ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 18 — 1990

L'impact des changements de conjoncture sur l'évaluation des actifs financiers

Omar LICANDRO *

RÉSUMÉ. – Dans ce papier nous essayons de mettre en évidence l'influence que les prévisions sur l'économie réelle ont sur les comportements financiers, et notamment sur les prix d'équilibre des actifs. Le modèle de portefeuille et le CAPM (Capital Assets Pricing Model) sont adaptés de manière à rendre explicite le processus de formation d'attentes dans le cadre d'une économie réelle en déséquilibre. Dans ce cadre théorique il est montré que les marchés financiers jouent un rôle procyclique à travers les anticipations.

Macroeconomic Conditions and the Valuation of Financial Assets

ABSTRACT. – In this paper, we stress the influence of forecasts about the real economy on financial behaviour, and more particularly on the equilibrium prices of financial assets. We adapt the Portfolio Model and the CAPM (Capital Assets Pricing Model) so as to introduce explicitly the process of expectation formation in an economy where there is real disequilibrium. In this theoretical framework we show that financial markets play a procyclical role via expectations.

---

* O. LICANDRO : IRES, Université catholique de Louvain, Place Montequieu, 3, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique.

Je remercie B. Clerfayt, Ph. De Villé, E. Dor, J. Drèze, R. Gillet, O. Lefebvre, E. Perée et H. Sneessens par leur appui, leurs conseils et commentaires. Les erreurs restent de la seule responsabilité de l'auteur. Ce papier forme partie du programme de recherche de l'IRES et a été financé par le Fonds de Développement Scientifique de l'UCL.

1 Introduction

A travers le cycle les conditions de demande, les modifications des prix relatifs et l'excès ou la rareté des facteurs, entre autres, influencent les profits des entreprises. Pour cette raison, les investisseurs ont intérêt à prévoir l'évolution de la conjoncture, ce qui leur permet de mieux évaluer la valeur des titres qu'ils détiennent. Ce papier cherche à montrer qu'il est possible de mettre en évidence l'influence des états de la conjoncture sur les comportements financiers.

En plus, on sait que si les investisseurs attendent une baisse future du prix d'un titre, en essayant de vendre aujourd'hui ils induisent une baisse anticipée du titre. De même, la disposition d'information sur les états futurs de la conjoncture doit produire une fluctuation, au moins partielle, de la valeur des titres émis par les entreprises. Un deuxième objectif de ce papier sera de montrer, sous certaines conditions, que les anticipations de l'état futur de la conjoncture influencent les équilibres financiers et notamment les prix présents des actifs.

La modélisation en univers incertain donne un cadre théorique approprié pour analyser les marchés financiers, de même que la théorie du déséquilibre permet de caractériser les états de la conjoncture.

Ce type d'approche a été déjà utilisé pour analyser le comportement des entreprises, notamment quand elles doivent décider de leur niveau d'investissement.[1] Dans ces travaux il est supposé que l'entreprise fait face à une demande aléatoire quand elle doit décider de son niveau optimal d'investissement. En fixant ce niveau elle fixe la production optimale et donc, elle détermine la probabilité d'être contrainte.

Ce que nous essayons de faire concerne l'autre côté du marché financier : les épargnants. Les résultats traditionnels de la théorie du portefeuille et du CAPM sont recalculés sous deux hypothèses : (*a*) la conjoncture se caractérise par deux états possibles selon que les entreprises sont contraintes par la demande ou pas; (*b*) les ménages connaissent la probabilité que les entreprises soient contraintes. Cela nous permet de retrouver des solutions où la probabilité que les entreprises ne soient pas contraintes apparaît comme une variable explicative additionnelle.

