ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 18 — 1990

Sélection adverse et aversion pour le risque

Bernard SALANIÉ *

RÉSUMÉ. – Cet article présente un modèle principal-agent simple où l'agent reçoit un signal privé après la signature du contrat; son aversion pour le risque joue alors un rôle déterminant dans la caractérisation du contrat optimal. De fait, ce dernier sera imparfaitement séparateur si l'indice absolu d'aversion pour le risque de l'agent est suffisamment élevé, au contraire des deux cas polaires d'aversion pour le risque nulle et infinie où la séparation est parfaite. L'exemple étudié montre donc que les deux cas extrêmes n'épuisent pas la richesse des situations possibles; il permet également d'obtenir des résultats de statique comparative en faisant varier l'aversion pour le risque de l'agent.

Adverse Selection with a Risk-Averse Agent

ABSTRACT. – The purpose of this paper is to study a simple example of an adverse selection problem in a Principal-Agent relationship, where uncertainty is not resolved at the time the contract is signed. It is shown that the agent's risk-aversion then plays a critical role in determining the shape of the optimal contract; more precisely, a bunching phenomenon will occur for large (but finite) values of the agent's absolute index of risk-aversion. Since this phenomenon is absent in the two extreme cases of zero or infinite risk-aversion, it is argued that one would miss important points in focussing on these (simpler) cases, as is usually done.

* B. SALANIÉ. – INSEE, Paris. Ce travail prend son origine dans un groupe de travail animé par Michel Dietsch et Patrick Rey à l'ENSAE. Leurs remarques et celles de Jean-Charles Rochet ont largement contribué à améliorer cet article; les imperfections qui y subsistent me sont entièrement imputables.

1 Introduction

La littérature portant sur la sélection adverse s'est généralement placée dans le cadre où la partie informée l'est *avant* la signature du contrat. Il est cependant nombre de situations où il est plus réaliste de supposer que l'information privée n'est acquise qu'*après* que le contrat a été signé; c'est par exemple le cas pour les relations entre un producteur et ses distributeurs, où les conditions des fournitures sont généralement décidées avant le début de la campagne de ventes, et donc à un moment où la demande finale est très incertaine pour les deux parties. En revanche, le producteur comme le distributeur savent que ce dernier aura une meilleure appréhension de l'importance de la demande après le début de la campagne, et ces anticipations sont à l'arrière-plan des négociations préalables à la signature du contrat.

Dans un tel cas de figure, les parties contractantes ont des perspectives incertaines au moment de la conclusion d'un accord, si bien que la forme de celui-ci dépendra à la fois de la prise en considération des problèmes de révélation d'information et du partage du risque. L'aversion pour le risque des diverses parties prenantes sera donc un élément essentiel de l'analyse menée ici.

Il est probablement impossible d'obtenir des résultats pertinents dans un cadre aussi général; aussi nous limiterons-nous à l'étude de l'exemple d'un monopole en chaîne. La paramétrisation de l'indice absolu d'aversion pour le risque du distributeur permet alors d'examiner en détail la façon dont la forme du contrat optimal dépend de l'importance attachée au partage du risque.

Les situations qui ont été analysées dans la littérature correspondent parfois au cas de neutralité vis-à-vis du risque, mais le plus souvent au cas d'aversion infinie pour le risque (ce dernier cas est en fait formellement isomorphe au problème de sélection adverse habituel, où l'agent acquiert son information privée avant la signature du contrat). Dans ces deux cas, le contrat optimal est pleinement séparateur dans le modèle étudié, et l'information est totalement révélée. Cette propriété importante ne résiste pas à l'introduction d'une aversion pour le risque suffisante (mais finie) : le volume des ventes sera alors indépendant de l'état de la demande si celle-ci est assez déprimée.

Ce résultat dépend naturellement de la spécification particulière de l'exemple étudié. Il suggère néanmoins que les résultats obtenus dans les modèles usuels ne sont pas nécessairement robustes vis-à-vis de l'introduction d'aversion pour le risque : la forme du contrat optimal peut être très différente de ce qu'on attendrait après examen des cas extrêmes d'aversion pour le risque nulle ou infinie.

Le modèle étudié est présenté dans la section 2. Le programme que doit résoudre le producteur est obtenu dans la section 3 et résolu dans la section 4. Enfin, la section 5 établit des résultats de statique comparative qui montrent comment le contrat optimal réagit à des variations de l'aversion pour le risque du distributeur.

2 Le modèle

Le modèle étudié est dérivé de REY-TIROLE [1987]. Nous considérons l'exemple d'un monopole en chaîne. [1] Un bien unique est produit par un industriel à un coût marginal constant c et distribué par des détaillants à un coût nul (l'introduction de coûts de production et de distribution quadratiques ne modifierait aucunement les résultats présentés). Chaque distributeur reçoit une demande $D(p)=u-p$, où p est le prix pratiqué au détail et u est un paramètre qui reflète l'intensité de la demande locale. Au moment de la signature du contrat, toutes les parties ont une croyance *a priori* sur $\underline{u}$ qui est uniforme dans un intervalle $[\underline{u}, \bar{u}]$. [2] Le distributeur apprend la vraie valeur de u au début de la campagne de vente; mais le producteur ne pourra acquérir d'information sur u qu'à travers le détaillant.

On supposera que les prix pratiqués au stade du détail ne sont pas vérifiables; le contrat ne peut donc être fondé que sur la quantité du bien achetée au producteur. Enfin, le producteur peut observer la quantité vendue par chaque détaillant, [3] et peut donc utiliser des contrats non linéaires quelconques : les détaillants ne peuvent pas se livrer à des activités d'arbitrage.

Formellement, un contrat sera donc une fonction $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\Phi(x)$ est le transfert du distributeur au producteur quand il lui achète une quantité x de bien.

