

Anticipations, indétermination et non-neutralité de la monnaie

Pierre-André CHIAPPORI, Roger GUESNERIE *

RÉSUMÉ. — L'article analyse une variante du célèbre modèle de Lucas [1972], dans une spécification particulière (due à Azariadis). La solution « de Lucas », calculable explicitement dans ce contexte, est obtenue sous *l'hypothèse* que la monnaie est « fortement neutre » (au sens où la masse monétaire existante influence les prix mais pas les quantités). Si l'on supprime cette hypothèse, l'équation fonctionnelle de base, qui traduit dans ce contexte la rationalité des anticipations, possède alors un continuum de solutions, dont les propriétés sont analysées.

Expectations, Indeterminacy and the Neutrality of Money

ABSTRACT. — The paper considers a version of the well-known Lucas [1972] model, in a specification due to Azariadis. The "Lucas" solution is derived (explicitly in this framework) under the assumption that money is "strongly neutral" (in the sense that the current stock of money does not influence real output). If this assumption is suppressed, the basic functional equation (that stems from the rational expectation hypothesis) is shown to admit a continuum of solutions. Each of the latter is then compared to the "Lucas" one.

* P. A. CHIAPPORI et R. GUESNERIE : DELTA, Unité mixte de recherche CNRS-ENS-EHESS, 48, boulevard Jourdan, 75014 Paris. Nous remercions J. M. Grandmont, F. Hahn et un rapporteur anonyme pour de nombreuses remarques sur une première version de l'article, et J. L. Villa pour une relecture attentive de l'appendice.

1 Introduction

Cet article analyse une variante du modèle célèbre de LUCAS [1972]. On considère donc une économie à générations imbriquées, dans laquelle chaque « jeune » génération doit choisir son comportement en situation d'incertitude vis-à-vis de l'environnement économique futur. Comme dans l'article de Lucas, l'hypothèse de rationalité des anticipations est utilisée pour dériver une équation fonctionnelle (qui sera décrite en détail un peu plus loin); toute solution de cette équation fonctionnelle est un équilibre du modèle. Dans le modèle spécifique choisi ici, il est possible de calculer explicitement l'ensemble des solutions ayant une forme donnée, « quasi analytique ». On peut, de ce fait, exhiber un *continuum* de solutions de ce type, indexé par un paramètre réel. Il y a donc *indétermination*, au sens de Woodford [1984], des équilibres stationnaires. Lorsque le paramètre atteint sa limite inférieure, on retrouve la solution annoncée par Lucas (et calculée explicitement pour notre modèle, par AZARIADIS [1981]). Nous la qualifions dans la suite de « solution de Lucas ». En revanche, pour toutes les autres valeurs du paramètre, l'équilibre a des propriétés qualitativement différentes.

Dans un modèle à la Lucas, toute solution peut être considérée comme une *théorie autoréalisatrice* (autonome) : si les agents croient à cette théorie, leurs comportements seront tels que la théorie sera exactement confirmée par les faits. Nos résultats peuvent donc s'interpréter ainsi : dans le modèle étudié, il existe une *infinité continue de théories autoréalisatrices* (autonomes) *différentes*; et dans *toutes* ces théories — sauf une, celle de Lucas — la monnaie est non « fortement neutre », en un sens qui sera défini plus bas. Enfin, une conclusion plus surprenante encore est que ces théories non fortement neutres sont toutes supérieures, en termes de bien-être, à la théorie de Lucas. Autrement dit, non seulement il est possible de croire, de façon « cohérente » (ou « rationnelle »), à la non-neutralité (au sens fort) de la monnaie, mais, dans ce modèle particulier, de telles croyances sont bénéfiques à la société.

Rappelons brièvement les principales caractéristiques du modèle de Lucas, en en soulignant les aspects essentiels. Tout d'abord, l'économie est soumise à des chocs. Dans le modèle de Lucas coexistent un choc réel, θ , lié au nombre de « jeunes » travailleurs, et un choc monétaire x , qui affecte de façon multiplicative les encaisses des « vieux ». En second lieu, ces chocs ne sont pas directement observables par les jeunes agents; ceux-ci reçoivent seulement un signal qui transmet (imparfaitement) une information sur ces chocs. Dans le modèle de Lucas, le signal est une variable endogène, le prix du bien. Troisièmement, la connaissance parfaite des chocs d'aujourd'hui permettrait de mieux prévoir la situation de demain; chez Lucas, le choc monétaire x est l'un des déterminants de la masse monétaire de demain.

Dernière composante : la notion de « théorie ». Une théorie autonome est une relation indépendante du temps (et en principe déterministe), qui prédit les valeurs de variables économiques pertinentes à partir des valeurs

des variables observables et des chocs. Ainsi, dans le modèle de Lucas, les théories prédisent le prix du bien produit à partir de deux variables explicatives, la quantité de monnaie précédente m , supposée observable, et le rapport z des deux chocs inobservables x et θ . Une telle théorie joue un rôle essentiel de liaison entre périodes; elle permet un traitement « adéquat » de l'information extraite du signal aujourd'hui sur les variables explicatives de demain. Chez Lucas, par exemple, l'information sur z , transmise par les prix d'aujourd'hui, conditionne les anticipations sur le choc monétaire d'aujourd'hui, x , donc sur la quantité de monnaie de demain, et enfin, *par le biais de la théorie*, sur le prix de l'output demain. Par conséquent, la théorie influe sur le comportement des agents aujourd'hui (en modifiant leurs anticipations); elle est auto-réalisatrice si les comportements qu'elle engendre ainsi la confirment *a posteriori*.

Dans l'article de 1972, Lucas ne considère que des théories « fortement neutres », dans lesquelles le prix s'écrit comme produit de la variable m et d'une fonction du ratio z ; il montre qu'une – et, sous des hypothèses supplémentaires, une seule – de ces théories est auto réalisatrice. Le présent article montre que si l'on ne se restreint pas *a priori* aux théories fortement neutres – donc aux solutions de forme multiplicative – il existe une infinité continue de théories auto réalisatrices, dans lesquelles la monnaie n'est évidemment pas neutre au sens précédent.

Le modèle utilisé ici présente deux différences principales avec celui de LUCAS [1972]. Tout d'abord, nous reprenons la fonction d'utilité quadratique adoptée par AZARIADIS [1981] dans sa présentation pédagogique du modèle de Lucas; cette formulation a l'avantage de permettre une dérivation explicite de la solution quantitativiste. Dans le même esprit, nous spécifions la loi de probabilité des variables x et θ .

En second lieu, nous adoptons une hypothèse informationnelle différente de celle de Lucas. Cette hypothèse peut recevoir deux interprétations différentes.

Premièrement, elle est impliquée par l'observation directe du quotient z – que Lucas, lui, déduit du prix. Cette observation directe de z lève certaines difficultés présentes dans l'article original de Lucas – notamment l'éventuel irréalisme du conditionnement par les prix, source de problèmes techniques sous-estimés initialement par l'auteur (*voir* la réponse de Lucas à Grandmont, LUCAS [1983]). Mais les scénarios qui justifient l'observation directe de z sont plus ou moins convaincants.

Deuxièmement, comme nous a suggéré de le souligner le rapporteur, les solutions que nous exhibons sont pleinement justifiées dès lors qu'aux variables observées dans Lucas – l'offre de monnaie de la période précédente, le prix d'aujourd'hui – on ajoute la production par tête (qui, dans l'esprit de la démarche de Lucas, paraît devoir être autant observable que le prix). C'est cette seconde interprétation que nous privilégions dans la discussion plus complète de nos hypothèses informationnelles présentée dans la partie 7.