1. Voir Malinvaud [1980], [1986] et Lambert et Mulkay [1987].

2 Le comportement des ménages

Dans le cadre du modèle de portefeuille [2] nous essayons d'introduire comme variable explicative les probabilités des régimes macro-économiques qui vont s'instaurer dans le futur. Pour ce faire nous travaillons sous des hypothèses classiques : (*a*) un modèle à deux périodes, (*b*) un actif non risqué, (*c*) une fonction d'utilité quadratique et (*d*) la séparabilité des décisions d'épargne et de portefeuille.

2.1. Le modèle de portefeuille

Le résultat traditionnel dit que le vecteur de demandes d'actifs aura la forme suivante :

(1) $$W_0 \beta = (1/R) \Sigma_\rho^{-1} E(\rho)$$

où

W_0 : richesse au moment 0;

β : vecteur des proportions de la richesse détenue dans des actifs risqués;

R : mesure de l'aversion absolue au risque [3];

Σ_ρ : matrice des variances et covariances des rendements des actifs risqués;

$E(\rho)$: vecteur des primes de risque (espérance du rendement moins le rendement de l'actif sans risque).

La valeur de ρ_s peut se déduire de la valeur future (X_s) des actifs pour chaque état possible de la nature « *s* » :

(2) $$\rho_s = Q^{-1} X_s - ri$$

où

Q : est une matrice diagonale avec les prix contemporains des actifs sur la diagonale;

X_s : valeur future des actifs dans l'état *s*;

r : 1 plus le rendement de l'actif sans risque;

i' : $=(1, 1, \ldots, 1)$.

2. Voir Tobin [1958], Drèze et Modigliani [1966], [1972], et Mossin [1977].
3. Ce papier suppose que la mesure de l'aversion absolue au risque est constante. Les conditions nécessaires pour la validité de cette hypothèse sont données par Parkin [1970] et notamment par Farrar [1962] dans le cadre d'une fonction d'utilité quadratique.

Ce qui permet d'écrire :

(3) $$E(\rho)=Q^{-1}\mu-ri$$

(4) $$\Sigma_\rho=Q^{-1}\Sigma_x Q^{-1}$$

où

$\mu=E(X)$;

$\Sigma_x=V(X)$.

2.2. L'introduction des régimes macroéconomiques

Comme les marchés peuvent ne pas être en équilibre, les agents économiques devront essayer de prévoir leur état futur. Nous allons supposer qu'il n'y a que deux régimes possibles : ou bien les entreprises font face à une contrainte de débouché, ou bien elles ne sont pas contraintes du tout. Les deux régimes sont associés à des événements complémentaires, P pour le régime non contraint et K pour l'autre.

A cette étape il faut introduire certaines définitions :

$$\varphi_p=Pr(s\in P),\qquad \varphi_k=Pr(s\in K),\qquad \text{t.q.}\quad \varphi_p+\varphi_k=1$$
$$\bar{X}_p=E(X\mid P),\qquad \bar{X}_k=E(X\mid K)$$
$$V(X\mid P),\qquad V(X\mid K).$$

En plus, on peut exprimer l'espérance mathématique de X et sa matrice des variances et covariances (Σ_x) comme fonction des mêmes concepts en P et K :[4]

$$\mu=\varphi_p\bar{X}_p+\varphi_k\bar{X}_k=\varphi_p\bar{x}+\bar{X}_k$$
$$\Sigma_x=\varphi_p V(X\mid P)+\varphi_k V(X\mid K)+\varphi_p\varphi_k\bar{x}\bar{x}'$$

où $\bar{x}=\bar{X}_p-\bar{X}_k$.

$\bar{x}$ représente le gain en termes de valeur attendue du fait de passer du régime contraint au régime non contraint. Il permet d'exprimer la valeur attendue μ des actifs comme la somme de la valeur attendue $\bar{X}_k$ dans le régime contraint, plus le gain $\bar{x}$ fois la probabilité de réalisation du régime non contraint. Quand cette probabilité est nulle la valeur attendue des actifs est égale à la valeur attendue dans le régime contraint. Quand elle est unitaire, μ est égale à la valeur attendue dans le régime non contraint.

