ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 19 — 1990

La fonction de demande de biens collectifs : théorie et application

Pierre-André CHIAPPORI *

RÉSUMÉ. – Cet article étudie la forme des fonctions de demande pour un bien public, lorsque la collectivité considérée prend toujours des décisions Pareto efficaces et que les distributions de revenus sont observables. On montre tout d'abord l'existence d'une relation de dualité entre ce problème et celui de la caractérisation de la demande agrégée d'une économie à biens privés. On en déduit un résultat général d'indétermination, qui s'applique notamment à l'analyse des fonctions d'offre de travail des ménages dans un cadre collectif.

Demand Function for Collective Goods: Theory and Application

ABSTRACT. – In this paper, I investigate the properties of the aggregate demand function for a collective good, when the collectivity takes Pareto-efficient decisions and income distributions are observable. A close duality relationship is shown to exist between this problem and the traditional problem of characterizing aggregate market demand for private goods. A general, indeterminacy result is derived, and is applied to the particular case of a collective model of household labour supply.

* P. A. CHIAPPORI : DELTA, unité mixte de recherche CNRS-ENS-EHESS, 48, boulevard Jourdan, 75014 Paris. L'auteur remercie l'éditeur et deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires. Les erreurs éventuelles restent propriété privée de l'auteur.

1 Introduction

La théorie du consommateur accorde une place essentielle à l'analyse des fonctions de demande : l'environnement économique étant caractérisé par un vecteur prix et un niveau de revenu; que peut-on prédire du comportement d'un agent individuel (techniquement, de sa fonction de demande) si l'on suppose simplement que celui ci se comporte comme un « consommateur rationnel », c'est-à-dire qu'il maximise une fonction d'utilité sous contrainte budgétaire? La réponse à ce problème est bien connue : on dispose de différents jeux de conditions nécessaires et suffisantes (axiome fort des préférences révélées, ou homogénéité + loi de Walras + relations de Slutsky) caractérisant les propriétés de telles fonctions.

Cependant, dans la réalité économique, de nombreuses décisions sont le fait, non d'agents individuels, mais de *collectivités*, de toutes tailles et de toutes natures. Ce sera généralement le cas, par exemple, lorsque les décisions portent sur l'achat de biens ayant un caractère public, au sens de la théorie du bien être. L'objet du présent article est d'étendre la question précédente à de telles structures : que prévoit la théorie économique quant aux décisions d'une collectivité, et plus précisément quant à la façon dont ces décisions répondent à des modifications des paramètres économiques pertinents (prix, revenus)?

Cette formulation recouvre une gamme d'applications particulières. On peut penser, d'une part, aux échanges économiques internationaux, dans la mesure où ceux-ci sont le fait d'entités collectives (états, régions, . . .) et non individuelles (entreprises, ménages). Au niveau immédiatement inférieur, l'étude des comportements de collectivités locales (provinces, municipalités, . . .) relève de la même démarche. Cependant, la « collectivité » peut également être de taille beaucoup plus réduite. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons particulièrement au cas où la collectivité est un ménage formé de plusieurs individus. Traditionnellement, les économistes et économètres de la consommation traitent chaque ménage comme une « unité de consommation individuelle », caractérisée par une fonction d'utilité unique, et à laquelle l'analyse standard du consommateur individuel se transpose sans précaution particulière. La réalité, évidemment, est beaucoup plus complexe. Les ménages (personnes seules exceptées) sont formés d'individus différents; certains des biens consommés sont utilisés de façon privée par certains membres, d'autres ont au contraire un caractère de consommation collective. Dans cet article, nous nous intéressons à la question suivante : que deviennent les conclusions théoriques, si, au lieu d'accepter la fiction d'un consommateur unique, on reconnait le caractère collectif des décisions du ménage (et donc des modèles destinés à le représenter)?

La première tâche est évidemment de préciser les concepts théoriques à utiliser. La réponse ne va pas de soi, dans la mesure où, à la différence des actions individuelles, le comportement agrégé d'une collectivité est lui-même le résultat d'interactions diverses entre ses membres; en termes économiques, il est donc naturel de le modéliser comme une situation d'*équilibre* d'un certain processus de décision. Dans ce qui suit, nous supposerons que ce processus est de nature *coopérative;* en d'autres termes, les décisions prises seront systématiquement efficaces, au sens de Pareto. Cette hypothèse, cependant, n'est pas suffisante pour déterminer les comportements, puisqu'il existera toujours un continuum de décisions potentielles efficaces (et qui, de façon intuitive, différeront par les niveaux respectifs de « bien-être » ou de « richesse » auxquels elles correspondent pour les différents agents). Il est donc nécessaire, pour lever cette indétermination, soit de formuler des hypothèses supplémentaires sur le processus de négociation, qui permettent de préciser quel optimum sera retenu, soit, de façon plus brutale, de supposer connue la règle présidant à la répartition des surplus. Nous adopterons ici la seconde solution. Notre but est en effet de montrer que, dans le type de modèle considéré, la théorie n'apporte pratiquement aucune restriction sur la forme des fonctions de demande « collectives ». Nous établirons que cette conclusion est valide même dans le cas extrême où la répartition des surplus est parfaitement observable; elle le sera donc, *a fortiori*, lorsque la règle de partage est inconnue.