Finalement, il faut dire un mot du statut théorique des solutions exhibées ici. Ces solutions, obtenues par le calcul, nous ont longtemps intrigués. Le texte de CHIAPPORI-GUESNERIE [1988] éclaire la nature de solutions similaires

dans le cadre d'un modèle sans information incomplète et donc sans transmission imparfaite. Les principales conséquences de cette analyse pour le problème qui nous intéresse ici sont évoquées en conclusion. Soulignons dès maintenant deux points : le type de non neutralité mis en évidence s'obtient plus généralement quand la monnaie joue, outre son rôle intrinsèque, un rôle de signal extrinsèque (au sens que la théorie des équilibres à taches solaires donne à ce mot). Deuxièmement, les caractéristiques du processus stochastique suivi par le système reflètent ici, comme c'est le cas en général, les caractéristiques du processus qui gouverne les croyances. Le fait que ce processus soit une marche aléatoire, et donc qu'on ne puisse lui associer une mesure invariante, est cependant une caractéristique importante, au moins dans le modèle considéré, pour l'existence de nos solutions et de solutions du même type.

2 Le modèle et l'équation fonctionnelle de base

Nous utiliserons la version simplifiée du modèle de Lucas introduite par AZARIADIS [1981]. Rappelons brièvement ses principaux traits.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées où les agents vivent deux périodes, étant successivement jeunes et vieux. L'offre de travail totale des jeunes, sur le marché considéré, est $\theta \cdot y$, où y est l'offre de travail d'un individu représentatif et θ le choc aléatoire réel de l'économie. Les vieux ne détiennent que de la monnaie; leur demande réelle est $\frac{mx}{p}$, où p est le prix nominal du bien (les rendements étant supposés constants et unitaires, p est aussi le salaire); et la masse monétaire mx apparaît comme le produit de la masse monétaire précédente, m , et d'un choc monétaire x . Notons que la demande ne dépend pas du choc réel θ .

Azariadis propose de décrire le consommateur représentatif par la fonction d'utilité très simple suivante :

$$U(c', y) = c' - \frac{1}{2}y^2$$

où c' est la consommation future, et y , nous l'avons dit, l'offre de travail actuelle. La contrainte budgétaire s'écrit :

$$x' py = p' c'$$

le salaire d'aujourd'hui (py), conservé sous forme monétaire et donc soumis au choc monétaire de demain (x'), permettra une consommation nominale $p' c'$. En particulier, si l'agent anticipait parfaitement p' et x' , la résolution

du programme d'optimisation montre aisément que l'offre de travail serait px'/p' .

Il est également aisé de montrer qu'en anticipations rationnelles (et non parfaites), l'offre de travail individuelle devient $y = E\left(\frac{px'}{p'}/I\right)$, où I est l'information détenue par l'agent lorsqu'il prend sa décision. Nous supposons ici que le quotient $z = \frac{x}{\theta}$ est observable, alors que x et θ ne le sont pas séparément, et que la masse monétaire de la période précédente est information publique. L'équilibre offre-demande s'écrit

$$(1) \quad E\left(\frac{px'}{p'}/z\right) = \frac{mx}{p\theta}.$$

Il reste à préciser le sens du conditionnement par rapport à z . En fait, l'information extraite de z dépend de la « théorie » en laquelle l'agent croit, et qui, nous l'avons dit, explique le niveau de prix à partir de la quantité de monnaie m et de la valeur contemporaine des chocs x et θ . Suivant Lucas, nous nous limiterons ici aux « théories » qui décrivent le prix comme fonction de m et z , les deux variables observables du modèle. Nous noterons donc $p = \psi(m, z)$. On a alors $p' = \psi(mx, z')$, et l'on voit pourquoi la connaissance de z apporte de l'information sur les prix futurs : si z' est indépendant de z , x , en revanche, est corrélé à z .

Une fonction $\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ sera appelée *solution* ou *théorie autoréalisatrice* si et seulement si elle vérifie

$$(2) \quad E\left[\frac{\psi(m, z) \cdot x'}{\psi(mx, z')}/z\right] = \frac{mz}{\psi(m, z)}.$$

Soulignons que :

- toute solution de (2) est aussi solution de (1);
- mais, inversement, il peut exister des solutions de (1) qui ne peuvent s'écrire sous la forme restrictive $\psi(m, z)$.

Dans (2), comme m et z sont observables, on peut sortir $\psi(m, z)$ de l'espérance conditionnelle :

$$(3) \quad E\left[\frac{x'}{\psi(mx, z')}/z\right] = \frac{mz}{\psi(m, z)^2}.$$

Posons alors $\varphi(m, z) = \frac{mz}{\psi(m, z)}$: φ n'est autre que l'offre de travail par tête y , et l'équation devient

$$(4) \quad E\left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z')/z\right] = [\varphi(m, z)]^2.$$

Le reste de l'article est consacré à l'étude de cette équation; le lecteur notera qu'elle est la traduction exacte, dans ce modèle, de l'équation générale de LUCAS ([1972], équation 4.2, p. 110).

Précisons enfin la loi de probabilité des chocs x et θ . Dans la mesure où ces chocs sont multiplicatifs, il y a une certaine logique à supposer qu'ils sont eux-mêmes le produit d'un grand nombre de chocs élémentaires indépendants et équidistribués. La loi des grands nombres implique alors que x et θ suivent des lois Log normales. En imposant, comme Lucas et Azariadis, une moyenne égale à l'unité, on obtient des densités :

$$f_x(t) = \frac{1}{t \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\text{Log } t + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right]$$

$$f_\theta(t) = \frac{1}{t \mu \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\mu^2} \left(\text{Log } t + \frac{\mu^2}{2} \right)^2 \right]$$

où σ et μ sont des paramètres strictement positifs.

3 La solution de Lucas

La démarche de Lucas-Azariadis consiste, à ce point, à postuler une solution de la forme $\varphi(m, z) = a(z)$; autrement dit, la production (en volume) dépend uniquement des chocs, et pas de la quantité de monnaie précédente m . Il est équivalent de dire que les prix sont proportionnels à m : $p = \frac{mz}{a(z)}$; en particulier, le rapport $\frac{p}{p'}$ dépend de x , z et z' , mais pas de m .

L'équation (4) devient

$$(5) \quad E \left[\frac{\theta'}{\theta} a(z')/z \right] = [a(z)]^2.$$

L'indépendance présent-futur permet d'écrire

$$(6) \quad E[\theta' a(z')] \cdot E \left[\frac{1}{\theta} / z \right] = [a(z)]^2.$$

Posons, par définition, $\chi_0(z) = E \left[\frac{1}{\theta} / z \right]$; alors $a(z)$ s'écrit

$$a(z) = K_0 \cdot [\chi_0(z)]^{1/2}$$

avec K_0 donné par

$$E[\theta' a(z')] = K_0 \cdot E[\theta' \chi_0^{1/2}(z')] = K_0^2;$$

d'où finalement

$$(7) \quad a(z) = E[\theta' \chi_0^{1/2}(z')] \cdot \chi_0^{1/2}(z)$$

qui est la *seule* solution de l'équation (5).