Notre principale préoccupation étant de trouver des conditions générales pour le signe des effets de φ_p sur β, nous allons supposer que :

$$V(X\mid P)=V(X\mid K)=\Sigma$$
$$\bar{X}_p\geqslant\bar{X}_k\qquad\text{et}\qquad\exists j\,\text{t.q.}\,\bar{X}_{pj}>\bar{X}_{kj}$$

4. La démonstration de la décomposition de la variance est présentée en annexe.

c'est-à-dire qu'au moins pour un actif la valeur attendue moyenne sera supérieure dans le régime P que dans le régime K[5]. Cela peut se justifier notamment pour les actions des sociétés : si les sociétés maximisent les profits en P, la valeur de l'entreprise en K sera toujours sous-optimale.[6]

Bien qu'il soit possible de garder une formulation plus générale, où $V(X|P) \neq V(X|K)$ et « $\bar{x}$ » non nécessairement plus grand ou égal à zéro, ces deux hypothèses vont nous permettre de simplifier les calculs. Le cas plus général est présenté en annexe, où on détermine aussi des conditions permettant d'établir le signe des dérivées partielles.

La solution du problème de portefeuille, sous les hypothèses précédentes, est la suivante :

(5) $$W_0 \beta = (1/R) Q \Sigma_x^{-1} Q E(\rho)$$

(6) $$\Sigma_x^{-1} = \Sigma^{1} - \frac{\varphi_p \varphi_k}{1 + \varphi_p \varphi_k \bar{x}' \Sigma^{-1} \bar{x}} \Sigma^{-1} \bar{x} \bar{x}' \Sigma^{-1}$$

(7) $$E(\rho) = Q^{-1} \mu - ri$$

(8) $$\mu = \varphi_p \bar{x} + \bar{X}_k.$$

La solution obtenue pour β, équations (5) et (6), ajoute à la solution du problème classique, équation (1), un nouveau terme lequel est non linéaire en φ_p et $E(\rho)$. Le comportement de portefeuille de l'agent est influencé par les perceptions sur la conjoncture future à travers la probabilité qu'il assigne à chaque régime.

2.3. Les effets de φ_p sur la demande d'actifs

Dans l'équation (5) β est fonction de q, φ_p et $E(\rho)$ si l'on considère Σ, $\bar{X}_p$ et $\bar{X}_k$ comme donnés. En plus, l'équation (7) nous donne la relation entre les trois variables.

Le modèle suppose que les ménages connaissent le vecteur des prix et φ_p, et qu'ils utilisent (7) pour déduire $E(\rho)$. Dans la mesure où nous voulons décrire le processus de détermination des équilibres financiers, il est intéressent de connaître l'influence de φ_p et Q sur β étant donné (7). Pour ce faire nous allons réécrire (5), (7) et (8) comme :

(9) $$W_0 \beta = (1/R) Q \Sigma_x^{-1} (\varphi_p \bar{x} + \bar{X}_k - rq)$$

5. D'une façon plus générale cette hypothèse classe l'ensemble des états possibles en deux sous-ensembles, celui des « bons » états et celui des « mauvais ». Ce qui permet de réinterpréter une bonne partie des résultats de cet article d'un point de vue plus large.

6. Dans le cadre de notre modèle à deux périodes la valeur future de l'entreprise « j » est égale au profit de la deuxième période :

$$X_{js} = p \min(Y_s, D_s) - wf^{-1}[\min(Y_s, D_s)]$$

où Y_s représente l'offre et D_s la demande adressées à l'entreprise dans l'état « s ». Si D_s est la seule variable aléatoire, si les agents ont une prévision parfaite de p et w, et si Y_s est la valeur de la production que maximise les profits sans contraintes, alors $\bar{X}_p \geqslant \bar{X}_k$.

où Σ_x^{-1} est donné par (6) et q est le vecteur des prix (la diagonale de Q).