De façon précise, nous considérerons le problème suivant. Soit une économie à un bien privé Y (que l'on interprétera par exemple comme un bien composite Hicksien, et qui sera pris comme numéraire), et l biens publics $X_1, \ldots, X_l$ dont on connait les prix unitaires $p^1, \ldots, p^l$ supposés constants (techniquement, ces biens sont soit achetés, *en dehors* de la collectivité, sur un marché concurrentiel, soit produits par des technologies à rendements constants). Dans cette économie, une collectivité, formée de n agents, prend des décisions d'achat de biens publics; les ressources totales (en bien privé) de chaque agent sont $R^1, \ldots R^n$, et ceux-ci ne disposent initialement d'aucun bien public. Par exemple, la collectivité est en fait un ménage de n membres, qui disposent initialement de revenus $R^1, \ldots, R^n$ supposés observables. Parmi les biens consommés, certains sont destinés à l'usage exclusif de l'un des agents; d'autres, en revanche, sont consommés collectivement par le ménage, et constituent donc des biens publics au sein de la collectivité. Il est naturel de supposer que l'utilité de chaque membre i est fonction, d'une part de la consommation totale de chaque bien public, X_k, d'autre part de la part Y_i du revenu monétaire restant qui lui échoit (une justification précise de cette hypothèse sera donnée plus loin). Que peut-on dire de la *fonction de demande de biens publics* de cette collectivité (fonction qui a comme argument les prix p^j et les revenus R_i), si l'on suppose que la décision conduit systématiquement à un *équilibre de Lindahl* compatible avec la distribution initiale de richesse?

Dans cet article, nous concluons, nous l'avons dit, à l'indétermination du modèle : si le nombre de biens publics est suffisamment faible (au plus égal au nombre d'agents du ménage), et si, d'autre part, il n'y a pas libre disposition des biens publics, alors la théorie n'apporte aucune information empiriquement significative (et non triviale) sur les fonctions de demande étudiées. Ou, plus précisément : sous ces hypothèses, étant donné un ensemble fini d'observations sur les demandes de biens publics, les prix et la distribution des revenus vérifiant l'homogénéité et la loi de Walras, il existe, quel que soit $n \geqslant l$, une économie à n agents pour laquelle chaque observation correspond à un équilibre de Lindahl.

Cet énoncé n'est pas sans rappeler un domaine d'analyse plus classique de la microéconomie contemporaine, celui de la caractérisation des fonctions de demande agrégées dans une économie de biens privés. De fait, notre approche utilise l'existence d'une relation duale entre ces deux problèmes. Outre son intérêt propre, cette interprétation duale permet d'éclairer de façon nouvelle certains résultats connus. En particulier, si l'on sait caractériser les fonctions de *demande excédentaire* d'une économie à l biens et n agents (SONNENSCHEIN [1973], DEBREU [1974], DIEWERT [1977], GEANAKOPLOS et POLEMARCHAKIS [1980]), on ne connaît en revanche aucune condition nécessaire et suffisante sur les fonctions de demande. Les seuls résultats disponibles se heurtent aux contraintes de non négativité; techniquement, les décompositions en demandes individuelles sont en général possibles, mais risquent de conduire à des demandes négatives pour certains biens. Nous montrons ici que, par le biais de la transformation duale, les demandes négatives ont une interprétation naturelle en termes d'absence de libre disposition du bien public. En particulier, les résultats obtenus dans l'étude des fonctions de demande de biens privés – dont l'interprétation économique était peu convaincante, de par la présence de consommations négatives – ont une traduction beaucoup plus naturelle en termes de biens publics.

Enfin, cette conclusion a des conséquences intéressantes dans l'exemple, mentionné plus haut, de l'analyse du comportement des ménages. Elle s'interprète en effet de la façon suivante. Si l'on modélise le ménage comme une entité collective, *et si l'on suppose que les agents sont altruistes* (au sens où leur bien-être dépend aussi des consommations des autres membres), alors il peut être impossible de caractériser la fonction de demande résultante, même sous l'hypothèse (forte) que la répartition du revenu entre les agents est observable. On sait, par ailleurs (CHIAPPORI [1988a]), que cette conclusion n'est pas vraie pour des agents « égoïstes »; les résultats présentés ici apportent donc un élément intéressant au débat en cours sur la modélisation la plus appropriée du ménage comme « collectivité ». [1]

Le plan de l'article est le suivant. Dans une première partie, nous décrivons la technique de transformation duale du problème. La partie suivante dérive le résultat central d'indétermination. L'application à la modélisation du comportement des ménages est présentée dans la dernière partie.

2 Demande de bien public et dualité

Rappelons tout d'abord la définition exacte d'un *équilibre de Lindahl*. Il s'agit d'un système de prix individualisé (associé à une allocation de bien

1. Pour une présentation de ces débats, voir CHIAPPORI [1989].

privé) tel que les agents, soumis chacun aux prix qui lui correspondent, choisissent tous la même quantité de chaque bien public, et que ces quantités satisfassent de plus les contraintes de ressources. On sait que l'ensemble des équilibres de Lindahl coïncide avec l'ensemble des allocations Pareto efficaces.

Les considérations développées ci-dessus nous conduisent au problème suivant. Soit $\mathscr{P}$ un compact de prix et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une fonction donnée de $\mathscr{P}$ dans le simplexe S^{n-1} $(\lambda_i \geqslant 0, \Sigma \lambda_i = 1)$. Nous dirons qu'une fonction X :

$$\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{l+1}_+$$

$$(p, \mathrm{R}) = (p^1, \ldots, p^l, \mathrm{R}) \to \mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l, \mathrm{Y}),$$

satisfaisant la loi de Walras :

$$(\mathrm{W}) \forall (p^1, \ldots, p^l, \mathrm{R}), \quad \sum_{j=1}^{l} p^j \mathrm{X}_j (p^1, \ldots, p^l, \mathrm{R}) + \mathrm{Y} (p^1, \ldots, p^l, \mathrm{R}) \equiv \mathrm{R}$$

est une *fonction de demande collective rationnelle* (FDCR) s'il existe n fonctions d'utilité individuelles telle que, pour tout (p, R), les quantités $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l$ de biens publics, *associées à la répartition* $(\mathrm{Y}_1 = \lambda_1 \mathrm{Y}, \ldots, \mathrm{Y}_n = \lambda_n \mathrm{Y})$ du bien privé, soient Pareto optimales dans l'économie ainsi définie. La question initiale peut donc être formulée de la façon suivante : quelles sont les conséquences *empiriquement observables* qu'impose sur X le fait d'être la FDCR d'une économie?