Avec des distributions Lognormales, on a (cf. Annexe)

$$(A1) \quad E\left[\frac{x^s}{\theta/z}\right] = A^{s^2 - 4s + 3} z^{\alpha s + \beta}$$

où

$$A = \exp\left[\frac{\mu^2 \sigma^2}{2(\mu^2 + \sigma^2)}\right]$$

et

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2}, \quad \beta = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2} = 1 - \alpha,$$

et de plus :

$$E[z^{\alpha s + \beta/2} \theta] = B C^{s^2 - s},$$

où

$$(A2) \quad B = \exp\left[-\frac{\mu^2 \mu^2 + 2 \sigma^2}{8 \mu^2 + \sigma^2}\right]$$
$$C = \exp\left[\frac{\sigma^4}{2(\mu^2 + \sigma^2)}\right].$$

On en tire

$$(7') \quad a(z) = A^3 B z^{\beta/2}$$

d'où en particulier

$$p = \frac{mz}{a(z)} = A^{-3} B^{-1} z^{(1 - \beta/2)} m;$$

on notera que $1 - \beta/2 > 0$.

On peut représenter cette forme sur la figure 1 :

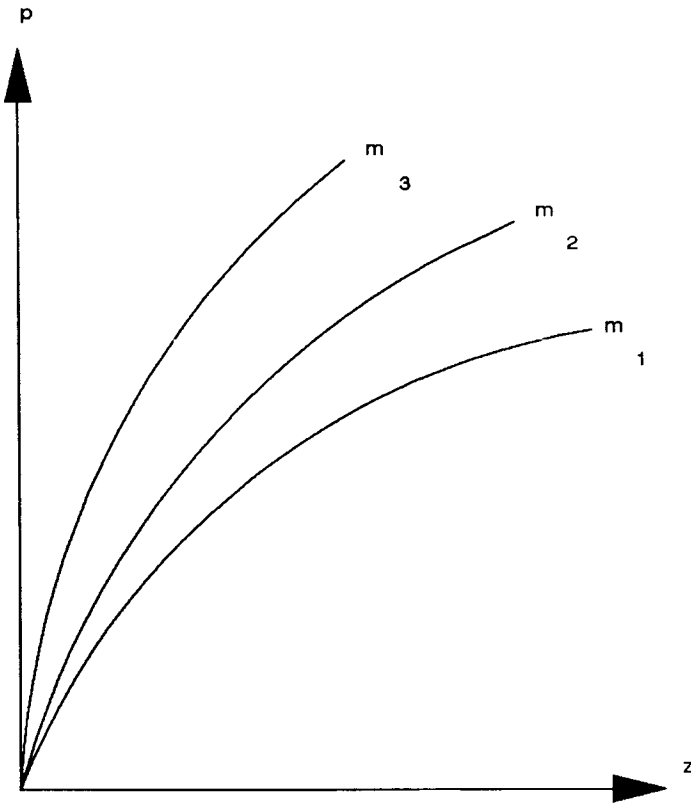


FIGURE 1

$$m_1 > m_2 > m_3.$$

4 Solution générale de l'équation fonctionnelle : calcul des deux premiers termes du développement

Nous avons donc obtenu une solution particulière de l'équation

$$(4) \quad E \left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z')/z \right] = [\varphi(m, z)]^2.$$

Pour dériver d'autres solutions de cette équation, nous allons utiliser ici une technique générale de résolution des équations fonctionnelles (illustrée notamment par Poincaré), le développement en série entière. Pour cela, posons *a priori* :

$$(8) \quad \varphi(m, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) m^{\lambda k}$$

où les $a_k(z)$ sont des fonctions de z et λ est un réel positif à déterminer. Nous procéderons maintenant en deux étapes :

– Dans un premier temps, nous allons chercher les conditions nécessaires sur les $a_k(z)$, pour qu'une fonction de cette forme soit solution de (4). On verra que ces conditions déterminent, à une constante multiplicative commune près, tous les $a_k(z)$.

– Puis nous montrerons que, pour tout z et tout m , le développement converge vers une valeur positive.

Pour qu'une fonction (8) soit solution de (4), il faut avoir :

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} E \left[\frac{\theta'}{\theta} a_k(z') m^{\lambda k} x^{\lambda k/z} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k [a_i(z) a_{k-i}(z)] \cdot m^{\lambda k}.$$

Par identification des coefficients des termes en $m^{\lambda k}$, il vient :

$$(10) \quad E \left[\frac{\theta'}{\theta} a_0(z')/z \right] = a_0^2(z)$$

$$(11) \quad E \left[\theta' a_1(z') \cdot \frac{x^{\lambda}}{\theta} / z \right] = 2 a_0(z) a_1(z)$$

$$(12) \quad E \left[\theta' a_k(z') \cdot \frac{x^{\lambda k}}{\theta} / z \right] = \sum_{i=0}^k a_i(z) a_{k-i}(z), \quad k \geq 2.$$

Dans cette partie, nous nous concentrons sur les deux premiers termes [relations (10) et (11)]. La solution (unique) de (10) est déjà connue : c'est simplement la solution de Lucas calculée dans la partie précédente. Quant à l'équation (11), elle s'écrit :

$$E[\theta' a_1(z')] \cdot E \left[\frac{x^{\lambda}}{\theta} / z \right] = 2 a_0(z) a_1(z).$$

En gardant les mêmes notations que précédemment, on pose

$$\chi_{\lambda}(z) = E \left[\frac{x^{\lambda}}{\theta} / z \right];$$

alors

$$a_1(z) = \frac{K_1 \chi_{\lambda}(z)}{a_0(z)}.$$

En reportant dans (11) :

$$K_1 = \frac{1}{2} E[\theta' a_1(z')] = \frac{K_1}{2} E\left[\frac{\theta' \chi_\lambda(z')}{a_0(z')}\right].$$

Donc K_1 peut prendre n'importe quelle valeur réelle (positive dans ce qui suit), pourvu que

$$E\left[\frac{\theta' \chi_\lambda(z')}{a_0(z')}\right] = 2.$$

En remplaçant $a_0(z)$ par sa valeur, obtenue dans (7), cette dernière relation s'écrit :

$$(13) \quad E\left[\frac{\theta' \chi_\lambda(z')}{\chi_0^{1/2}(z')}\right] = 2 E[\theta' \chi_0^{1/2}(z')].$$

Considérons le membre de gauche de cette équation, et faisons varier λ . Pour $\lambda=0$, ce membre vaut $E[\theta' \chi_0^{1/2}(z')]$, et est donc inférieur au membre de droite. Montrons que, pour λ assez grand, le membre de gauche est supérieur au membre de droite. Cette propriété est vraie sous des hypothèses générales; néanmoins, pour simplifier, nous utiliserons ici la forme Lognormale des lois.

Les relations (A 1) et (A 2) (cf. annexes) donnent alors

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\theta' \chi_\lambda(z')}{\chi_0^{1/2}(z')}\right] &= \frac{A^{\lambda^2 - 4\lambda + 3}}{A^{3/2}} E\left[\frac{\theta' (z')^{\alpha\lambda + \beta}}{(z')^{\beta/2}}\right] \\ &= A^{\lambda^2 - 4\lambda + 3/2} E[\theta' (z')^{\alpha\lambda + \beta/2}] \\ &= A^{\lambda^2 - 4\lambda + 3/2} B C^{\lambda^2 - \lambda} \end{aligned}$$

Comme $A > 1$ et $C > 1$, cette expression tend vers l'infini avec λ , d'où la conclusion.

En particulier, il existe une valeur unique $\lambda_0 > 0$ de λ telle que (13) soit vérifiée; elle est définie par

$$A^{\lambda_0^2 - 4\lambda_0} C^{\lambda_0^2 - \lambda_0} = 2$$

On a donc calculé les deux premiers termes :

$$(14) \quad a_0(z) = A^3 B \cdot z^{\beta/2} = u_0 z^{\beta/2},$$

en posant $u_0 = A^3 B$, et

$$(15) \quad a_1(z) = u_1 z^{\alpha\lambda_0 + \beta/2}$$

où u_1 est un réel positif arbitraire.