Il nous reste à spécifier des fonctions d'utilité ex ante; nous supposerons que le producteur est neutre vis-à-vis du risque (par exemple parce qu'il a de nombreux distributeurs dont les aléas sont indépendants) et que les distributeurs ont une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern à indice d'aversion absolue pour le risque constant :

$$U_\sigma(t)=1-e^{-\sigma t}.$$

La paramétrisation choisie nous permettra d'étudier les variations du contrat optimal quand l'aversion pour le risque du distributeur (σ) augmente de 0 à l'infini. (Il est à noter que $\sigma=\infty$ redonne le modèle standard de la

1. On peut par exemple considérer le cas d'un producteur monopolistique qui a passé un accord de territoires exclusifs avec ses distributeurs, si bien que chacun d'entre eux est en situation de monopole local.
2. Nous supposerons que $\underline{u}>u>c$, de sorte qu'il est toujours profitable de produire.
3. Par exemple parce que chaque acheteur du bien doit renvoyer une preuve d'achat au producteur pour avoir droit à une garantie.

littérature, où les perspectives de l'agent ne sont pas aléatoires au moment de la signature du contrat.)

3 Le programme du producteur

De par le principe de révélation et le principe de taxation, la recherche du contrat optimal équivaut à la caractérisation du mécanisme révélateur direct optimal. Les recettes d'un détaillant qui vend x unités du bien sont $(u-x)x$; puisque la communication entre les parties doit prendre place après que le distributeur a appris la vraie valeur de u, un mécanisme révélateur direct sera donc un couple de fonctions (x, φ) de $[\underline{u}, u]$ vers $(\mathbb{R}^+)^2$ tel que :

$$\text{(R)} \quad \forall u, \hat{u}, \quad (u-x(u))\,x(u)-\varphi(u) \geqslant (u-x(\hat{u}))\,x(\hat{u})-\varphi(\hat{u}).$$

Les fonctions x et φ pourraient *a priori* être aléatoires; la condition (R) devrait alors être réécrite en termes d'espérances d'utilité du profit. Il est facile de voir que si le distributeur est neutre vis-à-vis du risque, tout mécanisme stochastique (x, φ) est Pareto-dominé par le contrat certain $(\mathrm{E}\,x, \mathrm{E}\,\varphi+\mathrm{Var}(x))$. Il n'est pas certain que ce type de résultat s'étende aux cas d'aversion pour le risque positive du distributeur : l'utilisation d'un mécanisme stochastique est coûteuse en termes d'assurance du distributeur, mais elle pourrait permettre de relâcher les conditions d'incitation. Nous nous limiterons par la suite à l'étude des mécanismes non stochastiques.

Soit $\mathrm{V}(u)=(u-x(u))\,x(u)-\varphi(u)$ le profit du détaillant lorsqu'il annonce la vraie valeur de u; la condition (R) équivaut à :

pour tous u, $\hat{u}$

$$\mathrm{V}(u) \geqslant \mathrm{V}(\hat{u})+(u-\hat{u})\,x(\hat{u}),$$

ou encore à (voir par exemple LOLLIVIER-ROCHET [1983]) :

V est convexe et pour tout u, $x(u)$ est un sous-gradient de V en u.

Nous nous limiterons dans ce qui suit aux mécanismes continus et différentiables par morceaux, qui permettent d'utiliser l'appareil du contrôle optimal.

Sous ces hypothèses, on peut appliquer des résultats connus : comme les conditions de Spence-Mirrlees [4] sont vérifiées, un mécanisme (x, φ) sera

4. Dites « single-crossing conditions »; voir MIRRLEES [1976].

révélateur si et seulement si, en tout point où le mécanisme est différentiable :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}=(u-2x)\dot{x} & \text{(condition du premier ordre)} \\ \dot{x}\geqslant 0 & \text{(condition du second ordre).} \end{cases}$$

Le programme du producteur est complété par la spécification de la contrainte de participation de l'agent; la forme de cette contrainte dépend de manière cruciale de son aversion pour le risque.

1. *Les cas polaires : $\sigma=0$ ou l'infini*

On sait (SHAVELL [1979]) que la sélection adverse ne pose pas de problème lorsque l'agent est neutre vis-à-vis du risque; sa fonction d'utilité est $U_0(t)=t$ et sa contrainte de participation s'écrit

$$EV(u)\geqslant 0.$$

Le principal peut alors simplement « vendre l'entreprise à l'agent », c'est-à-dire s'assurer parfaitement en adoptant un tarif binôme $\Phi(x)=A+cx$. L'agent supporte tout le risque, achète la quantité optimale (de premier rang) $x=\dfrac{u-c}{2}$ et obtient un profit nul en espérance.

Le cas où l'agent a une aversion pour le risque infinie est plus intéressant. Sa contrainte de participation est :

$$\underset{u\in[\underline{u},\,\bar{u}]}{\text{Min}}\ V(u)\geqslant 0.$$

Le programme du producteur est alors formellement équivalent à celui qu'il devrait résoudre si l'agent acquérait son information privée avant la signature du contrat. Cette dernière situation a été largement étudiée dans la littérature; en appliquant les résultats de GUESNERIE-LAFFONT [1984], on trouve facilement que le tarif optimal est une fonction quadratique de la quantité achetée et conduit à la production sous-optimale :

$$x(u)=u-\frac{\bar{u}+c}{2}.$$

2. *Le cas général*

Quand l'agent a une aversion pour le risque positive mais finie, sa contrainte de participation est :

$$EU_\sigma(V(u))\geqslant 0,$$

soit

$$E\,e^{-\sigma V(u)}\leqslant 1.$$

Le programme du producteur est donc, pour $0<\sigma<+\infty$:[5]

$$\left\{\begin{array}{l} \underset{x,\,\varphi}{\operatorname{Max}} \dfrac{1}{\bar{u}-\underline{u}} \displaystyle\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} (\varphi - cx)\, du \\ \dot{\varphi} = (u-2x)\,\dot{x} \\ \dot{x} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{\bar{u}-\underline{u}} \displaystyle\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} e^{-\sigma V}\, du = 1, \qquad \text{avec} \quad V(u) = (u - x(u))\, x(u) - \varphi(u). \end{array}\right.$$