Une condition évidente est l'homogénéité de X par rapport aux prix et revenus. Mais cette condition est déjà prise en compte de façon implicite dans l'énoncé, puisque le prix du bien privé a été fixé à l'unité; elle n'entraîne donc aucune restriction supplémentaire. Par ailleurs, nous supposerons dans ce qui suit que la fonction X est continuement différentiable.

Il est clair que toute solution du programme précédent peut être obtenue comme équilibre de Lindahl. Nous allons à présent donner une caractérisation de ces équilibres qui est duale de la caractérisation classique, au sens où elle fait intervenir les fonctions d'utilité indirecte des agents.

Plus précisément, chaque agent individuel i est caractérisé par des préférences portant sur les quantités de biens publics et sur son allocation Y_i du bien privé, préférences que nous décrirons par une fonction d'utilité *indirecte* $\tilde{\mathrm{V}}^i$. Comme le prix du bien privé a été fixé à 1, on considérera l'utilité indirecte « réduite » V^i définie par :

$$\mathrm{V}^i (p^1, \ldots, p^l, \mathrm{R}) = \tilde{\mathrm{V}}^i (p^1, \ldots, p^l, 1, \mathrm{R}).$$

$\tilde{\mathrm{V}}^i$ étant homogène, les préférences sont entièrement décrites par V^i. Sous les hypothèses habituelles, V^i est strictement croissante en R, décroissante en p, et quasi-convexe; on la supposera de plus continûment différentiable. Désignons par p^j_i le « *prix personnel* » du bien public j pour l'agent i (c'est-à-dire sa propension marginale à payer le bien j). La caractérisation qui nous sera utile par la suite est fournie par le lemme suivant :

LEMME 1 : A $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_l$ et $\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n$ donnés, les prix personnels $p_i^1, \ldots, p_i^l$ et le revenu R_i sont, pour tout équilibre de Lindahl, solutions du programme :

$$(1_i) \qquad \begin{cases} \operatorname{Min} V^i(p_i^1, \ldots, p_i^l, R_i) \\ p_i^1 \bar{X}_1 + \ldots + p_i^l \bar{X}_l + \bar{Y}_i \leqslant R_i. \end{cases}$$

Démonstration : On désigne par p_i le vecteur $(p_i^1, \ldots, p_i^l)$, par $\bar{X}$ le vecteur $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_l)$, et par $U^i(\bar{X}, \bar{Y}_i)$ l'utilité directe de l'agent i. Par définition des p_i^j, on a $U^i(\bar{X}, \bar{Y}_i) = V^i(p_i, R_i)$.

Si (p_i, R_i) n'était pas solution de (1), on pourrait trouver des prix p' et un revenu R' tels que :

$$V^i(p', R') < V^i(p_i, R_i)$$

et

$$p'\bar{X} + \bar{Y}_i \leqslant R'.$$

Mais la seconde équation dit qu'au prix p' et pour le revenu R', le vecteur $(\bar{X}, \bar{Y}_i)$ est compatible avec la contrainte budgétaire; on a donc nécessairement $V^i(p', R') \geqslant U^i(\bar{X}, \bar{Y}^i)$, d'où une contradiction. □

Ce résultat a diverses conséquences. Tout d'abord, la solution du programme (1) permet d'exprimer les prix personnels p_j^i et le revenu R_i en fonction des X_j et des Y_i :

$$(2) \qquad \begin{aligned} & p_i^j = f_i^j(X_1, \ldots, X_l, Y_i), \qquad j = 1, \ldots, l, \\ & \text{et} \\ & R_i = f_i^{l+1}(X_1, \ldots, X_l, Y_i). \end{aligned}$$

On peut noter que, quand i varie, les R_i vérifient bien la contrainte de revenu global :

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} R_i = R.$$

Par ailleurs, une condition nécessaire et suffisante d'efficacité Parétienne est donnée par les conditions de Bowen-Lindahl-Samuelson :

$$(4) \qquad \forall j = 1, \ldots, l, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i^j = p^j.$$

Le problème peut donc être énoncé de la façon suivante. Considérons un ensemble quelconque de données empiriques – c'est-à-dire un ensemble fini d'observations portant sur les prix des biens publics, les quantités consommées, et la distribution de la consommation privée entre les agents. On cherche sous quelles conditions existent n utilités indirectes $V_1, \ldots, V_n$, et n vecteurs $(p_i^1, \ldots, p_i^l)$ tels que, si l'agent i a un revenu $R_i = \lambda_i Y + \Sigma p_i^j X_j$, paie le prix unitaire p_i^j pour le bien collectif j, et conserve une quantité

$Y_i = \lambda_i Y$ de bien privé, on atteint un équilibre de Lindahl. Soit, formellement, le problème suivant :

PROBLÈME PRIMAL (P) : Étant données T observations $(X_1^t, \dots, X_l^t, Y^t, p^{1t}, \dots, p^{lt}, R^t)$, $t = 1$, T, satisfaisant la loi de Walras :

$$\sum_j p^{jt} X_j^t + Y^t = R^t$$

et T vecteurs $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)$, $t = 1$, T de S^{n-1}, trouver n utilités indirectes $V^1, \dots, V^n$ et $n \times (l+1)$ fonctions de demande réciproque $f_1^1, \dots, f_n^{l+1}$, solutions respectives de (1_i) pour $i = 1, \dots, n$, telles que

$$(5) \qquad \forall j = 1, \dots, l, \quad \sum_{i=1}^{n} f_i^j (X_1^t, \dots, X_l^t, \lambda_i^t Y^t) = p^{jt}.$$