Si les investisseurs prennent les prix des actifs comme donnés, l'effet direct de φ_p sur β est donné par :

$$(10) \qquad W_0 \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\bigg|_q = \frac{-1}{R\,d^2}\Pi(1-2\varphi_p) + \frac{1}{R} Q \Sigma_x^{-1} \bar{x}$$

où

$$\Pi = Q\Sigma^{-1}\bar{x}\bar{x}'\Sigma^{-1}QE(\rho)$$

et

$$d = 1 + \varphi_p \varphi_k \bar{x}' \Sigma^{-1} \bar{x}.$$

Une modification de φ_p entraîne deux types d'effets : une variation du risque est une modification du rendement attendu. Le premier terme de droite dans l'équation (10) exprime l'effet « risque » et le deuxième terme l'effet « rendement ».

Au niveau d'un actif particulier, disons l'actif « j » :

$$(10') \qquad W_0 \frac{\partial \beta_j}{\partial \varphi_p}\bigg|_q = \frac{-1}{R\,d^2}\Pi_j(1-2\varphi_p) + \frac{1}{R} q_j \sum_i \sigma_x^{ji} \bar{x}_i$$

où Π_j est la composante j du vecteur Π, et σ_x^{ji} l'élément ji de la matrice Σ_x^{-1}.

Le graphique 1 illustre pour l'actif « j » les équations (9) et (10′) en mettant en évidence les effets « risque » et « rendement ». Aux extrêmes, quand φ_p est égal à 0 et 1, la matrice des variances et covariances devient Σ grâce à l'hypothèse de $V(X \mid P) = V(X \mid K)$. Donc, la seule différence dans l'évaluation de β provient de μ. Pour les valeurs extrêmes de φ_p, β vaut :

$$\beta_k = \beta(\varphi_p = 0) = (1/RW_0)\, Q\Sigma^{-1}(\bar{X}_k - rq)$$
$$\beta_p = \beta(\varphi_p = 1) = (1/RW_0)\, Q\Sigma^{-1}(\bar{X}_p - rq).$$

Nous allons supposer que $\beta_{pj} > \beta_{kj}$.

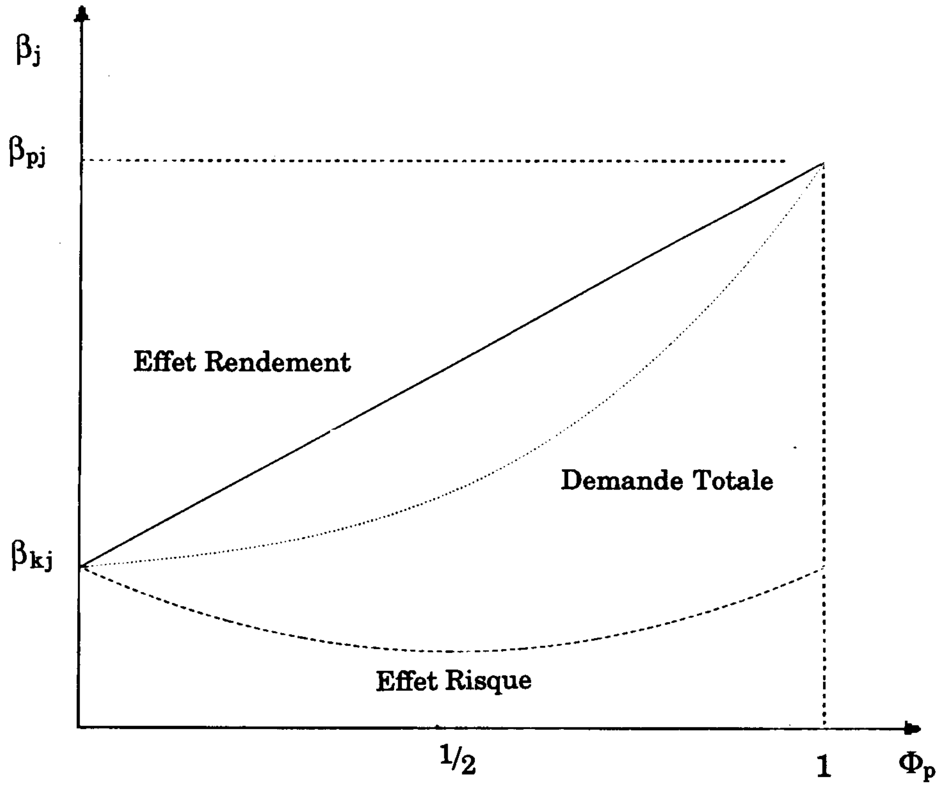
L'effet « rendement » a un signe unique pour toute valeur de φ_p, et il est positif dans le cas particulier de l'actif « j » grâce au fait que $\beta_{pj} > \beta_{kj}$. Il peut se représenter par un segment de droite.