On peut réécrire ce programme sous la forme d'un problème de contrôle optimal avec x et φ pour variables d'état et $z=\dot{x}$ pour variable de contrôle, et lui appliquer le principe de Pontryagin; soit, en notant $\Delta = \bar{u}-\underline{u}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underset{x,\,\varphi,\,z}{\operatorname{Max}} \displaystyle\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} (\varphi - cx)\, du & \\ \dot{x} = z & (\lambda(u)) \\ \dot{\varphi} = (u-2x)\, z & (\mu(u)) \\ z \geqslant 0 & \\ \displaystyle\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} e^{-\sigma V}\, du = \Delta & (\theta). \end{array}\right.$$

Le hamiltonien du problème est

$$H = \lambda z + \mu(u-2x)z + \lambda_0(\varphi - cx) - \theta e^{-\sigma V},$$

où $\theta \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, et les conditions nécessaires d'optimalité sont :

* z maximise le hamiltonien : $\lambda + \mu(u-2x) \leqslant 0$ partout, et :

$$\lambda + \mu(u-2x) < 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

* λ and μ sont continus et différentiables par morceaux; de par les conditions de tranversalité, ils sont nuls en $\underline{u}$ et $\bar{u}$.

* sur chaque intervalle où z est continue,

$$\left[\begin{array}{l} \dot{\lambda} = -H_x = 2\mu z + \lambda_0 c - \theta\sigma(u-2x)\, e^{-\sigma V} \\ \dot{\mu} = -H_\varphi = -\lambda_0 + \theta\sigma e^{-\sigma V}. \end{array}\right.$$

5. Il est clair que puisque la fonction d'utilité de l'agent est multiplicativement séparable en φ, la contrainte de participation de l'agent est saturée à l'optimum.

4 La solution

Notons d'abord que λ_0 ne peut être nul; en effet,

$$0 = \mu(\bar{u}) - \mu(\underline{u}) = -\lambda_0 \Delta + \theta\sigma\Delta,$$

donc $\lambda_0 = \theta\sigma$, et $\lambda_0 = \theta\sigma = 0$ impliquerait $\lambda \equiv \mu \equiv \theta \equiv 0$, soit la nullité de tous les multiplicateurs, ce qui est impossible.

On peut donc normaliser par $\lambda_0 = 1$, ce qui donne $\theta = \dfrac{1}{\sigma}$.

Définissons la fonction $h(u) = \lambda(u) + \mu(u)(u - 2x(u))$; h doit être nulle sur tout intervalle où $z = \dot{x}$ est positive, si bien que :

$$0 = \dot{h} = \dot{\lambda} + \dot{\mu}(u - 2x) + \mu(1 - 2\dot{x}) = \mu - u + 2x + c,$$

d'où

$$\mu = u - 2x - c \qquad \text{et} \qquad 1 - 2\dot{x} = \dot{\mu} = -1 + e^{-\sigma V}.$$

Mais la condition du premier ordre du problème d'incitation donne $\dot{V} = x$, et donc :

$$-2\ddot{x} = -\sigma x e^{-\sigma V} = -\sigma x(2 - 2\dot{x}),$$

et la solution en x doit vérifier l'équation différentielle $\ddot{x} = \sigma x(1 - \dot{x})$ sur tout intervalle où elle est strictement croissante.

(Puisque $0 < e^{-\sigma V} = 2 - 2\dot{x}$, on a nécessairement $0 < \dot{x} < 1$ et x doit donc être convexe croissante sur chacun de ces intervalles.)

Nous allons maintenant montrer que $\dot{x}$ ne peut être nul que sur un intervalle du type $[\underline{u}, u^*]$, si bien que le contrat optimal est parfaitement séparateur « en haut ».

Pour le voir, supposons qu'il existe au contraire trois points u_1, u_2, u_3 tels que x est strictement croissante sur $]u_1, u_2[$ et constante sur $]u_2, u_3[$. Nous savons que la fonction h est négative ou nulle, continue et différentiable par morceaux, et qu'elle doit être nulle sur $]u_1, u_2[$; on peut de plus calculer $\ddot{h} = e^{-\sigma V} - 2(1 - \dot{x})$ en tout point où $\dot{x}$ est continue.

Mais puisque V est continue,

$$\ddot{h}(u_2^-) = 0 = e^{-\sigma V(u_2)} - 2(1 - \dot{x}(u_2^-)) > e^{-\sigma V(u_2)} - 2 = \ddot{h}(u_2^+),$$

où $\ddot{h}(u_2^-)$ and $\ddot{h}(u_2^+)$ sont les limites à gauche et à droite de $\ddot{h}$ en u_2.

De plus, la dérivée troisième de h est négative, si bien que $\ddot{h}$ reste négative jusqu'en u_3^-, d'où $h(u_3^-) < 0$. De par la continuité de h, x doit donc rester constante après u_3, et de proche en proche jusqu'en $\bar{u}$, ce qui est une contradiction puisque la condition de transversalité implique que $h(\bar{u}) = 0$.

La solution ne peut donc qu'être constante sur un intervalle (qui peut être vide), puis strictement croissante sur son complément dans $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Plus précisément, nous avons montré que :

PROPOSITION 1 : La solution x doit avoir la forme suivante, pour un $u^* \in [\underline{u}, \bar{u}]$ et un $x^* > 0$:

* sur $[\underline{u}, u^*]$, $x(u) = x^*$
* sur $]u^*, \bar{u}]$, $x(u)$ est donné par la solution à :

$$(D^*) \begin{cases} \ddot{x} = \sigma x (1 - \dot{x}) \\ 0 < \dot{x} < 1 \\ x(u^*) = x^* \\ x(\bar{u}) = \dfrac{\bar{u} - c}{2}. \end{cases}$$

Les conditions nécessaires sont alors :
(1) $\dot{x} \geqslant 0$ partout;
(2) λ and μ sont continues en u^*.