On remarquera que, d'après les contraintes budgétaires, si les équations (5) sont vérifiées pour tout $j = 1, \dots, l$, alors en posant $R_i^t = \lambda_i^t Y^t + \sum_j p_i^{jt} X_j^t$ (R_i^t est le revenu « *initial* » ou « *virtuel* » de l'agent i), on a bien :

$$\sum_i R_i^t = R^t, \qquad t = 1, \dots, T.$$

Nous allons à présent décrire la transformation duale qui conduit à une réinterprétation importante de ce problème. L'idée de base est simple. On sait qu'il existe une correspondance biunivoque entre les économies à biens publics, d'une part, et les économies à biens privés d'autre part; il faut, en gros, réinterpréter les prix comme des quantités et les quantités comme des prix. Cette transformation, cependant, doit être construite de façon précise; c'est ce que nous allons faire ici.

Tout d'abord, on note K le revenu maximal admissible :

$$K = \sup \{\mathrm{Max}(\lambda_i Y^t, R_i^t), i = 1, n, t = 1, T\}.$$

Pour clarifier le passage primal/dual, il est utile d'adopter des notations différentes, en posant :

$$\varphi_i^j = p_i^j, \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, l$$
$$\varphi^j = p^j, \qquad j = 1, \dots, l$$
$$\pi_j = X_j, \qquad j = 1, \dots, l \quad \text{et} \quad \pi_{l+1} = 1$$
$$\varphi_i^{l+1} = K - R_i, \qquad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \varphi^{l+1} = nK - R$$
$$\rho_i = K - Y_i = K - \lambda_i Y, \qquad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \rho = nK - Y.$$

La loi de Walras s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{l} \pi_j \varphi^j + \varphi^{l=1} = \rho.$$

De plus, on peut noter que $0 \leqslant Y_i \leqslant R_i \leqslant K$ est équivalent à $0 \leqslant \varphi_i^{l+1} \leqslant \rho_i \leqslant K$.

Définissons à présent n fonctions U^i de $\mathbb{R}_1^{l+1}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$\forall a_1, \ldots, a_{l+1}, \quad U^i(a_1, \ldots, a_{l+1}) = -V^i(a_1, \ldots, a_l, K - a_{l+1}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Les U^i, en particulier, sont continûment différentiables, croissantes, et strictement quasi-concaves. Le programme (1_i) devient, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$(6_i) \qquad \begin{cases} \operatorname{Max} U^i(\varphi_i^1, \ldots, \varphi_i^l, \varphi_i^{l+1}) \\ \pi_1 \varphi_i^1 + \ldots + \pi_l \varphi_i^l + \varphi_i^{l+1} \leqslant \rho_i. \end{cases}$$

Si l'on note $\bar{\varphi}_i^j$ les fonctions de demande marshalliennes [2] correspondant à l'utilité U^i, la solution de ce programme est donnée par :

$$\varphi_i^j = \bar{\varphi}_i^j(\pi_1, \ldots, \pi_l, \rho_i)$$

et le problème primal (P) devient :

Problème dual (P*) : Étant données T observations $(\pi_1^t, \ldots, \pi_l^t, \rho^t; \varphi^{1,t}, \ldots, \varphi^{(l+1),t})$ satisfaisant la loi de Walras, et T distributions de revenus $(\rho_1^t, \ldots, \rho_n^t)$, $t = 1$, T, telles que $\sum_i \rho_i^t = \rho^t$ trouver n utilités directes $U^1, \ldots, U^n$ et $n \times (l+1)$ fonctions de demande marshalliennes $\bar{\varphi}_1^1, \ldots, \bar{\varphi}_n^{l+1}$, solutions respectives de (6_i) pour tout i, telles que :

$$\forall j = 1, \ldots, 1$$

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{\varphi}_i^j(\pi_1^t, \ldots, \pi_l^t, \rho_i^t) = \varphi^{j,t}(\pi_1^t, \ldots, \pi_l^t, \rho^t).$$

$$\forall t = 1, \ldots, T.$$

Il est clair qu'à toute solution de (P*), on peut, par la transformation décrite, associer une solution de (P), et réciproquement. Par ailleurs, le programme (P*) est très proche d'un problème classique, celui de la caractérisation de la demande agrégée d'une économie à $(l+1)$ biens et n consommateurs. La seule différence est que, dans ce dernier cas, on imposerait une contrainte supplémentaire, à savoir *la non-négativité des demandes individuelles;* techniquement, une décomposition (φ_i^j) ne serait admissible que si $\varphi_i^j \geqslant 0$ sur $\mathscr{P}$ pour tout couple (i, j). On sait, cependant, que ces restrictions engendrent des difficultés jusque-là insolubles. [3] En particulier, on dispose de contre exemples de demandes agrégées qui, quelque soit le nombre de consommateurs, ne peuvent pas se décomposer en somme de demandes

2. A nouveau, ces fonctions sont « *réduites* », au sens où le prix du bien $l+1$ est fixé à 1.
3. Pour une présentation générale, la référence incontournable est l'article de Shafer et Sonnenschein [1982].

individuelles; [4] et, de façon générale, on ne connaît aucune condition nécessaire et suffisante caractérisant les demandes agrégées sous contrainte de positivité.