5 Solution générale de l'équation fonctionnelle : calcul du terme général du développement

L'équation (12), caractérisant le terme général, peut s'écrire :

$$(16) \quad 2 a_0(z) a_k(z) = K_k \chi_{\lambda_0 k}(z) - \sum_1^{k-1} a_i(z) a_{k-i}(z)$$

avec

$$(17) \quad K_k = E[\theta' a_k(z')].$$

Montrons par récurrence le lemme suivant :

LEMME 1 : Soit $a_0(z) = u_0 z^{\beta/2}$ et, pour un $u_1 > 0$ arbitraire, soit $a_1(z) = u_1 z^{\alpha\lambda_0 + \beta/2}$. Toute solution des relations (16) et (17) est de la forme

$$a_k(z) = u_k z^{\alpha\lambda_0 k + \beta/2}$$

où $u_k = \varphi_k \cdot (u_1)^k$, avec $\varphi_k > 0$.

Démonstration : a_0 et a_1 sont bien de la forme annoncée. De plus, si la propriété est vraie à l'ordre $k-1$ ($k \geq 2$), on a (d'après A 1)

$$2 a_0(z) a_k(z) = K_k A^{\lambda_0^2 k^2 - 4\lambda_0 k + 3} z^{2\alpha\lambda_0 k + \beta} - \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} \right) z^{\alpha\lambda_0 k + \beta}$$

D'où

$$a_k(z) = \frac{1}{2 A^3 B} \left[K_k A^{\lambda_0^2 k^2 - 4\lambda_0 k + 3} - \sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i} \right] z^{\alpha\lambda_0 k + \beta/2}$$

qui est bien de la forme $u_k z^{\alpha\lambda_0 k + \beta/2}$. De plus, u_k est positif; en effet, d'après (17) et (A 2).

$$K_k = \left(\sum_1^{k-1} u_i u_{k-i} \right) \frac{C^{\lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k}}{A^{\lambda_0^2 k^2 - 4\lambda_0 k + 3} C^{\lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k} - 2 A^3}$$

d'où

$$(18) \quad \forall k \geq 2, \quad u_k = \frac{1}{u_0} \frac{\sum_1^{k-1} u_i u_{k-i}}{A^{\lambda_0^2 k^2 - 4\lambda_0 k} C^{\lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k} - 2}$$

Le dénominateur est strictement positif pour $k \geq 2$, donc $u_k > 0$; de plus, si u_i (resp u_{k-i}) est proportionnel à $(u_1)^i$ [resp $(u_1)^{k-i}$], u_k est bien proportionnel à $(u_1)^k$; d'où le lemme.

On remarquera que, pour u_1 donné, positif strict, (18) détermine la suite (u_k) de façon unique.

Il reste à montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{\alpha \lambda_0 k + \beta/2} m^{\lambda_0 k}$ converge pour tout couple (z, m) de \mathbb{R}_+^2 . Posons, pour alléger les notations :

$$D(k) = u_0 [A \lambda_0^2 k^2 - 4 \lambda_0 k C \lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k - 2].$$

Pour tout $\gamma > 1$, $D(k)$ est, à l'infini, plus grand que $k \cdot \gamma^{k^{3/2}}$. Plus précisément, fixons $\gamma > 1$.

Alors,

$$(19) \quad \exists K / \forall k \geq K, \quad D(k) > k \gamma^{k^{3/2}}$$

Posons alors

$$(20) \quad M = \text{Min} \left(1, \min_{2 \leq k \leq K-1} \frac{D(k)}{k \gamma^{k^{3/2}}} \right).$$

M est strictement positif, puisque $D(k) > 0$ pour $k \geq 2$; de plus, pour tout $k \leq K$, on a

$$(21) \quad \frac{k M}{D(k)} \leq \gamma^{-k^{3/2}} \quad \square$$

LEMME 2 : Si $u_1 < \bar{u}_1 = \frac{M}{\gamma}$, alors $u_k < M \gamma^{-k^{3/2}}$ pour tout $k \geq 1$

Démonstration : Par récurrence : supposons la propriété vraie pour tout u_i tel que $i < k$. Alors, en particulier, $u_i < M$, et

$$(22) \quad u_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}}{D(k)} < \frac{k M^2}{D(k)} \left(= M \cdot \frac{k M}{D(k)} \right).$$

Alors :

– si $k \geq K$, d'après (19), $\frac{k}{D(k)} < \gamma^{-k^{3/2}}$; comme par définition, $M \leq 1$, on a bien $u_k < M \gamma^{-k^{3/2}}$;

– si $k < K$, par définition $\frac{M k}{D(k)} < \gamma^{-k^{3/2}}$, d'où la conclusion. \square

En résumé : si $u_1 < \bar{u}_1$, la série considérée est majorée par

$$M \sum_0^{\infty} \gamma^{-k^{3/2}} z^{\alpha \lambda_0 k + \beta/2} m^{\lambda_0 k}$$

qui converge absolument pour tout m et tout z . Mais ceci suffit pour assurer la convergence de la série pour *n'importe quels* u_1, z et m :

LEMME 3 : S'il existe $u_1^* > 0$ tel que la série converge pour tous z et m , alors la série converge pour tous u_1, m et z .

Démonstration : Supposons que la série

$$\varphi^*(m, z) = \sum_0^{\infty} u_k^* m^{\lambda_0 k} z^{\alpha_0 k + \beta/2}$$

où les u_k^* sont déduits de u_1^* par (18), converge pour tout m et tout z .

Prenons un $u_1 \neq u_1^*$ quelconque, et soient u_2, \dots, u_k, \dots les coefficients déduits de u_1 par (18). Posons $w = \frac{u_1^*}{u_1}$; d'après le lemme 1, on a

$$\forall k, \quad u_k = \frac{u_k^*}{w^k},$$

d'où

$$\sum_0^{\infty} u_k m^{\lambda_0 k} z^{\alpha_0 k + \beta/2} = \sum_0^{\infty} u_k^* \frac{m^{\lambda_0 k}}{w^k} z^{\alpha_0 k + \beta/2} = \varphi^* \left(\frac{m}{w^{1/\lambda_0}}, z \right) \text{ qui converge. } \square$$

Les résultats précédents permettent donc d'énoncer :

PROPOSITION 4 : Soit $u_0 = A^3 B$, et λ_0 tel que $A^{\lambda_0^2 - 4\lambda_0} C^{\lambda_0^2 - \lambda_0} = 2$.

Pour $u_1 \geq 0$ fixé arbitrairement, si l'on définit par récurrence

$$u_k = \frac{1}{u_0 A^{\lambda_0^2 k^2 - 4\lambda_0 k} C^{\lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k} - 2} \sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}$$

pour $k \geq 2$, la série $\sum_0^{\infty} u_k z^{\alpha_0 k + \beta/2} m^{\lambda_0 k}$ converge vers une fonction $\varphi(m, z)$ positive, qui est solution de l'équation fonctionnelle (4). La solution (limite) correspondant à $u_1 = 0$ n'est autre que la solution de Lucas.²

L'allure de ces solutions est représentée sur les diagrammes suivants. Ceux-ci ont été obtenus par calcul numérique de la série; cependant, leurs propriétés qualitatives peuvent facilement être déduites de la proposition 4.