L'application d'un théorème d'Arrow (voir SEIERSTAD-SYDSAETER [1987, p. 186]), [6] permet de vérifier facilement que les conditions 1 et 2 suffisent en fait à caractériser la solution unique (si elle existe) du programme du producteur. [7] On peut également montrer que la solution est continue en σ (y compris en $\sigma = +\infty$).

Pour rentrer plus en détail dans la description de la solution, il nous faut étudier le système différentiel (D*). L'existence et l'unicité d'une solution à des systèmes de ce type (non linéaire du second ordre, avec conditions aux deux bords) ne sont assurées à notre connaissance par aucun théorème général; il est d'ailleurs facile de trouver des exemples où la solution n'existe pas ou est multiple. Les résultats que nous allons établir sont résumés dans la proposition 7 et la figure 2; le lecteur peut utilement s'y reporter avant de suivre les arguments techniques qui vont maintenant être donnés. Nous utiliserons un lemme préliminaire :

LEMME 2 : Si une fonction x vérifie $\ddot{x} = \sigma x (1 - \dot{x})$, alors $(1 - \dot{x})$ a un signe constant.

Démonstration : Soit $y = 1 - \dot{x}$; alors $\dot{y} = -\sigma x y$, qui s'intègre en

$$y(u) = y(u_0) \exp\left[\int_{u_0}^{u} \sigma x(t)\, dt\right] \quad \text{pour tous } u_0, u,$$

d'où le résultat. □

6. Les contraintes d'incitation n'étant pas concaves, le théorème de Mangasarian n'est pas applicable ici.
7. Pour pouvoir appliquer le théorème, il faut transformer la contrainte isopérimétrique en définissant une nouvelle variable d'état y dont la dérivée est $e^{-\sigma V}$; le hamiltonien maximisé en z est alors concave en (x, φ, y) d'où le résultat.

Soit, pour

$$u^* \in \left[\underline{u}, \frac{u+\bar{u}}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad x^* \in \left(u^* - \frac{\bar{u}+c}{2}, \frac{\underline{u}-c}{2}\right),^{8}$$

le système :

$$(\mathrm{L}^*) \begin{cases} \ddot{x} = \sigma x(1-\dot{x}), \\ x(u^*) = x^* \\ \dot{x}(u^*) = \dot{x}^* < 1. \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce système a évidemment une solution unique; [9] nous la noterons $x(., \dot{x}^*)$. Par le lemme 2, tout choix d'un $\dot{x}^* < 1$ tel que $x(\bar{u}, \dot{x}^*) = \frac{\bar{u}-c}{2}$ engendre une solution $x(., \dot{x}^*)$ à (D*), et vice-versa. [Les restrictions imposées dans (L*) au choix de (u^*, x^*) sont une conséquence des contraintes $\dot{x} < 1$ et $h(\underline{u}) \leqslant 0$]. Notre stratégie pour montrer l'existence d'une solution à (D*) sera donc d'étudier l'équation d'inconnue $\dot{x}^*$:

$$x(\bar{u}, \dot{x}^*) = \frac{\bar{u}-c}{2}.$$

Lemme 3 : La fonction $x(., \dot{x}^*)$ est strictement croissante en $\dot{x}^*$ (pour $\dot{x}^* < 1$).

Démonstration : Soient $\dot{x}_1^* < \dot{x}_2^* < 1$, et $x_i(.) = x(., \dot{x}_i^*)$ pour $i = 1, 2$. Si $\{u > u^* \; t.q. \; x_1(u) \geqslant x_2(u)\}$ est non-vide, soit u_0 sa borne inférieure. On a $x_1 < x_2$ sur $[u^*, u_0]$, et donc :

$$\int_{u*}^{u_0} \sigma x_1 < \int_{u*}^{u_0} \sigma x_2, \qquad \text{ou, par} \quad \ddot{x} = \sigma x(1-\dot{x}):$$

$$\int_{u*}^{u_0} \frac{\ddot{x}_1}{1-\dot{x}_1} < \int_{u*}^{u_0} \frac{\ddot{x}_2}{1-\dot{x}_2}$$

(le lemme 2 autorise la division par $(1-\dot{x})$).

En intégrant, on obtient :

$$\mathrm{Log}\frac{1-\dot{x}_1^*}{1-\dot{x}_1(u_0)} < \mathrm{Log}\frac{1-\dot{x}_2^*}{1-\dot{x}_2(u_0)}.$$

Mais puisque $1-\dot{x}_1^* > 1-\dot{x}_2^*$, on obtient $1-\dot{x}_1(u_0) > 1-\dot{x}_2(u_0)$, soit $\dot{x}_1(u_0) < \dot{x}_2(u_0)$, et $(x_1 - x_2)$ doit être localement décroissant en u_0, d'où une contradiction. □

---

8. On supposera $\underline{u} > \frac{\bar{u}+c}{2}$.

9. On peut voir en définissant la fonction $z = \dot{x}$ que (L*) devient une simple équation différentielle du premier ordre en (x, z).

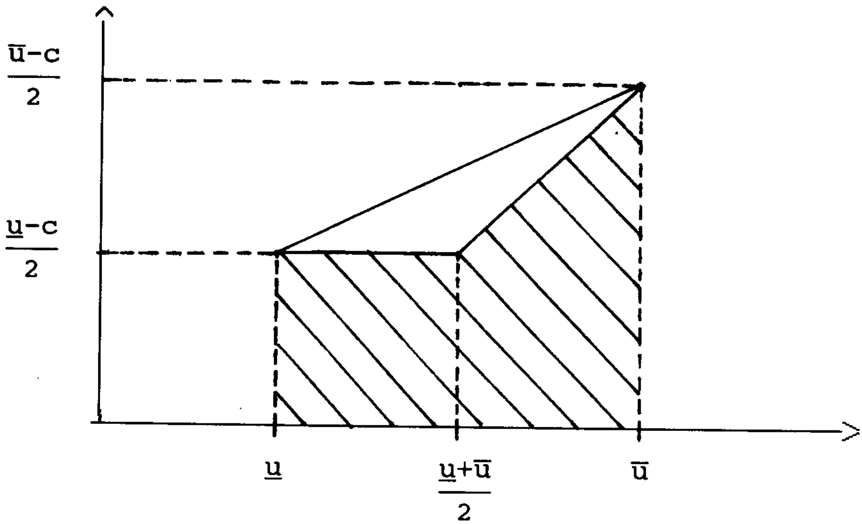

FIGURE 1

LEMME 4 : Si u^* et x^* vérifient les contraintes spécifiées dans (L*), (D*) a une solution unique.