Il est donc naturel de voir quelle serait, dans l'interprétation duale (P), la signification économique d'éventuelles contraintes de non-négativité. Pour cela, il suffit de remarquer qu'aux quantités dans (P*) sont associées dans (P) des prix individuels; la non-négativité revient donc à imposer que l'utilité marginale de biens collectifs soit toujours positive. Il est clair que cette hypothèse est directement liée à celle de libre disposition des biens publics. Si l'on suppose, en particulier, qu'il n'y a pas libre disposition, alors rien n'interdit que la présence d'un bien collectif diminue le bien-être de certains agents — ce qui se traduira par des prix individuels négatifs. Une conséquence importante est que toute conclusion qui ignore les contraintes de non-négativité, si elle n'a guère de sens dans le problème économique de départ (où elle conduirait à des *consommations* négatives), a en revanche une interprétation duale naturelle en termes de biens publics.

3 Caractérisation de la demande agrégée : résultat global

Le résultat suivant donne une solution du problème P*.

PROPOSITION 2 : Soit un ensemble fini d'observations portant sur T vecteurs prix π^t de $\mathbb{R}^l_{++}$, deux à deux différents, T vecteurs finis de demandes φ^t de $\mathbb{R}^{l+1}_{++}$, deux à deux différents, et T distributions de revenu $(\rho_1^t, \ldots, \rho_n^t)$ pour $n \geqslant (l+1)$, satisfaisant la loi de Walras. Alors, si l'on ignore les contraintes de non-négativité, il existe n fonctions d'utilité directe, strictement croissantes, fortement concaves, infiniment différentiables, dont les demandes marshalliennes vérifient la relation (7).

Démonstration : La démonstration est une adaptation d'arguments classiques dus à DEBREU [1974], MCFADDEN *et al.* [1974] et surtout ANDREU

4. Le contre-exemple le plus simple (SONNENSCHEIN [1973]) est le suivant. Pour tout individu i, supposons que le revenu soit égal à l'unité, et notons $x_i(p)$ la demande correspondant à ce revenu et au vecteur prix p. Cette dernière vérifie l'axiome des préférences révélées :

$$\forall p, p', \quad px_i(p') \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad p' x_i(p) > 1.$$

Donc, tout étant positif, $px_i(p')+p' x_i(p) > 1$; par agrégation, $p\mathrm{X}(p')+p'\mathrm{X}(p) > \mathrm{N}$, nombre d'agents. Mais la fonction $\mathrm{X}(p) = \frac{\mathrm{N}.p}{\|p\|^2}$ viole cette relation pour p, p' *« presque orthogonaux »*, et ne peut donc pas être une demande agrégée.

[1982]. Elle est donnée pour $n=l$; l'extension à $n>l$ est immédiate. Elle comprend deux étapes.

1. Montrons tout d'abord que l'on peut décomposer chaque demande agrégée φ^t en somme de $(l+1)$ demandes individuelles $\varphi_i^t (i=1, \ldots, l+1)$ qui vérifient la loi de Walras et l'axiome fort des préférences révélées.

Pour cela, on pose

$$\varphi_i^t = \left(\delta(\pi^t)\, \pi_i^t + \varphi^{i,t} - \rho^t \frac{\pi_i^t}{\|\pi^t\|^2} \right) \left(l^i - \pi_i^t \frac{\pi^t}{\|\pi^t\|^2} \right) + \rho_i^t \frac{\pi^t}{\|\pi^t\|^2}$$

où l^i est le i-ième vecteur de la base canonique, et $\delta(\pi)$ est une fonction arbitraire de π. Alors,

(i) On a bien une décomposition de φ^t; en effet, le vecteur $\sum\limits_i \varphi_i^t$ a pour j-ième composante :

$$\sum_i \varphi_i^{j,t} = \mathrm{B}_j(\pi^t) - \left(\sum_i \pi_i^t \mathrm{B}_i(\pi^t)\right) \frac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2} + \rho^t \frac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2}$$

où l'on a, pour simplifier, noté $\mathrm{B}_j(\pi^t) = \delta(\pi^t)\, \pi_j^t + \varphi^{j,t} - \rho^t \dfrac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2}$.

Mais

$$\sum_i \pi_i^t \mathrm{B}_i(\pi^t) = \sum_i (\pi_i^t)^2 . \delta(\pi^t) + \Sigma\, \pi_i^t \varphi^{i,t} - \rho^t \frac{\Sigma (\pi_i^t)^2}{\|\pi^t\|^2} = \|\pi^t\|^2 . \delta(\pi^t)$$

puisque φ^t vérifie la loi de Walras, et que $\Sigma (\pi_i^t)^2 = \|\pi^t\|^2$. Donc :

$$\sum_i \varphi_i^{j,t} = \delta(\pi^t)\, \pi_j^t + \varphi^{j,t} - \rho^t \frac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2} - \delta(\pi^t)\, \pi_j^t + \rho^t \frac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2} = \varphi^{j,t}.$$

(ii) La loi de Walras est satisfaite, car :

$$\pi^t . \varphi_i^t = \rho_i^t \frac{\pi^t . \pi^t}{\|\pi^t\|^2} = \rho_i^t \quad \text{puisque } \pi^t \left(l^i - \pi_i^t \frac{\pi^t}{\|\pi^t\|^2} \right) = 0.$$

(iii) Montrons enfin que l'on peut choisir δ de façon que, pour tout i, les (φ_i^t), $t=1$, T satisfassent l'axiome fort des préférences révélées (AFPR). Remarquons d'abord que, les π^t étant différents et en nombre fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

(8) $$\forall t \neq s, \quad \frac{\pi^t . \pi^s}{\|\pi^t\| . \|\pi^s\|} < (1-\varepsilon).$$

Par ailleurs,

$$\pi^t . \varphi_i^s = \mathrm{B}_i(\pi^s) . \pi_i^s \left(\frac{\pi_i^t}{\pi_i^s} - \frac{\pi^t . \pi^s}{\|\pi^s\|^2} \right) + \rho_i^s \frac{\pi^t . \pi^s}{\|\pi^s\|^2}.$$