2. Jean-Michel Grandmont nous a justement fait remarquer que l'ensemble des solutions de cette équation pouvait en fait être obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z') = \varphi(m, z)^2 + \varepsilon',$$

où ε' est un processus aléatoire vérifiant $E(\varepsilon'/z) = 0$. Cependant, une caractérisation des solutions partant de cette relation est difficile, d'une part parce qu'elle requiert encore la résolution d'une équation fonctionnelle (pour laquelle une technique proche de la nôtre paraît inévitable), d'autre part parce que nous ne savons rien des processus ε' ainsi caractérisés.

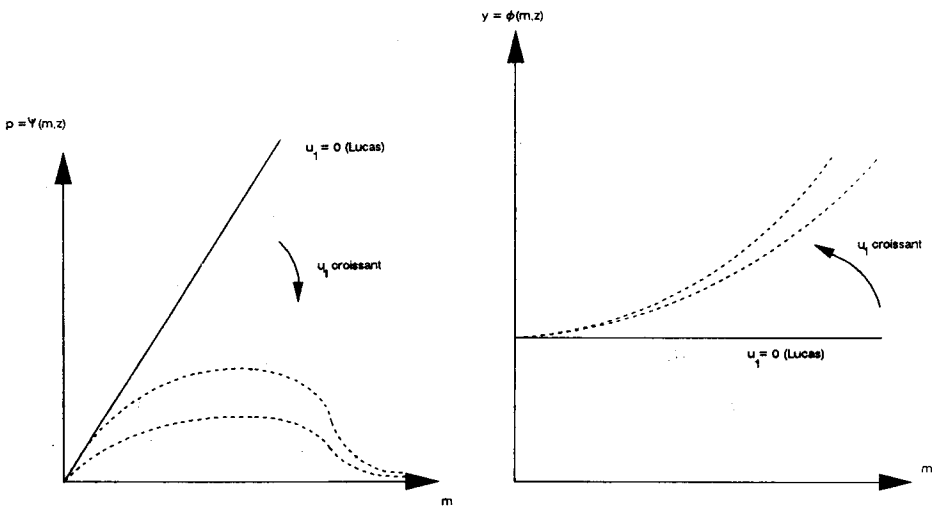


FIGURE 2a

m constant.

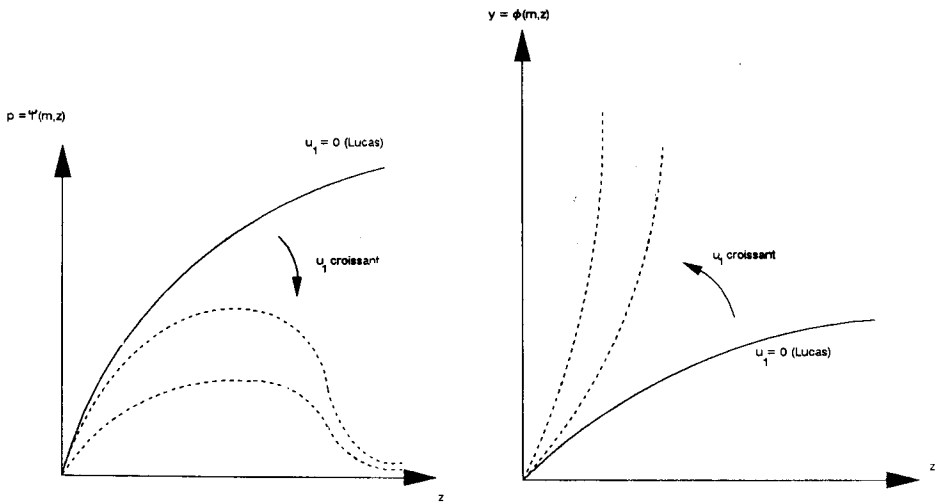


FIGURE 2b

z constant.

La solution de Lucas ($u_1 = 0$) est en traits pleins; deux autres solutions (correspondant à deux valeurs différentes de u_1) sont représentées en pointillés. On remarquera que sur chaque diagramme, on peut ordonner les courbes pour u_1 croissant; cette propriété résulte de la proposition 4 et du lemme 1.

On peut, en particulier, considérer le cas limite d'absence de choc réel; techniquement, la variable θ est alors certaine (et égale à 1), ce qui correspond la nullité du paramètre μ . Dans ce cas, l'observation de z révèle parfaitement x , et l'équation de base (4) devient alors :

$$(44) \quad E[\varphi(mx, x')] = [\varphi(m, z)]^2.$$

Les résultats de la proposition 4 s'appliquent immédiatement à ce cas particulier :

COROLLAIRE 5 : L'équation (4') admet un continuum de solutions indexé par un paramètre positif u_1 . La solution (limite) correspondant à $u_1 = 0$ est la solution de Lucas, qui est constante. Pour toutes les autres valeurs de u_1 , la solution correspondante est strictement croissante en m et x .

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition 4 en remarquant que, pour $\mu = 0$, on a $A = B = 1$ et $C = \exp(\sigma^2/2)$. La solution de Lucas, φ , est alors définie par $\varphi(m, x) = 1$; les autres solutions sont définies, pour $u_1 > 0$ quelconque, par $\varphi_{u_1}(m, z) = \sum_k u_k (m \cdot z)^{\lambda_0 k}$, où λ_0 est la racine positive de

l'équation $\lambda^2 - \lambda = \frac{2 \cdot \text{Log } 2}{\sigma^2}$, et où les u_k sont définis séquentiellement par :

$$u_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} u_i u_{k-i}}{-2 + e^{\sigma^2 (\lambda_0^2 k^2 - \lambda_0 k)/2}} \quad k > 1.$$

On voit donc que la présence d'un choc réel — donc d'une transmission imparfaite de l'information — n'est nullement nécessaire à l'existence de solutions « hétérodoxes »; nous reviendrons plus loin sur l'interprétation de ces solutions dans le cas limite d'information parfaite. En revanche, les solutions décrites par la proposition 4 disparaissent en cas d'absence de choc monétaire ($\lambda = 0$); nous laissons la démonstration de ce point au lecteur.

6 Comparaison des solutions Lucas et non Lucas

Nous allons tout d'abord tenter d'expliquer intuitivement les résultats précédents, en comparant, de façon tout à fait informelle, les mécanismes d'auto-confirmation pour la solution de Lucas et pour une solution hétérodoxe.

Considérons tout d'abord la théorie de Lucas; elle postule que :

- (i) à z donné, le prix est proportionnel à m ;
- (ii) à m donné, le prix croît en fonction de z , selon les courbes tracées sur les figures 1 et 2.

Si p est le prix aujourd'hui, et x' le choc demain, les termes de l'échange pour un jeune sont $\frac{px'}{p'}$. Mais si la théorie est vraie, ces termes de l'échange

deviennent proportionnels à $\frac{p}{xm}$ (le facteur de proportionnalité dépendant des chocs de demain). L'offre de travail à x donné (et donc à z donné) ne dépend que du ratio $\frac{p}{m}$. Il en est de même de la demande de biens et donc

de l'équilibre. Venons en à (ii). A m et p donnés, deux valeurs différentes de z apportent une information différente sur demain; un z plus grand suggère un x plus élevé aujourd'hui, ³ donc une masse monétaire demain, $m.x.x'$, supérieure. Ceci va donc dans la logique de la théorie, détériorer les termes de l'échange, donc diminuer la *fonction* d'offre de travail (considérée comme fonction du prix actuel). Mais ceci a pour conséquence de relever le prix d'équilibre d'aujourd'hui (et, d'ailleurs, la *valeur* d'équilibre de l'offre de travail actuelle).