Par contre, l'effet « risque » change de signe pour $\varphi_p = 1/2$. Si notre point de départ est le point β_{kj}, avec $\varphi_p = 0$, l'effet « risque » peut se représenter en laissant $\mu = \bar{X}_k$ quand φ_p varie. Cet effet est décroissant jusqu'à $\varphi_p = 1/2$ et croissant par après, telle que cela se dérive de l'équation (10′). Cette évolution particulière est due au fait que le risque est minimal quand φ_p ou φ_k sont égaux à 1. Le risque augmente au fur et à mesure que φ_p approche 1/2, et il diminue quand φ_p s'en éloigne.

L'effet total est moins net et il dépend du poids relatif des deux effets. Il se peut que l'effet « rendement » fasse plus que compenser les variations de signe de l'effet « risque », tel qu'il a été supposé dans le graphique 1. Mais, pour cela, il faut que certaines conditions se vérifient, conditions qui seront exposées par la suite.

GRAPHIQUE 1

Les effets de φ_p sur la demande d'actifs



3 Le prix d'équilibre des actifs financiers

3.1. Le capital asset pricing model (CAPM)

Il est possible d'utiliser le CAPM pour déduire les prix d'équilibre des actifs financiers sous l'hypothèse que tous les ménages ont la même information sur les états futurs. Notamment, s'ils ont la même fonction d'utilité, l'équilibre des marchés financiers peut se poser comme :

(11) $$W_0 \beta = q$$

où le vecteur des prix représente la valeur courante des actifs (chaque actif est représenté par un seul titre).

En suivant la démarche de Mossin [1977] la solution du CAPM en termes de notre problème est la suivante :

(12) $$q = \frac{\mu}{r} - \frac{R}{r} \Sigma_x i$$

(13) $$\mu = \varphi_p \bar{x} + \bar{X}_k$$

(14) $$\Sigma_x = \Sigma + \varphi_p \varphi_k \bar{x} \bar{x}'.$$

Le vecteur des prix d'équilibre, selon l'équation (12), est égal au vecteur des valeurs attendues μ, actualisé aux taux sans risque, moins une prime de risque. La prime de risque est fonction de l'aversion au risque R et de la matrice de variances et covariences Σ_x, le tout actualisé aussi au taux sans risque. Ce résultat, tout à fait traditionnel de la théorie financière, est complété par les équations (13) et (14) qui définissent le vecteur des valeurs attendues et la matrice de variances et covariances. Le vecteur des prix d'équilibre sera donc une fonction non linéaire de φ_p.