Supposons que φ_i^t soit révélé préféré à φ_i^s : on aura $\pi^t . \varphi_i^s \leqslant \rho_i^t$, soit, après multiplication par $\|\pi^s\|/\|\pi^t\|$:

$$(9)\quad B_i(\pi^s).\pi_i^s\left(\frac{\pi_i^t}{\pi_i^s}\frac{\|\pi^s\|}{\|\pi^t\|}-\frac{\pi^t.\pi^s}{\|\pi^t\|.\|\pi^s\|}\right)+\rho_i^s\frac{\pi^t.\pi^s}{\|\pi^t\|.\|\pi^s\|}\leqslant\rho_i^t\frac{\|\pi^s\|}{\|\pi^t\|}.$$

Supposons à présent que l'AFPR soit violé : il existe alors un cycle tel que chaque φ_i soit révélé préféré au précédent. Sur ce cycle, considérons les rapports consécutifs de la forme $\frac{\pi_i^t}{\pi_i^s}.\frac{\|\pi^s\|}{\|\pi^t\|}$ (où t, s sont consécutifs dans le cycle). L'un au moins de ces rapports est supérieur ou égal à 1 (sinon le cycle ne se fermerait pas). Pour celui-là, on a donc :

$$\left(\frac{\pi_i^t}{\pi_i^s}\frac{\|\pi^s\|}{\|\pi^t\|}-\frac{\pi^t.\pi^s}{\|\pi^t\|.\|\pi^s\|}\right)>\varepsilon \quad \text{d'après (8).}$$

De plus, on peut toujours choisir $\delta(\pi)$ assez grand pour que $B_i(\pi^s)$ soit positif pour tous i et s. Alors (9) imposerait :

$$(10)\qquad B_i(\pi^t).\pi_i^s.\varepsilon\leqslant\frac{\|\pi^s\|}{\|\pi^t\|}\left(\rho_i^t-\rho_i^s\frac{\pi^t.\pi^s}{\|\pi^t\|.\|\pi^s\|}\right).$$

Mais on peut prendre δ assez grand pour que, quel que soit i, t et s, (10) ne soit jamais vérifiée. Dans ce cas, il ne peut pas y avoir de cycle, dont l'AFPR est vérifié.

2. Reste à montrer l'existence d'utilités ayant les propriétés indiquées; mais ceci découle directement de résultats classiques dans la littérature. Plus précisément, on peut montrer le résultat suivant (CHIAPPORI-ROCHET [1988]) : pour tout ensemble fini de données vérifiant l'axiome fort des préférences révélées, et telles que deux prix différents ne donnent jamais la même quantité, il existe une fonction d'utilité fortement quasi concave et infiniment différentiable qui rationalise ces données. □

Il est utile, à ce point, de faire une remarque sur les contraintes de non-négativité. La j-ième composante de x_i^t est égale à

$$-B_i(\pi^t).\frac{\pi_i^t\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2}+\rho_i^t\frac{\pi_j^t}{\|\pi^t\|^2}\qquad\text{si}\quad i\neq j,$$

et à :

$$B_i(\pi^t)\left(1-\frac{(\pi_i^t)^2}{\|\pi^t\|^2}\right)+\rho_i^t\frac{\pi_i^t}{\|\pi^t\|^2}\qquad\text{si}\quad i=j.$$

Comme B_i est « *grand* », la composante sera positive si $i=j$, mais peut être négative pour $j\neq i$. Comme nous l'avons dit, ceci pose problème dans l'interprétation en termes de demande de bien privé – une demande négative n'ayant guère de sens en général. En revanche, l'interprétation duale est beaucoup plus acceptable; plus précisément, la solution générale de (P) est donnée par :

COROLLAIRE 3 : Supposons qu'il n'y ait pas libre disposition des biens publics. Pour toute série finie d'observations sur les demandes de bien public, les prix et la distribution des revenus, il existe une économie à n agents ($n \geqslant l+1$) dont la demande rationnelle de bien public coïncide exactement avec les observations.

Démonstration : Il suffit de remarquer que x_i^t s'interprète alors comme un prix personnel qui, en l'absence de libre disponibilité, peut très bien être négatif.

4 Décision collective et offre de travail des ménages

Revenons à présent sur l'application, mentionnée plus haut, aux processus de décision des ménages. Selon l'approche traditionnelle, le ménage est caractérisé par une fonction d'utilité unique, qui est maximisée sous contrainte budgétaire. Cependant, cette représentation a suscité récemment de nombreuses critiques. Certains auteurs, en effet, [5] ont fait valoir que le ménage était en fait composé d'individus différents, ayant *a priori* chacun leurs propres préférences; dans ce contexte, les modèles à utilité unique, outre les problèmes méthodologiques qu'ils soulèvent, [6] omettent des aspects probablement majeurs, comme la répartition des ressources à l'intérieur du ménage ou l'effet différentié des réformes fiscales sur le bien-être de chaque membre. On a donc assisté au développement de nombreux modèles « collectifs », dans lesquels l'existence d'individus distincts est explicitement

5. Le premier auteur à proposer un modèle individualiste du ménage est BECKER [1973], [1974*a*], [1974*b*], [1981]. Parmi les contributions récentes, citons APPS [1981], [1982], APPS et JONES [1986], APPS et REES [1987], ASHWORTH et ULPH [1981], MANSER et BROWN [1980], MCELROY et HORNEY [1981], et surtout LAZEAR et MICHAEL [1986], [1988].