Passons à présent à une solution non Lucas, dont l'allure générale est présentée dans la figure 2. La théorie correspondante implique que :

- (i) à z donné le prix croît avec m , atteint un maximum, puis décroît;
- (ii) à m donné le prix croît avec z , atteint un maximum, puis décroît

Comment une prévision de type (i) peut-elle s'autoréaliser? Pour z donné, considérons deux valeurs de m , l'une « grande », l'autre « petite ». La masse monétaire de demain est corrélée positivement avec m (la corrélation dépendant de z). Si m est bas, l'agent, d'après la théorie, anticipe un prix de demain bas, donc des termes de l'échange favorables; il augmente son offre de travail, ce qui baisse le prix d'équilibre aujourd'hui. Mais une valeur élevée de m signale également, selon la théorie, un prix futur faible, et, en fait, des termes de l'échange très favorables; d'où une forte augmentation de l'offre de travail, qui explique la faible valeur du prix présent. ⁴ Il est en particulier possible que les deux valeurs de m correspondant au même prix aujourd'hui. Le mécanisme est identique pour z [*i. e.* pour (ii)].

On dispose donc d'un ensemble de théories concurrentes (et contradictoires), mais possédant toutes la propriété d'autoréalisation — donc toutes *également compatibles* avec la rationalité des anticipations. Existe-t-il des raisons permettant de privilégier l'une de ces théories? Un argument possible est la *simplicité* supérieure de la théorie quantitative; mais le concept même de simplicité n'est pas clair et mériterait une analyse plus approfondie

3. Ceci n'est pas toujours vrai (*cf.* LUCAS [1972]). Cependant, la distribution lognormale utilisée ici, appartient à la classe des distributions « régulières » au sens de l'hypothèse 5.7 de Lucas.

4. En fait, on peut montrer que

$$\forall z > 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\frac{p(m, z)}{p(m.x, z')} / z \right] = +\infty$$

Cette propriété permet de mieux comprendre pourquoi l'offre de travail par tête augmente beaucoup avec m quand m est grand, bien que les prix actuels soient bas : intuitivement, une valeur élevée de m est associée à des « termes de l'échange » entre aujourd'hui et demain particulièrement favorables.

Un autre critère pourrait se fonder sur les propriétés qualitatives des différentes solutions; on pourrait, en particulier, ne retenir que celles qui présentent de « bonnes » propriétés probabilistes. Une première piste serait d'exiger que le processus stochastique qui gouverne l'évolution temporelle de l'offre de travail (voire, plus généralement, des principales variables macroéconomiques) soit tel que celle-ci demeure, au cours du temps, à l'intérieur d'un compact ne contenant pas zéro. Mais aucune solution ne passe ici ce test. En particulier, la solution de Lucas tend vers zéro ou l'infini avec la variable aléatoire autonome z , dont le support n'est pas borné, et ne peut donc pas posséder la propriété requise.

Une autre piste consisterait à imposer que ces processus stochastiques soient stationnaires au sens probabiliste, c'est-à-dire qu'ils admettent une distribution de probabilité invariante. Cette stationnarité peut être vue comme un renforcement de la condition d'autonomie que nous avons imposée par construction à nos solutions. Ce critère conduirait ici à privilégier la solution de Lucas, pour laquelle le processus de l'offre de travail est trivialement stationnaire (bien que le processus suivi par le prix ne le soit pas). Cependant, une telle exigence peut paraître particulièrement sévère dans notre contexte, où le processus suivi par la masse monétaire, s'il est bien autonome, n'est pas stationnaire de par la nature même de la construction de Lucas. En particulier, ce critère a pour conséquence d'interdire que l'offre de travail puisse dépendre de la quantité de monnaie, ce qui est clairement très restrictif. En outre, on pourrait montrer qu'en introduisant une dose, même minime, de non homogénéité dans l'économie considérée, le critère éliminerait à nouveau toutes les solutions candidates (CHIAPPORI, GUESNERIE [1988]).

Dans un autre ordre d'idées, on peut introduire des considérations de bien-être : certaines théories sont-elles socialement plus efficaces (en un sens à préciser) que les autres ?

La réponse dépend *a priori* du critère de bien-être retenu, donc de l'interprétation précise que l'on donne du modèle. Par exemple, la présentation de Lucas — population divisée entre deux îles à la naissance, puis répartie à nouveau à la vieillesse — conduit à des développements relativement complexes. Nous utiliserons ici une interprétation beaucoup plus simple, en supposant la population d'une génération donnée constante sur les deux périodes.

Pour chaque génération, l'offre de travail de chaque agent, pendant sa jeunesse, est $y = \varphi(m, z)$ (m étant la masse monétaire précédente). En seconde période, la production totale est $\theta' \varphi(mx, z')$, d'où une consommation par tête (de vieux) égale à $\theta'/\theta \varphi(mx, z')$.

L'espérance d'utilité (*ex ante*) de chaque agent est donc

$$(23) \quad E(U) = E \left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z') \right] - \frac{1}{2} E[\varphi(m, z)^2]$$

(l'espérance étant prise par rapport à z , θ , z' et θ').

La proposition suivante montre que l'on peut classer les théories d'après ce critère.

PROPOSITION 6 : Le bien-être *ex ante*, défini comme ci-dessus, est une fonction croissante de u_1 . En particulier, toute solution non fortement neutre domine la solution de Lucas.

Démonstration : L'équation de base, (4), s'écrivait

$$E_{\theta, \theta', z'} \left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z')/z \right] = \varphi(m, z)^2.$$

En prenant l'espérance (par rapport à z) des deux membres

$$E_z \left[E_{\theta, \theta', z'} \left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z')/z \right] \right] = E_z [\varphi(m, z)^2].$$

D'après une priorité classique des espérances conditionnelles, ceci équivaut à :

$$E_{\theta, z, \theta', z'} \left[\frac{\theta'}{\theta} \varphi(mx, z') \right] = E_{\theta, z, \theta', z'} [\varphi(m, z)^2]$$

(23) devient donc

$$E(U) = \frac{1}{2} E[\varphi(m, z)^2].$$

On a vu que, pour tout m et tout z , $\varphi(m, z)$ était croissante en u_1 ; il en est de même de l'utilité espérée. \square

L'idée de la démonstration est donc que l'utilité espérée est corrélée positivement avec le niveau de production par tête; or celui-ci est supérieur pour les théories non neutres. De façon plus intuitive, on peut relier ce résultat à la variance plus faible des prix futurs dans les solutions non neutres (l'ensemble des prix possibles y étant borné).

7 Quelques remarques sur le choix du signal

On peut enfin revenir brièvement aux hypothèses faites sur l'information dont disposent les agents (et sur laquelle ils fondent leur décision). Dans l'article, nous avons supposé que celle-ci se limitait à la valeur de z , ce qui nous a conduit à étudier l'équation :

$$(1) \quad E \left[\frac{px'}{x'/z} \right] = \frac{mx}{p\theta}.$$

Cette hypothèse d'observabilité exclusive de z peut, nous l'avons dit, être justifiée de deux façons. Une première interprétation pose que mz , n'étant autre que la quantité de monnaie par tête de jeune, mesure la pression de la demande, et peut donc être déduit de l'état du marché *avant* le début des transactions. Cette version a l'avantage d'éviter les difficultés conceptuelles de la transmission d'information par les prix.