L'effet de φ_p sur q peut se percevoir en regardant sa dérivée première :

(15) $$\frac{\partial q}{\partial \varphi_p} = \frac{\bar{x}}{r}(1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p))$$

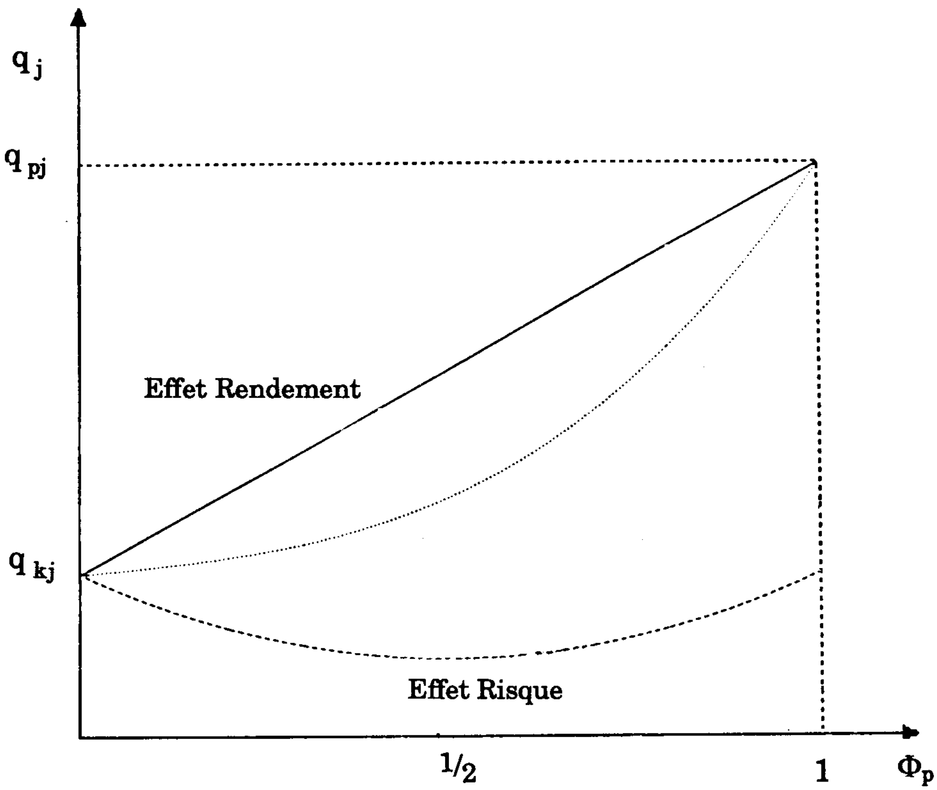
où $(\bar{x}' i) = \Sigma_j \bar{x}_j$; $\bar{x}_j$ étant la composante « j » du vecteur $\bar{x}$.

Pour bien comprendre les effets de φ_p sur le vecteur des prix d'équilibre il faut tenir compte du fait que φ_p a sur q deux types d'effet différents : un effet « rendement » à travers μ et un effet « risque » à travers Σ_x. L'effet « rendement » aura un signe unique. Supposons le strictement positif pour l'actif « j », tel qu'il est représenté dans le graphique 2. L'effet « risque » par contre a un point d'inflexion au point $\varphi_p = 1/2$. Aux extrêmes de l'intervalle, quand $\varphi_p = 1$ ou $\varphi_k = 1$, le nombre d'états possibles se réduit de moitié et la prime de risque est minimale. Par contre quand les deux événements sont équiprobables le risque est maximal.

Pour cette raison, il faut introduire des conditions supplémentaires pour assurer l'unicité du signe de la dérivée de q par rapport à φ_p. Des conditions

GRAPHIQUE 2

Les effets de φ_p sur q_j



suffisantes sont données par la proposition suivante :

PROPOSITION : Le signe de $\dfrac{\partial q_i}{\partial \varphi_p}$ sera unique dans l'intervalle [0, 1] pour φ_p, si $R<(1/\bar{x}'\,i)$. Notamment $\dfrac{\partial q_i}{\partial \varphi_p}>0$ si $\bar{x}_j>0$.