6. Un modèle à utilité unique contredit clairement l'individualisme méthodologique, qui est censé être le fondement de l'analyse micro-économique : on ne peut parler des « buts » (ou de « l'utilité ») d'un *groupe* d'individus (que celui-ci soit une nation, une classe sociale, une équipe ou un ménage) que si ces buts sont eux même *déduits préalablement* d'une analyse des comportements individuels à l'intérieur du groupe (cf. POPPER [1969], p. 341 : « *according to the holistic view, social wholes, such as nations, class, groups... are conceived as the empirical objects which the social sciences study, in the same way in which biology studies animals or plants. This view must be rejected as naive ... and has to be replaced by the demand that social phenomena, including collectives, should be analysed in terms of individuals and their actions and relations.* » De ce point de vue, supposer que l'aggrégation des préférences individuelles à l'intérieur du ménage, opérée on ne sait comment, conduise automatiquement à des demandes vérifiant la relation de Slutsky est une hypothèse parfaitement *ad hoc*.

prise en compte, et la décision est dérivée d'un processus de négociation à l'intérieur du ménage.

Les spécifications particulières retenues diffèrent sur de nombreux points. L'une des difficultés essentielles rencontrée par la littérature, et à laquelle diverses solutions ont été proposées, est en particulier la suivante. Faut-il supposer simplement l'efficacité (au sens parétien) des décisions des ménages, et tenter de déduire de cette hypothèse des restrictions testables sur les comportements, ou faut-il formuler des hypothèses supplémentaires sur les processus de négociation internes au ménage? Une discussion s'est développée sur ce point. Certains auteurs considèrent que seule l'hypothèse d'efficacité est suffisamment générale pour être acceptable, et que le recours à tel ou tel concept de jeu coopératif est trop *ad hoc* pour fournir des conclusions crédibles. D'autres, à l'inverse, font valoir que la seule hypothèse d'efficacité Parétienne ne permet pas de dériver les comportements des ménages, puisqu'il existe un continuum de décisions efficaces, qui diffèrent entre elles par les « poids » qu'elles accordent aux bien-être respectifs des différents agents. S'il était possible d'observer la répartition *ex post* du bien privé, on pourrait localiser, sur la frontière de Pareto, le point collectivement retenu; mais de telles données n'étant pas disponibles, il devient nécessaire de *déduire* cette localisation d'une axiomatique bien choisie.

Notre position – que le présent article tend au demeurant à défendre et illustrer – est qu'il s'agit là d'un problème mal posé. Le choix essentiel est en amont de ces questions; il concerne la structure même du modèle. Il est résumé par la question suivante : faut-il supposer les agents « altruistes », au sens où le bien être de chacun est affecté par toutes les consommations du ménage, ou au contraire « égoïstes », l'utilité d'un individu ne résultant alors que de ses propres consommations? De ce choix dépend en effet fondamentalement la capacité prédictive du modèle. Plus précisément, on a montré (Chiappori, [1988*a*], [1989]) que dans une formulation égoïste, l'hypothèse de Pareto, pour peu restrictive qu'elle soit, était largement suffisante. Elle permet non seulement de déduire des restrictions testables sur la forme des comportements, mais aussi de reconstituer, à partir de ceux-ci (résumés par exemple par une fonction de demande), les préférences des agents et la règle de décision collective. En d'autres termes, point n'est besoin, avec des agents égoïstes, d'imposer *ex ante* des restrictions théoriques sur la procédure de choix de la décision finale parmi les décisions efficaces : la procédure effective est en effet parfaitement lisible au travers des comportements observés. En revanche, et c'est là l'apport du présent article, la capacité prédictive d'une formulation « altruiste » est probablement très faible, quelles que soient les hypothèses supplémentaires sur le processus de décision. Plus précisément, les résultats précédents montrent que la recherche du « bon » concept d'équilibre coopératif, qui permettrait d'engendrer des restrictions empiriques dans le cadre d'un modèle altruiste, est probablement sans issue : *même si la répartition des ressources était observable* ex post, il peut s'avérer impossible de dériver la moindre restriction sur les comportements. Ces résultats fournissent donc un argument fort à l'encontre des approches « altruistiques », au moins dans leur formulation la plus générale. [7]

On peut donner de ces idées une expression plus formelle.

Considérons un ménage à n membres, *avec* $n \geqslant 3$. Deux d'entre eux (les « *parents* ») peuvent offrir du travail; par ailleurs, il existe m biens consommés privativement par l'ensemble du ménage. On fait l'hypothèse que les prix relatifs des biens de consommation restent constants sur l'échantillon; ce sera le cas, par exemple, si l'on dispose de données en coupe transversale. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème du bien composite. Soit y_j^i la consommation du i-ième membre en bien privé j ($j=1, \ldots, m$), q_j le prix du bien, x^i l'offre de travail de i ($i=1, 2$) et p^i le salaire correspondant. L'utilité directe du i-ième agent s'écrit :

$$\tilde{U}^i(x_1, x_2, y_1^i, \ldots, y_m^i).$$

D'après le théorème de Hicks, si $q_j=\lambda q_j^0$ pour tout j, où q^0 est un vecteur fixe de prix (relatifs), on peut caractériser l'agent i par l'utilité réduite :

$$U^i(x_1, x_2, y^i)=\begin{cases} \operatorname{Max} \tilde{U}^i(x_1, x_2, y_1^i, \ldots, y_m^i) \\ \sum_j q_j^0 y_j^i = y^i \end{cases}$$

le prix du « *bien composite* » y étant égal à λ.

Si l'on suppose les agents altruistes, au sens où chaque utilité dépend effectivement de x_1 et x_2, on se retrouve donc dans le cas précédemment étudié d'une économie à deux biens publics et un bien privé. La proposition 2 implique alors :

COROLLAIRE 4 : Étant donné un nombre fini d'observations sur les salaires, les revenus, l'offre de travail et la répartition interne de la consommation de biens privés, si l'on admet que l'utilité marginale, pour chaque agent, de l'offre de travail des autres membres peut être positive ou négative, alors il existe n préférences individuelles ($n \geqslant 3$) telles que les comportements observés soient toujours Pareto efficaces.