Démonstration : Voir l'appendice.

Le lemme 4 valide nos définitions; il nous faut maintenant étudier la façon dont u^* et x^* varient avec σ. Les conditions de continuité de λ et μ en u^* et de non-négativité de $\dot{x}$ suffisent en théorie à déterminer u^* et x^*; en pratique, ces conditions sont trop compliquées pour être utilisables (si ce n'est par résolution numérique, comme nous le verrons plus loin), et nous nous limiterons à montrer que le contrat ne peut être parfaitement séparateur si σ est assez grand.

Puisque $\mu(u^{*+})=u^*-2x^*-c$ et $\lambda(u^{*+})=-(u^*-2x^*)(u^*-2x^*-c)$, λ et μ seront continus si on choisit $u^*=\underline{u}$ et $x^*=\frac{\underline{u}-c}{2}$; le contrat optimal sera donc parfaitement séparateur si et seulement si la solution du système (D*) correspondant est croissante. Soit $x(.,\sigma)$ cette solution; nous allons montrer qu'elle est croissante si et seulement si σ est inférieur ou égal à un $\sigma_0\in(0,+\infty)$.

LEMME 5 : Pour tout u $[\underline{u},\bar{u}]$ et tout σ positif, $\frac{\partial x}{\partial \sigma}(u,\sigma)\leqslant 0$.

Démonstration : Voir l'appendice.

Puisque $x(\underline{u},\sigma)$ est fixé en $\frac{\underline{u}-c}{2}$, le lemme 5 entraîne immédiatement que $\frac{\partial x}{\partial u}(\underline{u},\sigma)$ décroît en σ; mais $x(.,\sigma)$ est convexe, et sera donc croissante si et seulement si elle l'est en $\underline{u}$, c'est-à-dire si σ est suffisamment faible. Le lemme 6 conclut l'argument en montrant que $\frac{\partial x}{\partial \sigma}(\underline{u}, \sigma)$ devient négatif pour σ grand.

LEMME 6 : Il existe un σ tel que $\frac{\partial x}{\partial u}(\underline{u}, \sigma)<0$.

Démonstration : Fixons un σ quelconque et supposons $\frac{\partial x}{\partial u}(u, \sigma)\geqslant 0$; puisque $\frac{\partial x}{\partial u}\leqslant 1$, le graphe de x doit rester dans le triangle dessiné dans la figure 1.

$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x$ doit donc excéder la surface de la zone hachurée, soit :

$$\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x(u)\,du>\frac{\underline{u}-c}{2}\Delta+\frac{1}{2}.\frac{\Delta}{2}.\frac{\Delta}{2}=\frac{\Delta}{2}\left(\underline{u}-c+\frac{\Delta}{4}\right) \quad \text{(rappel : } \Delta=\bar{u}-\underline{u}).$$

Mais $\ddot{x}=\sigma x(1-\dot{x})$, et on a donc en intégrant :

$$\dot{x}(\bar{u})-\dot{x}(\underline{u})=\sigma\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x-\sigma\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x.\dot{x}=\sigma\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x-\frac{\sigma}{2}(x(\bar{u})^2-x(\underline{u}))^2,$$

ou

$$\dot{x}(\bar{u})-\dot{x}(\underline{u})>\sigma\frac{\Delta}{2}\left(\underline{u}-c+\frac{\Delta}{4}\right)-\frac{\sigma}{2}\Delta\left(\frac{\underline{u}+\bar{u}}{2}-c\right)=\sigma\frac{\Delta^2}{8},$$

ce qui contredit $0\leqslant\dot{x}(\underline{u})\leqslant\dot{x}(\bar{u})<1$ si σ est assez grand. □

On a finalement la proposition 7 :

PROPOSITION 7 : Il existe un σ_0 dans $(0, +\infty)$ tel que :

* pour $\sigma\leqslant\sigma_0$, le contrat optimal est donné par la solution unique du système différentiel :

$$\begin{cases} \ddot{x}=\sigma x(1-\dot{x}) \\ \dot{x}<1 \\ x(u)=\dfrac{u-c}{2} \text{ en } \underline{u} \text{ et } \bar{u} \end{cases}$$

et par le tarif associé $\varphi(u)=(u-x(u))\,x(u)+\frac{1}{\sigma}\text{ Log } 2(1-\dot{x}(u))$

* pour $\sigma>\sigma_0$, le contrat optimal n'est pas séparateur :
il existe un u^* dans $\left(\underline{u}, \frac{\underline{u}+\bar{u}}{2}\right)$ et un x^* dans $\left(u^*-\frac{\bar{u}+c}{2}, \frac{\underline{u}-c}{2}\right)$ tels que

* pour u dans $[\underline{u}, u^*]$, $x(u)$ égale x^* et $\varphi(u)$ égale $\varphi(u^*)$,

$*$ pour u dans $[u^*, \bar{u}]$, $x(u)$ est la solution unique du système différentiel :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \sigma x (1 - \dot{x}) \\ \dot{x} < 1 \\ x(u^*) = x^* \\ x(\bar{u}) = \dfrac{\bar{u} - c}{2} \end{cases}$$

et $\varphi(u) = (u - x(u))\, x(u) + \dfrac{1}{\sigma} \operatorname{Log} 2\,(1 - \dot{x}(u))$.