Cependant, cette première interprétation, prise *stricto sensu*, paraît reposer sur une *hypothèse de non-observabilité des prix*, et donc aller à rebours d'une tradition établie de la littérature du domaine. Il est donc important de souligner que *cette non-observabilité n'est nullement nécessaire* à notre propos. Une seconde justification de l'équation (1), compatible avec l'observation des prix, est en effet la suivante. Considérons certaines variantes de l'équation de base, fondées sur d'autres ensembles d'information

$$(2') \quad E\left(\frac{px'}{p'}/p\right) = \frac{mx}{p\theta}$$

$$(3') \quad E\left(\frac{px'}{p'}/z, p\right) = \frac{mx}{p\theta}$$

$$(4') \quad E\left(\frac{px'}{p'}/z, y\right) = \frac{mx}{p\theta}$$

$$(5') \quad E\left(\frac{px'}{p'}/p, y\right) = \frac{mx}{p\theta}$$

La version (2') est directement déduite de la formalisation de Lucas, et revient à supposer que les agents n'observent que le prix d'équilibre. Par ailleurs, les équations (3'), (4') et (5') sont équivalentes (car $p_t y_t = m_{t-1} z_t$, où m_{t-1} est connu); elles traduisent l'hypothèse que les agents observent à la fois les prix et les quantités offertes sur le marché du travail.

Le point essentiel est alors le suivant : *chacune des solutions décrites plus haut est également solution des équations (3'), (4') et (5')*. Autrement dit, nos conclusions, – et notamment l'existence d'un continuum de solutions – restent valides sous différentes hypothèses informationnelles. Dans le cas des équations (3'), (4') ou (5'), on peut donner l'interprétation suivante :

- les agents observent à la fois prix et quantité;
- ils ont une « croyance » (ou forment une « théorie ») selon laquelle, dans l'information disponible, seule la valeur de z_t (qui s'en déduit) est pertinente pour prédire les termes de l'échange inter-périodes.
- Cette croyance est *rationnelle* (ou encore : cette théorie est autoréalisatrice), car elle engendre une famille de solutions (décrites plus haut) qui sont effectivement solutions de (3'), (4') et (5').

Évidemment, cette croyance n'est pas nécessairement la *seule* croyance rationnelle; en d'autres termes, les équations (3'), (4') et (5') pourraient admettre d'autres solutions que celles de (1). Cette remarque, pour l'essentiel, transpose un argument connu de J. M. Grandmont (*voir* LUCAS [1983]). Elle ne donne que plus de poids à notre conclusion de non unicité (et, en fait, d'indétermination) de l'équilibre à anticipations rationnelles dans ce modèle.

Il est important de remarquer, en revanche, que les solutions de (1) ne sont *pas* (la solution « Lucas » exceptée) solutions de (2'). Le phénomène, ici, est inverse du précédent. La forme des solutions montre clairement que l'information contenue dans le prix est *insuffisante* pour révéler totalement z ; sauf dans le cas Lucas, en effet, la fonction $\psi(m, z)$ n'est pas injective en z , donc p ne détermine pas z de façon biunivoque.

Conclusions

En conclusion, il convient de resituer cette étude dans l'effort contemporain d'analyse des équilibres à anticipations rationnelles. Sa contribution se situe, nous semble-t-il, à deux niveaux.

Tout d'abord, elle apporte des éléments nouveaux à la compréhension des solutions de l'équation fonctionnelle de LUCAS [1972]. En nous situant dans un modèle spécifique — le seul, à notre connaissance, où une solution de cette équation ait été exprimée sous forme analytique —, nous avons exhibé, toujours sous forme analytique, une famille unidimensionnelle d'autres solutions de l'équation fonctionnelle de base. En restant sur le terrain de l'existence (et sans préjuger des résultats d'une discussion ultérieure sur la « plausibilité » plus ou moins grande de telles solutions), l'étude illustre donc le problème de l'« indétermination » des équilibres à anticipations rationnelles, et fournit des repères pour une discussion plus approfondie de cette question.

En second lieu, l'article propose une méthode originale pour l'étude d'équations fonctionnelles issues de la théorie des anticipations rationnelles. Bien que la méthode repose sur une identification de coefficients indéterminés, elle a peu de rapport avec les études antérieures effectuées dans le cadre des modèles linéaires. La difficulté analytique de la méthode est en particulier très supérieure, puisqu'il faut identifier un nombre infini de coefficients, et surtout démontrer que la série entière ainsi construite a le rayon de convergence adéquat.⁵ En ce sens, notre étude illustre les difficultés de cette méthode constructive, mais aussi démontre sa faisabilité et souligne ses avantages.

Finalement, une réflexion plus approfondie sur le statut théorique exact de nos solutions fait l'objet d'une autre contribution (CHIAPPORI-GUESNERIE [1989]). Quelques repères peuvent cependant déjà être fournis.

5. En fait, la propriété de convergence est forte, et nullement garantie *a priori*. Par exemple, Poincaré a souligné que dans toute une gamme de situations — et notamment pour le célèbre problème des trois corps —, toutes les séries entières obtenues par identification dans l'équation fonctionnelle du problème étaient divergentes, ce qui interdisait l'emploi de ces techniques — ce, bien que le problème ait évidemment des solutions!

En premier lieu, les solutions présentées ici combinent (comme dans l'article initial de Lucas) les effets d'un choc réel et d'un choc monétaire. Pour les situer par rapport à une partie de la littérature théorique sur le modèle à générations, il est utile de considérer le cas limite d'absence de choc réel (*cf.* corollaire 5). Il faut cependant noter que l'un des intérêts de nos calculs est bien de montrer comment les effets monétaires et réels se conjuguent dans le cas des solutions hétérodoxes (et en comparaison avec les solutions de Lucas).

Si l'on élimine le choc réel du modèle, chaque membre de notre famille de solutions peut être vue comme un équilibre à taches solaires : bien que la monnaie soit une variable intrinsèque dans le modèle avec chocs réels, elle peut être vue comme extrinsèque quand on fait abstraction de ces chocs (à nouveau, voir CHIAPPORI-GUESNERIE [1988]). Si les phénomènes de non neutralité mis en évidence tiennent donc au rôle de signal extrinsèque que les agents font jouer à la monnaie – en sus de ses autres rôles dans le modèle – la question du statut exact de nos solutions par rapport aux solutions à taches solaires traditionnelles reste posée. On peut faire deux observations :

- il est clair que les solutions présentées ici sont, **par nature**, différentes des équilibres à taches solaires à la AZARIADIS-GUESNERIE [1982], qui requièrent une offre de travail courbée vers l'arrière. Elles diffèrent également des solutions de FARMER-WOODFORD [1985] et GRANDMONT [1986], dans lesquelles l'introduction de dépenses gouvernementales déplace l'équilibre initialement autarcique vers un équilibre à production positive, autour duquel des taches solaires de type traditionnel apparaissent.

- Ces solutions peuvent paraître plus proches des équilibres construits par PECK [1985] dans le cadre de la version de base du modèle à générations. Mais la ressemblance est superficielle. Tout d'abord, la méthode utilisée par Peck permet de démontrer l'existence de solutions à taches solaires, **mais elle ne permet jamais une caractérisation globale de la fonction (ou de la « théorie ») solution** – ce qui est justement l'un des objectifs de notre article. Ensuite et surtout, la construction de Peck, plus élémentaire, conduit à des solutions dont les propriétés stochastiques sont extrêmement particulières (elles convergent vers l'autarcie avec probabilité 1). A l'inverse, les solutions décrites dans notre article sont autonomes au sens probabiliste, et présentent des propriétés stochastiques de type marche aléatoire; en particulier, pour deux ouverts quelconques appartenant à l'image d'une solution, la probabilité, partant du premier, d'atteindre le second en un temps fini est strictement positive. Plus précisément, le processus stochastique suivi par les variables endogènes reproduit, sur un support particulier que nos équations caractérisent, le processus (non stationnaire) suivi par le choc exogène.