Démonstration : Elle résulte du corollaire 1, et de la remarque, faite plus haut, que le prix personnel du loisir d'un agent *pour l'agent lui-même* est toujours positif dans la décomposition proposée. □

En d'autres termes : pour un ménage à trois agents ou plus, l'hypothèse de Pareto efficacité ne permet pas de restreindre la forme des fonctions d'offre de travail (exception faite de l'homogénéité et de la loi de Walras); tout comportement est compatible avec ces hypothèses.

---

7. En revanche, une modélisation supposant les agents altruistes au sens Beckerien – leur bien-être dépend de *l'utilité* des autres membres – conduit aux mêmes résultats qu'un modèle « égoïstique » (cf. CHIAPPORI [1989]).

Soulignons, pour conclure, qu'une condition est clairement nécessaire pour obtenir le résultat d'indétermination de l'offre de travail : le nombre d'agents doit être au moins égal au nombre de biens. Dans le cas contraire, en effet, des restrictions peuvent apparaître sur la forme de la demande agrégée. Plus précisément, les restrictions *fonctionnelles* de la littérature (DIEWERT [1977]) ne s'appliquent pas directement ici; cependant, il est possible d'énoncer des conditions non paramétriques, effectivement restrictives, que doivent satisfaire les observations lorsque le nombre de biens dépasse le nombre d'agents (voir CHIAPPORI [1988 *a*]). Ce point fera l'objet de recherches ultérieures.

• Références bibliographiques

ANDREU (1982). — « Rationalization of Market Demand on Finite Domains », *Journal of Economic Theory*, 28, p. 192-200.

APPS, P. F. (1981). — *A Theory of Inequality and Taxation*, Cambridge University Press, Cambridge.

APPS, P. F. (1982). — « Institutional Inequality and Tax Incidence », *Journal of Public Economics*, 18, p. 217-42.

APPS, P. F. & JONES, G. S. (1986). — « Selective Taxation of Couples », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Supp. 5, p. 63-74.

APPS, P. F. & REES, R. (1987). — « Taxation and the Household », *mimeo.*

ASHWORTH, J. & ULPH, D. (1981). — « Household Models », *in* C. V. Brown (Ed.), *Taxation and Labour Supply*, London, Allen & Unwin.

BECKER, G. (1973). — « A Theory of Marriage », partie I, *Journal of Political Economy*, 81, 813-26.

BECKER, G. (1974 *a*). — « A Theory of Marriage », partie II, *Journal of Political Economy*, 82, p. 511-26.

BECKER, G. (1974). — « A Theory of Social Interactions », *Journal of Political Economy*, 82, p. 1063-93.

BECKER, G. (1981 *b*). — *A Treatise on the Family*, Cambridge, Harward University Press.

BOURGUIGNON, F. (1984). — « Rationalité individuelle ou rationalité stratégique : le cas de l'offre familiale de travail », *Revue Économique*, 35, p. 147-62.

CHIAPPORI, P. A. (1988 *a*). — « Rational Household Labour Supply », *Econometrica*, 56, p. 63-89.

CHIAPPORI, P. A. (1988 *b*). — « Nash-Bargained Household Decisions. A Comment », *International Economic Review*, 29, p. 791-96.

CHIAPPORI, P. A. (1989). — « Collective Labour Supply and Welfare », à paraître dans *Journal of Political Economy.*

CHIAPPORI, P. A. et ROCHET, J. C. (1987). — « Revealed Preferences and Differentiable Demand », *Econometrica*, 55, p. 687-691.

DEBREU, G. (1974). — « Excess Demand Functions », *Journal of Mathematical Economics*, 1, p. 15-23.

DIEWERT, W. E. (1977). — « Generalized Slutsky Conditions for Aggregate Consumer Demand Functions ». *Journal of Economic Theory*, 15, p. 336-353.

GEANAKOPLOS, J. & POLEMARCHAKIS, H. (1980). – « On the Desaggregation of Demand Functions », *Econometrica*, 48, p. 315-331.

LAZEAR, E. P. & MICHAEL, R. T. (1986). – « Estimating the Personal Distribution of Income with Adjustment for Within-Family Variation », *Journal of Labor Economics*, 4, p. 216-244.

LAZEAR, E. P. & MICHAEL, R. T. (1988). – *Allocation of Income Within the Household*, Chicago University Press.

MANSER, M. & BROWN, M. (1980). – « Marraige and Household Decision-Making: A Bargaining Analysis », *International Economic Review*, 21, p, 31-44.

MCELROY, M. B. & HORNEY, M. J. (1981). – « Nash Bargained Decisions », *International Economic Review*, 22, p. 333-349.

MCFADDEN, D., MAS-COLELL, A., MANTEL, R. & RICHTER, M. K. (1974). – « A Characterization of Community Excess Demand Functions », *Journal of Economic Theory*, 12, p. 197-201.

POPPER, sir K. (1963). – *Conjectures and Refutations*, 3e ed., Routledge-Kegan.

SONNENSCHEIN, H. (1973). – « Do Walras Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions », *Journal of Economic Theory*, 6, p. 345-354.

SHAFER, W. & SONNENSCHEIN, H. (1982). – « Market Demand and Excess Demand Functions », in *Handbook of Mathematical Economics*, sous la direction de K. Arrow et M. Intrilligator, Amsterdam, orth Holland, p. 670-693.

ULPH, D. (1988). – « A General Non-Cooperative Nash Model of Household Consumption Behaviour, *W.P.*, University of Bristol.

WOOLLEY, F. (1988). – « A Non-Cooperative Model of Family Decision Making », *W.P.* n° 125, London School of Economics.