t) = (K_0 - h/g)\exp(g(1 - e^{-rt})/r) + h/g$$

Il en résulte que $dK(t)/dt = (gK_0 - h)\exp[(g(1 - e^{-rt})/r) - rt]$, c'est-à-dire que l'évolution du capital dépend du signe de $gK_0 - h$.

Or $gK_0 - h = r[(a + 2u)K_0 - \beta K^*]/(\beta - 2(a+u)) < 0$ du fait qu $K_0 < K^*$ et sous l'hypothèse $\beta > 2(a+u)$.
La seconde inégalité est vérifiée dès que $\beta > 2(a+1)$ qui est l'hypothèse faite dans le texte sur la plus grande efficacité de la technologie après T. [16]

Par conséquent, $dK(t)/dt < 0$ quel que soit t.

16. On a $u = -\sigma/2\beta = \mu(1 - \delta/2\beta)$; donc $u < \mu$ (puisque $\delta < \beta$) et
$$\beta > 2(a+1) > 2(a+\mu) > 2(a+u).$$

Justification de la fonction valeur « post-substitut »

On a vu dans l'annexe A que la fonction valeur de l'économie « post-substitut » avait l'expression donnée dans le texte si et seulement si

(27) $$K(T) > (\beta - \delta) K^*/(2\beta - \delta).$$

Cette condition sera évidemment vérifiée quel que soit T si elle est vérifiée par la limite de K (t) quand t tend vers l'infini puisque K (t) est une fonction décroissante de t.

Compte tenu de l'expression de K (t) calculée dans l'annexe C, cette dernière condition s'écrit :

(28) $$(K_0 - h/g) e^{g/r} + h/g > (\beta - \delta) K^*/(2\beta - \delta).$$

Ou encore

(29) $$K_0 > [((\beta - \delta) K^*/(2\beta - \delta)) - h/g] e^{-g/r} + h/g$$

qui est trivialement vérifiée puisque $K_0 > (\beta - \delta) K^*/(2\beta - \delta)$.

Étude de Γ (t)

$\Gamma(t) = (\mu e^{-rt} + \beta) K(t)$, donc

$$\Gamma'(t) = (\mu e^{-rt} + \beta) dK/dt - \mu r e^{-rt} K(t) < 0$$

puisque $dK/dt < 0$ (voir Annexe C) ce qui montre que $\Gamma(t)$ est une fonction décroissante de t.

De plus, $\Gamma(\infty) = \beta[(K_0 - \beta K^*/(a+2u)) e^{g/r} + \beta K^*/(a+2u)]$
Donc $\Gamma(\infty) < \beta K^* \Leftrightarrow K^* > (K_0 - \beta K^*/(a+2u)) e^{g/r} + \beta K^*/(a+2u)$, ou encore, $e^{g/r}[(\beta K^*/(a+2u)) - K_0] - [(\beta K^*/(a+2u)) - K^*] > 0$.

Cette inégalité est vérifiée puisque $K_0 < K^* < \beta K^*/(a+2u)$ et que $e^{g/r} > 1$.

• Références bibliographiques

ARROW, K. et CHANG, S. (1980). – « Optimal pricing, use and Exploration of Uncertain Natural Resource Stocks », in *Dynamic Optimization in Mathematical Economics*, PAN-TAI LIU éd., Plenum Press.

CRABBE, P. (1982). – « Sources and Types of Uncertainty, Information and Control in Stochastic Economic Models of Non-Renewable Resources » in *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, G. FEICHTINGER éd., North-Holland.

CREMER, J. (1979). – «On Hotelling's Formula and the Use of Permanent Equipment in the Extraction of Natural Resources », *International Economic Review*, vol. 20 (2), pp. 317-324.

DASGUPTA, P. (1981) « Resource Pricing and Technological Innovations under Oligopoly: a Theoretical Exploration », *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 83 (2), pp. 289-317.

DASGUPTA, P. et HEAL, G. (1974). – « The Optimal Depletion of Exhaustible Resources » *Review of Economic Studies*, Symposium on the economics of exhaustible resources, pp. 3-28.

DASGUPTA, P. et HEAL, G. (1979) *Economic Theory and Exhaustible Resources*, Cambridge University Press.

DASGUPTA, P., HEAL, G. et MAJUMDAR, M. (1977). – « Resource Depletion and Research and Development », in *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. III B, M. INTRILIGATOR éd., North-Holland.

DASGUPTA, P., GILBERT, R. et STIGLITZ J. (1983). – « Strategic Considerations in Invention and Innovation : the Case of Natural Resources », *Econometrica*, vol. 51 (5), pp. 1439-1448.