5 Les propriétés de la solution

Il apparaît clairement que les deux cas extrêmes $\sigma = 0$ et $\sigma = +\infty$ n'épuisent pas la diversité des contrats optimaux. La différence la plus intéressante est que, comme nous l'avons montré, un phénomène de pooling apparaît quand l'aversion pour le risque est assez grande (mais finie). Malheureusement, c'est aussi ce qui rend la résolution complète du programme presque impossible; nous avons en particulier dû renoncer à caractériser finement les variations de u^* et x^* avec σ, qui sont données en principe par les conditions de continuité de λ et μ en u^*.

Nous avons donc eu recours à une simulation numérique pour déterminer précisément la forme du contrat optimal en x, telle qu'elle est présentée en figure 2. La méthode utilisée était (dans ses grandes lignes) la suivante :

1. On choisit un u^* dans $[\underline{u}, \bar{u}]$.

2. On calcule x^* par la condition de continuité de λ en u^* (on peut montrer que x^* est unique).

3. L'intégration numérique de (D*) fournit $\dot{x}^*$.

4. Si $\dot{x}^* \geqslant 0$, on calcule $\mu(u^*-)$ *et* $\mu(u^*+)$.

5. La procédure est itérée (par dichotomie) jusqu'à ce que $|\mu(u^{*+}) - \mu(u^{*-})|$ soit inférieur à un epsilon prédéterminé.

Un simple coup d'œil à la figure suggère que $x(.)$ est une fonction décroissante de σ à u donné. Ceci semble une conséquence assez naturelle du partage du risque : assurer le détaillant devient de plus en plus coûteux quand son aversion pour le risque croît, et il est donc préférable de diminuer la taille du risque global. En prenant $V(\bar{u}) - V(\underline{u})$ comme mesure du risque

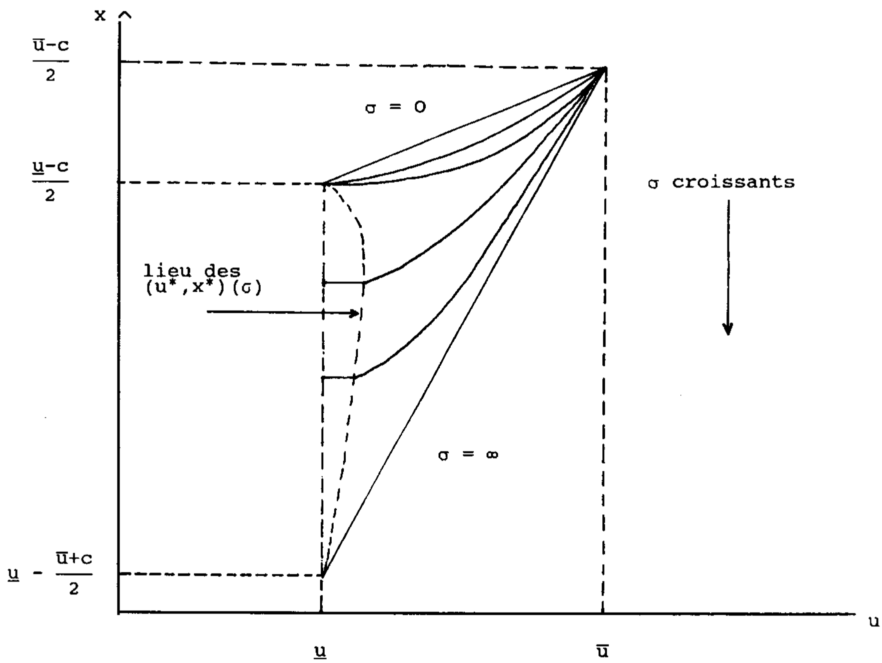

FIGURE 2

Forme de la fonction x

supporté par le détaillant, on a

$$V(\bar{u}) - V(\underline{u}) = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} x,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(V(\bar{u}) - V(\underline{u})) = \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \frac{\partial x}{\partial \sigma},$$

et donc $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$ devrait *a priori* être négatif.

Nous n'avons pu en fait démontrer rigoureusement cette propriété quand σ est plus grand que σ_0; comme la plupart des propriétés que nous allons énoncer, elle vaut donc sous la restriction « $\sigma \leqslant \sigma_0$ ».

PROPOSITION 8 : Pour $\sigma \leqslant \sigma_0$, x est une fonction décroissante de σ et le risque supporté par le détaillant décroît avec σ.

Démonstration : La proposition est une conséquence immédiate du lemme 5, compte tenu de l'argument donné ci-dessus.

Intuitivement, on peut penser que l'aversion pour le risque du détaillant réduit le profit espéré du producteur, puisqu'elle rajoute aux contraintes d'incitation des coûts d'assurance. Il s'avère que cette intuition est vérifiée quelle que soit l'aversion pour le risque du détaillant :

PROPOSITION 9 : Le profit espéré du producteur, EW, décroît en σ.

Démonstration : Soient $\sigma_1 < \sigma_2$, et (x_1, φ_1), (x_2, φ_2) les mécanismes optimaux associés, qui sont évidemment révélateurs pour tout σ.

On peut écrire $\mathrm{E}\, e^{-\sigma_1 V_2} = \mathrm{E}\,(e^{-\sigma_2 V_2})^{\sigma_1/\sigma_2}$; mais $t \to t^{\sigma_1/\sigma_2}$ est concave, et l'inégalité de Jensen donne $\mathrm{E}\, e^{-\sigma_1 V_2} < (\mathrm{E}\, e^{-\sigma_2 V_2})^{\sigma_2} = 1$.