En effet :

Si

$$R<(1/\bar{x}'\,i),$$

$$\text{grâce à } \bar{x}'\,i\geqslant 0$$

$$R\,\bar{x}'\,i<1.$$

En plus,

$$\forall \varphi_p \in [0, 1]$$

soit

$$0 \leqslant \varphi_p < 1/2 \Rightarrow \mathrm{R}\,\bar{x}'\,i(1-2\,\varphi_p) < 1$$

soit

$$\varphi_p = 1/2 \Rightarrow \mathrm{R}\,\bar{x}'\,i(1-2\,\varphi_p) = 0$$

soit

$$1 \geqslant \varphi_p > 1/2 \Rightarrow \mathrm{R}\,\bar{x}'\,i(1-2\,\varphi_p) < 0$$

Alors

$$\mathrm{R}\,\bar{x}'\,i(1-2\,\varphi_p) < 1, \qquad \forall \varphi_p \in [0, 1].$$

Ce qui implique, $1 - \mathrm{R}\,\bar{x}'\,i(1-2\,\varphi_p) > 0$. □

En conséquence, le signe de la dérivée pour q_j sera égal au signe de $\bar{x}_j$, qui sera positif ou nul par hypothèse. [7]

Essayons de comprendre cette condition à l'aide du graphique 2. Pour que l'effet « rendement » fasse plus que compenser l'effet « risque » il faut que la pente du premier, au point $\varphi_p = 0$, soit supérieure à la pente du deuxième. En manipulant les équations (12) à (14) le prix d'équilibre des actifs peut s'écrire comme :

$$q = q_k + a\,\varphi_p - b\,\varphi_p\,\varphi_k$$

où

$$q_k = \frac{\bar{\mathrm{X}}_k}{r} - \frac{\mathrm{R}}{r}\Sigma\,i$$

$$a = \frac{\bar{x}}{r}$$

et

$$b = \frac{\bar{x}}{r}\mathrm{R}\,\bar{x}'\,i$$

Tant que $\bar{x}_j$ est positif, l'effet de φ_p sur le prix d'équilibre sera positif au point $\varphi_p = 0$ si $a > b$, et donc si $\mathrm{R}\,\bar{x}'\,i < 1$.

A l'équilibre du marché, plus on s'attend à ce que les entreprises ne soient pas contraintes, plus grande sera la valeur future de certains actifs

7. L'existence de certains actifs pour lesquels $\bar{x}_j < 0$ va réduire la valeur de $\bar{x}'\,i$. Tant que $\bar{x}'\,i \geqslant 0$ la condition $\mathrm{R} < (1/\bar{x}'\,\mathrm{i})$ va se vérifier plus facilement, avec la seule différence que $\partial q_j / \partial \varphi_p < 0$ pour ces actifs.

(notamment les actions dont $\bar{x}_j > 0$) et plus grand sera leur prix présent. En plus, l'effet des variations de φ_p sur le prix d'équilibre de l'actif « j » sera proportionnel au gain en capital ($\bar{x}_j$), avec le même facteur pour tous les actifs. Notamment, si la valeur future d'un titre ne se modifie pas quand on passe d'un régime à l'autre, c'est-à-dire si $\bar{x}_j = 0$, alors son prix d'équilibre ne sera pas fonction de φ_p.

L'équation (15) mérite encore quelques commentaires :

1. *La condition d'unicité du signe*

Regardons de plus près la portée de notre restriction : $R < (1/\bar{x}'\,i)$.

Si l'on définit l'aversion relative au risque comme :

$$R_r = R\,\mu'\,i$$

notre condition revient :

$$R_r < \frac{\mu'\,i}{\bar{x}'\,i} = \varphi_p + \frac{\bar{X}'_k\,i}{\bar{x}'\,i}$$

où $\bar{X}'_k\,i = \Sigma_j \bar{X}_{kj}$; $\bar{X}_{kj}$ étant la composante « j » de $\bar{X}_k$.

Si, en plus, on exclut le cas extrême d'une économie qui épuise toute sa richesse en régime contraint, $(\bar{X}'_k\,i)$ sera toujours positif. Alors :

$$R_r < \varphi_p + \left(\frac{\bar{X}'_p\,i}{\bar{X}'_{ki}} - 1 \right)^{-1}$$

où $\bar{X}'_p\,i = \Sigma_j \bar{X}_{pj}$; $\bar{X}_{pj}$ étant la composante « j » de $\bar{X}_p$.