DASGUPTA, P. et STIGLITZ, J. (1981 *a*). – « Market Structure and Resource Extraction under Uncertainty », *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 83 (2), pp. 318-333.

DASGUPTA, P. et STIGLITZ, J. (1981 *b*). – « Resource Depletion under Technological Uncertainty », *Econometrica*, vol. 49 (1), pp. 85-104.

DASGUPTA, P. et STIGLITZ, J. (1982). – « Market Structure and Resource Depletion : a Contribution to the Theory of Intertemporal Monopolistic Competition », *Journal of Economic Theory*, 28, pp. 128-164.

DAVISON, R. (1978). – « Optimal Depletion of an Exhaustible Resource with Research and Development Towards and Alternative Technology », *Review of Economic Studies*, XLV (2), n° 140, pp. 355-367.

DESMUKH, S. et PLISKA, S. (1980). – « Optimal Consumption and Exploration of Nonrevewable Resource under Uncertainty », *Econometrica*, vol. 48 (1), pp. 177-200.

DIRICKS, Y. et KOK, M. (1982). – « Resource Depletion and R-D Programs », in *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, G. FEICHTINGER éd., North-Holland.

GUÉSNERIE, R. et TIROLE, J. (1985). – « L'économie de la recherche-développement : Introduction à quelques travaux théoriques », *Revue Economique*, n° 5, p. 843-871

HARTWICK, J. (1978). – « Substitution among Exhaustible Resources and Intergenerational Equity », *Review of Economic Studies*, XLV (2), n° 140, pp. 347-354.

HEAL, G. (1979). – « Uncertainty and the Optimal Supply Policy for an Exhaustible Resource », in *Advances in the Economics of Energy and Resources*, Vol. 2, JAI Press.

HOTELLING, G. (1931). – « The Economic of Exhaustible Resources », *Journal of Political Economy*, 39, n° 1, pp. 137-175.

HUNG, N. M. et QUYEN, N. V. (1989*a*). – « On R & D Timing under Uncertainty : the Case of Exhaustible Resource Substitution », *Cahier de recherche* 8906 du Groupe de Recherche en Economie de l'Énergie et des Ressources Naturelles, Université de Laval.

HUNG, N. M. et QUYEN, N. V. (1989*b*). – « R & D Timing and Resource Depletion under Uncertainty », *Cahier de recherche* 9003 du Groupe de Recherche en Économie de l'Energie et des Ressources Naturelles, Université de Laval.

KAMIEN, M. et SCHWARTZ, N. (1978). – « Optimal Exhaustible Resource Depletion with Endogenous Technical Change », *Review of Economic Studies*, XLV (1), n° 139, pp. 179-196.

PINDYCK, R. (1980). – « Uncertainty and Exhaustible Resource Markets », *Journal of Political Economy*, 88 (6), pp. 1203-1225.

QUYEN, N. V. (1988). – « The Optimal Depletion and Exploration of a Non Revewable Resource », *Econometrica*, vol. 56, n° 6, pp. 1467-1471.

RILEY, J. (1977). – « Resource Depletion with Technological Uncertainty and the Rawlsian Fairness Principle », in *Natural Resources, Uncertainty, and General Equilibrium Systems*, Essays in Memory of Rafael Lusky, A. BLINDER & P. FRIEDMAN éd., Academic Press.

ROTILLON, G. (1987). – « Ressources épuisables et renouvellement : une revue des modèles stochastiques », *Cahiers du CEREVE*, n° 23, Université Paris-X-Nanterre.

ROTILLON, G. (1990). – « Ressources épuisables et substitut », communication aux 7ᵉ journées de microéconomie appliquée, Montréal.

SOLOW, R. (1974). – « Intergenerational Equity and Exhaustible Resources » *Review of Economic Studies*, Symposium on the economics of exhaustible resources.

STIGLITZ, J. (1974 *a*). — « Growth with exhaustible natural resources : efficient and optimal growth paths », *Review of Economic Studies*, Symposium on the economics of exhaustible resources, pp. 123-137.

STIGLITZ, J. (1974 *b*). — « Growth with exhaustible natural resources : competitive growth paths », *Review of Economic Studies*, Symposium on the economics of exhaustible resources, pp. 139-152.

STIGLITZ, J. (1976). — « Monopoly and the rate of extraction of exhaustible resources », *American Economic Review*, vol. 66, n° 4, pp. 655-661

SWEENY, J. (1977). — « Economics of Depletable Resources : Market Forces and Intertemporal Bias », *Review of Economic Studies*, XLIV (1), n° 136, pp. 125-141.

VOUSDEN, N. (1975). — « Resource Scarcity and the Availability of Substitutes : a Theoretical model » in *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. III B, M. INTRILIGATOR éd., North-holland.