(x_2, φ_2) est donc un mécanisme admissible pour un détaillant de paramètre σ_1, et doit donner au producteur un profit espéré inférieur à celui que lui assure (x_1, φ_1), puisque ce dernier est le mécanisme optimal unique associé à σ_1. Donc $\mathrm{EW}_2 < \mathrm{EW}_1$. □

On peut faire ici trois remarques :

• tout d'abord, il est clair que la démonstration n'a utilisé que le fait qu'à une aversion absolue pour le risque croissante correspond une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern « plus concave », ce qui est un théorème connu (PRATT [1964]). Le résultat est donc valable pour des modèles beaucoup plus généraux (y compris si le producteur a de l'aversion vis-à-vis du risque, auquel cas l'expression « profit espéré » doit simplement être remplacée par « utilité espérée »);

• le profit espéré du producteur est minimal quand l'aversion pour le risque du détaillant est infinie, ce qui nous ramène au cas où l'agent acquiert son information privée avant la signature du contrat. Les contrats « ex post » sont donc dominés, du point de vue du principal, par les contrats « ex ante »;

• enfin, la démonstration de la proposition 9 permet d'imaginer ce qui arrivera si le principal se trompe dans son évaluation de l'aversion pour le risque de l'agent. Un contrat fondé sur une sur-estimation de σ sera sous-optimal (car $\mathrm{E}\, e^{-\sigma_1 V_2} < 1$), tandis qu'un contrat qui sous-estime σ sera refusé par l'agent (puisque $\mathrm{E}\, e^{-\sigma_2 V_1} > 1$). La façon dont le principal peut apprendre la vraie valeur de l'aversion pour le risque de l'agent sort donc du cadre du modèle, puisque l'agent a toujours intérêt à prétendre qu'il a une aversion pour le risque infinie.

Notre dernière proposition corrobore l'intuition courante selon laquelle l'aversion pour le risque des agents est un handicap pour l'économie.

PROPOSITION 10 : Pour tout état de la demande u, le bien-être social $V(u) + W(u)$ décroît en σ (pour $\sigma < \sigma_0$).

Démonstration : On a $V + W = (u - x)\,x - \varphi + \varphi - cx = (u - x - c)\,x$, et $\dfrac{\partial (V+W)}{\partial \sigma} = (u - 2x - c)\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}$; mais $x \leqslant \dfrac{u-c}{2}$ partout et $\dfrac{\partial x}{\partial \sigma} < 0$ pour $\sigma \leqslant \sigma_0$, d'où la conclusion. □

Ce résultat est en fait assez évident : puisque la production est sous-optimale $\left(x(u) \leqslant \frac{u-c}{2}\right)$ et décroît en σ, il en va de même du bien-être social.

6 Conclusion

Le modèle simple étudié montre que la prise en compte du fait indéniable qu'il existe des asymétries d'information qui ne se manifestent qu'*après* la signature de contrats suffit à donner un rôle qualitativement important à l'aversion pour le risque des contractants. La paramétrisation du degré absolu d'aversion pour le risque du détaillant nous a permis d'obtenir des résultats très différents de ceux auxquels aurait conduit la considération des seuls cas extrêmes habituellement analysés dans la littérature, mais également d'établir certains résultats de statique comparative.

Nous avons dû spécialiser le modèle pour poursuivre les calculs aussi loin que possible; les résultats principaux sont cependant assez robustes. On peut par exemple relâcher l'hypothèse d'une distribution uniforme de l'aléa u. Si u a une densité f et une fonction de répartition F telles que $(1-\mathrm{F}(u))/f(u)-u$ décroît en u, alors le contrat optimal sera parfaitement séparateur quand le distributeur a une aversion pour le risque infinie [10], et la production sera sous-optimale en $u=\underline{u}$. Puisque la solution du programme du producteur est continue en σ, la production sera nécessairement sous-optimale en $u=\underline{u}$ pour σ assez grand, ce qui implique l'existence d'un phénomène de pooling qui est absent dans les deux cas extrêmes $\sigma=0$ et $\sigma=+\infty$.

Enfin, on a souvent reproché à la littérature portant sur la caractérisation des contrats non linéaires optimaux d'aboutir à des contrats beaucoup plus compliqués que ce qu'on peut observer dans les relations contractuelles habituelles. Il est clair que notre modèle n'échappe pas totalement à cette critique; la liberté laissée au producteur de choisir n'importe quelle tarification non linéaire ne paraît cependant pas déraisonnable, compte tenu de la sophistication des systèmes de rabais et de ristournes que pratiquent producteurs et distributeurs. On peut de fait vérifier qu'offrir au distributeur le choix dans un menu de tarifs binômes $\Phi_i(x)=\mathrm{A}_i+c_i x$ permettra de concrétiser approximativement la tarification optimale si celle-ci est concave (cette propriété générale est discutée par exemple dans PICARD [1988]); tel est le

10. Des calculs simples montrent en effet que le contrat « optimal » obtenu en négligeant la contrainte $\dot{x} \geqslant 0$ quand $\sigma=+\infty$ est :

$$x(u)=\frac{1}{2}\left(u-c-\frac{1-\mathrm{F}(u)}{f(u)}\right).$$

cas dans notre modèle quand l'aversion pour le risque de l'agent est suffisamment grande (σ supérieur à un σ' qui est lui-même supérieur à σ_0).

1. Démonstration du lemme 4

Par le lemme 3 et la continuité de $\dot{x}^* \to x(., \dot{x}^*)$, il suffit de trouver deux valeurs de $\dot{x}^*$ dans $(-\infty, 1), \dot{x}^*_H, \dot{x}^*_L$, telles que $x(\bar{u}, \dot{x}^*_H) > \frac{\bar{u}-c}{2}$ et $x(\bar{u}, \dot{x}^*_L) < \frac{\bar{u}-c}{2}$. Il y aura alors un unique $\dot{x}$ dans $(\dot{x}^*_L, \dot{x}^*_H)$ qui fournira la solution.

(*a*) $\dot{x}^*_H$ est facile à trouver : il suffit de prendre $\dot{x}^*_H = \frac{(\bar{u}-c)/2 - x^*}{\bar{u}-u^*}$. $\dot{x}^*_H < 1$ puisque $x^* > u^* - \frac{\bar{u}+c}{2}$, et $x(\bar{u}, \dot{x}^*_H) > x^* + \dot{x}^*_H(\bar{u}-u^*) = \frac{\bar{u}-c}{2}$ de par la stricte convexité de la solution.