C'est donc bien à une classe originale d'équilibres à taches solaires, que les solutions calculées ici peuvent être rattachées ou si l'on préfère « connectées », quand on passe d'un modèle à génération sans information incomplète au modèle de Lucas.

Ce point est clairement étayé par la classification proposée dans CHIAPPORI-GUESNERIE [1988]. Nos solutions apparaissent comme associées (dans un espace adéquat) à des trajectoires hétérocliniques d'un système dynamique alors que les équilibres traditionnels apparaîtraient comme des

points (quasi)-stationnaires de ce même système. En particulier, le caractère non borné de l'offre de travail dans nos solutions, s'il en limite le réalisme économique immédiat, ne permet pas en revanche de conclure à leur atypisme. (Ici le point à l'infini est simplement un point fixe particulier du système.)

Cependant, il reste à savoir si l'hypothèse faite sur les aléas – le processus déterminant les croyances est une marche aléatoire – est décisive pour l'existence de ce type de solution. Cette question reste ouverte.

1. Calcul de $E\left[\frac{x^s}{\theta}\right]$

On considère l'application $T : (x, \theta) \Rightarrow (a, z) = \left(x^s, \frac{x}{\theta}\right)$.

Le jacobien de T est : $J_t = -\frac{s}{\theta^2} x^s = -s a^{1-2/s} z^2$.

La densité du couple (a, z) est donc :

$$f(a, z) = \frac{1}{s} a^{-1+2/s} z^{-2} f_x(a^{1/s}) f_\theta\left(\frac{a^{1/s}}{z}\right).$$

D'où la densité conditionnelle de a par rapport à z :

$$f(a/z) = a^{-1+2/s} f_x(a^{1/s}) f_\theta\left(\frac{a^{1/s}}{z}\right) \left[\int a^{-1+2/s} f_x(a^{1/s}) f_\theta\left(\frac{a^{1/s}}{z}\right) da \right]^{-1}$$

et l'espérance conditionnelle :

$$E(x^s/z) = \frac{\int a^{2/s} f_x(a^{1/s}) f_\theta\left(\frac{a^{1/s}}{z}\right) da}{\int a^{-1+2/s} f_x(a^{1/s}) f_\theta\left(\frac{a^{1/s}}{z}\right) da}$$

ou, si $t = a^{1/s}$:

$$E(x^s/r) = \frac{\int t^{s+1} f_x(t) f_\theta\left(\frac{t}{z}\right) dt}{\int t f_x(t) f_\theta\left(\frac{t}{z}\right) dt}$$

Soit N le numérateur du membre de droite. En utilisant le fait que les lois de x et θ sont lognormales :

$$N = \frac{z}{2\pi\sigma\mu} \int t^{s-1} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left(\text{Log } t + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\mu^2} \left(\text{Log } t + \frac{\mu^2}{2} - \text{Log } z\right)^2 \right\} dt$$

ou, si $u = \text{Log } t$:

$$N = \frac{z}{2\pi\sigma\mu} \int \exp\left\{ su - \frac{1}{2\sigma^2} \left(u + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\mu^2} \left(u + \frac{\mu^2}{2} - \text{Log } z\right)^2 \right\} du,$$

d'où, après quelques agréables calculs :

$$N = \frac{z}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{\alpha - 1}{2\mu^2} \text{Log}^2 z \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + \alpha(s-1) \right) \text{Log} z - \frac{\mu^2 + \sigma^2}{8} + \alpha \frac{\mu^2}{2} (k-1)^2 \right\}$$

avec $\alpha = \sigma^2 / (\mu^2 + \sigma^2)$. Alors :

$$E(x^s/z) = \exp \left\{ \frac{\alpha \mu^2}{2} (s^2 - 2s) z^{\alpha s} \right\}$$

Enfin,

$$E\left(\frac{x^s}{\theta}\right)/z = E(z \cdot x^{z^{-1}}/z) = z E(x^{s-1}/z) \\ = \exp \left\{ \frac{\alpha \mu^2}{2} (s^2 - 4s + 3) \right\} z^{\alpha s + (1-\alpha)} = A^{s^2 - 4s + 3} z^{\alpha s + \beta}$$

avec $A = \exp \left\{ \alpha \frac{\mu^2}{2} \right\}$, $\beta = 1 - \alpha$.

2. Calcul de $[z^{\alpha s + \beta/2} \theta]$

Pour tout s , on a :

$$E[x^s] = \int \frac{x^s}{x \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left(\text{Log} x + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right\} dx$$

Pour $t = \text{Log} x$:

$$E[x^s] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int \exp \left\{ st - \frac{1}{2\sigma^2} t \left(t + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right\} dt = \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2} (s^2 - s) \right\},$$

et, de même :

$$E[\theta^s] = \exp \left\{ \frac{\mu^2}{2} (s^2 - s) \right\}.$$

Comme x et θ sont indépendants :

$$E[z^{\alpha s + \beta/2} \theta] = E[x^{\alpha s + \beta/2}] E[\theta^{1 - \alpha s - \beta/2}] = B \cdot C^{s^2 - s}$$

avec

$$B = \exp \left\{ -\frac{\mu^2 \mu^2 + 2\sigma^2}{8 \mu^2 + \sigma^2} \right\}, \quad C = \exp \left\{ \frac{\sigma^4}{2(\mu^2 + s^2)} \right\}.$$

● Références bibliographiques

- AUSUBEL, L. (1984). – *Ph. D Dissertation*, Stanford University.
- AZARIADIS, C. (1981). – « A Reexamination of Natural Rate Theory », *American Economic Review*, 71 (5), p. 944-960.
- AZARIADIS, C. et GUESNERIE, R. (1982). – « Prophéties créatrices et persistance des théories », *Revue Économique*, 33, p. 787-806.
- BROZE, L., GOURIÉROUX, C. et SZAFARZ, A. (1985). – « Solutions of Linear Rational Expectations Models », *Econometric Theory*, I, p. 341-368.
- CHIAPPORI, P. A. et GUESNERIE, R. (1988). – « Self-Fulfilling Theories: the Sunspot Connection », *Mimeo*.
- FARMER, R. et WOODFORD, M., (1984). – « Self-Fulfilling Prophecies and The Business Cycle », *Working Paper*, 84-12, Univ. of Pennsylvania.
- GRANDMONT, J. M. (1985). – « On Endogenous Competitive Business Cycles », *Econometrica*, 55, p. 995-1047.
- LUCAS, R. E. (1972). – « Expectations and the Neutrality of Money », *Journal of Economic Theory*, 4, p. 103-124.
- LUCAS, R. E. (1983). – « Expectations and the Neutrality of Money: Corrigendum », *Journal of Economic Theory*, 31, p. 197-199.
- PECK, J. (1986). – « On the Existence of Sunspot Equilibria in an Overlapping Generation Model », *Journal of Economic Theory*, 44 (1).
- POINCARÉ, H. (1890). – « Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps », *Acta Math.*, 13, p. 1-270.
- WOODFORD, M. (1984). – « Indeterminacy of Equilibrium in the Overlapping Generations Model: A Survey », *Mimeo*, Columbia University.