(*b*) La construction de $\dot{x}^*_L$ est un peu plus compliquée. L'idée sous-jacente est de choisir un $\dot{x}^*_L$ assez négatif pour que $x(u, \dot{x}^*_L) = 0$ pour un u situé entre u^* et $\bar{u}$. La solution $x(., \dot{x}^*_L)$ devient alors concave et restera donc négative, si bien que $x(\bar{u}, \dot{x}^*_L)$ sera *a fortiori* inférieur à $\frac{\bar{u}-c}{2}$. Notons d'abord que $\dddot{x} = \sigma \dot{x}(1-\dot{x}) - \sigma x\ddot{x} = \sigma(1-\dot{x})(\dot{x} - \sigma x^2)$ est négative quand $x < 0$, et en notant $\ddot{x}^*_L = \sigma x^*(1-\dot{x}^*_L)$, on a $\dot{x}(u) < \dot{x}^*_L + \ddot{x}^*_L(u-u^*)$ si le membre de droite est négatif (soit pour $u - u^*$ assez petit).

Si tel est bien le cas, alors

$$x(u) = x^* + \int_{u^*}^{u} \dot{x}(t)\,dt < x^* + (u-u^*)\dot{x}^*_L + \frac{(u-u^*)^2}{2}\ddot{x}^*_L < x^* + \frac{u-u^*}{2}\dot{x}^*_L$$

$x(u)$ sera donc négatif si il existe un $\dot{x}^*_L$ tel que :

$$\dot{x}^*_L + \ddot{x}^*_L(u-u^*) < 0$$

et

$$x^* + \frac{u-u^*}{2}\dot{x}^*_L < 0$$

c'est-à-dire si et seulement si $\frac{-2x^*}{\dot{x}^*_L} < u - u^* < \frac{-\dot{x}^*_L}{\ddot{x}_L}$.

Mais si $\dot{x}^*_L$ tend vers $-\infty$, le membre de gauche tend vers 0 tandis que le membre de droite tend vers $\frac{1}{\sigma x^*} > 0$, ce qui achève la démonstration. □

2. Démonstration du lemme 5

On peut réécrire le système différentiel en termes de la fonction V $\left(\text{rappelons que } \frac{\partial V}{\partial u}(u, \sigma) = x(u, \sigma)\right)$; puisque $e^{-\sigma V(u, \sigma)} = 2\left(1 - \frac{\partial x}{\partial u}(u, \sigma)\right)$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u, \sigma) = 1 - \dfrac{e^{-\sigma V(u, \sigma)}}{2} \\ \dfrac{\partial V}{\partial u}(u, \sigma) = \dfrac{u-c}{2} \text{ en } \underline{u} \text{ et } \bar{u} \end{cases}$$

On veut montrer que $A(u, \sigma) \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2 V}{\partial u \, \partial \sigma}(u, \sigma) \leqslant 0.$

Supposons qu'il existe un (u_0, σ_0) où $A(u_0, \sigma_0) > 0$; puisque $A(\underline{u}, \sigma_0) = A(\bar{u}, \sigma_0) = 0$ et $A(., \sigma_0)$ est différentiable, A doit avoir un maximum intérieur positif, soit un u_m dans $(\underline{u}, \bar{u})$ tel que :

$$\begin{cases} A(u_m, \sigma_0) \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial u}(u_m, \sigma_0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 A}{\partial u^2}(u_m, \sigma_0) \leqslant 0. \end{cases}$$

On calcule

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{1}{2} e^{-\sigma V} \frac{\partial(\sigma V)}{\partial \sigma}$$

et

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = \frac{1}{2} e^{-\sigma V} \left[\frac{\partial^2(\sigma V)}{\partial \sigma \, \partial u} - \frac{\partial(\sigma V)}{\partial \sigma} \frac{\partial(\sigma V)}{\partial u} \right].$$

Mais

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u_m, \sigma_0) = 0, \quad \text{et donc } \frac{\partial(\sigma V)}{\partial \sigma}(u_m, \sigma_0) = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}(u_m, \sigma_0) = \frac{1}{2} e^{-\sigma V} \frac{\partial^2(\sigma V)}{\partial \sigma \, \partial u}(u_m, \sigma_0).$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 (\sigma \mathrm{V})}{\partial \sigma \, \partial u} = \frac{\partial (\sigma x)}{\partial \sigma} = \sigma \mathrm{A} + x,$$

la non-positivité de $\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial u^2}(u_m, \sigma_0)$ entraîne la contradiction $x(u_m, \sigma_0) < 0$. □

• Références bibliographiques

GUESNERIE, R. et LAFFONT, J. J. (1984). – « A Complete Solution to a Class of Principal-Agent Problems with an Application to the Control of a Self-managed Firm », *Journal of Public Economics*, 25, p. 329-369.

LOLLIVIER, S. et ROCHET, J. C. (1983). – « Bunching and Second-Order Conditions: A Note on Optimal Tax Theory », *Journal of Economic Theory*, 31, p. 392-400.

MIRRLEES, J. (1976). – « Optimal Tax Theory: A Synthesis », *Journal of Public Economics*, 7, p. 327-358.

PICARD, P. (1988). – « La tarification optimale des télécommunications : une présentation synthétique », *Annales d'Économie et de Statistique*, 12, p. 27-62.

PRATT, J. W. (1964). – « Risk-Aversion in the Small and in the Large », *Econometrica*, 32, p. 122-136.

REY, P. et TIROLE, J. (1987). – « The Logic of Vertical Restraints », *American Economic Review*, 76, p. 921-939.

SEIERSTAD, A. et SYDSAETER, K. (1987). – *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North-Holland, Amsterdam.

SHAVELL, S. (1979). – « Risk-Sharing and Incentives in the Principal-Agent Relationship », *Bell Journal of Economics*, 10, p. 55-73.