Même si φ_p est proche de zéro, il faut que $(\bar{X}'_p\,i) \geqslant 2\,(\bar{X}'_k\,i)$ pour que la condition impose une valeur de $R_r < 1$. C'est-à-dire que, si la valeur attendue des actifs en régime non-contraint est plus que deux fois supérieure à la valeur attendue des actifs en régime contraint, une aversion relative au risque égale ou supérieure à 1 implique que le signe de $\partial q / \partial \varphi_p$ ne sera pas unique dans intervalle [0, 1] pour φ_p. Si par contre, on suppose, par exemple, que $(\bar{X}'_p\,i) = 1.1\,(\bar{X}'_k\,i)$, même si $\varphi_p = 0$, il faut que $R_r < 10$ pour que la condition tienne. Et cela semble tout à fait raisonnable.

2. *La prime de risque rapportée au prix*

L'équation (12) établit que le prix d'un actif est égal à sa valeur future actualisée au taux sans risque plus une prime de risque. Cette prime de risque correspond à la contribution de l'actif à la variance totale, multipliée par l'aversion au risque et actualisée aussi au taux sans risque. La prime de risque atteint son maximum à $\varphi_p = 1/2$.

Quand $\varphi_p = 1/2$, l'équation (15) devient :

(15′) $$\frac{\partial q}{\partial \varphi_p} = \frac{\bar{x}}{r}$$

c'est-à-dire que le marché anticipe la variation de la valeur future des actifs et il actualise cette valeur future au taux sans risque.

Mais si $\varphi_p < 1/2$, toute augmentation de φ_p augmente aussi le risque, et l'accroissement de la valeur future de l'actif sera en partie compensé par la hausse de la prime de risque. Pour cette raison $[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)] < 1$.

Par contre, si $\varphi_p > 1/2$, toute augmentation de φ_p réduit le risque et la prime de risque associée. Dans ce cas tout accroissement de φ_p augmente le prix des actifs plus que la valeur future actualisée et, donc, $[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)] > 1$.

3. *La prime de risque rapportée au rendement*

Dans le CAPM de Mossin, à l'équilibre :

$$\partial q_j / \partial \mu_j = 1/r \qquad \text{si} \quad \partial \Sigma_x / \partial \mu = 0.$$

Toute variation de la valeur attendue d'un actif va modifier son prix, le taux d'actualisation étant le taux sans risque.

A partir de la définition donnée par l'équation (3) et la solution d'équilibre pour le vecteur des prix, équation (12), il est possible de déduire la prime de risque d'équilibre rapportée au rendement $E(\rho)$:

$$E(\rho_j) = \frac{R}{q_j} \sum_i \sigma_{ji}.$$

Sa variation par rapport à μ_j sera :

$$\frac{\partial E(\rho_j)}{\partial \mu_j} = -\frac{R}{q_j^2 r} \sum_i \sigma_{ji} < 0.$$

Dans le CAPM de Mossin toute amélioration de la valeur future d'un actif va augmenter son prix d'équilibre et réduire la prime de risque $E(\rho_j)$.

Dans notre modèle nous sommes intéressés par les variations de φ_p dont les effets vont passer à travers μ et Σ_x. De même que pour le vecteur des prix l'effet « rendement », déjà présenté pour le modèle de Mossin [1977], sera accompagné d'un effet « risque », dont le signe change au point $\varphi_p = 1/2$. D'une façon générale on peut écrire :

$$(16) \qquad \frac{\partial E(\rho_j)}{\partial \varphi_p} = \frac{\bar{x}_j}{q_j}\left(1 - \frac{\mu_j}{r q_j}[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)]\right)$$

Le signe des effets de φ_p sur la prime de risque $E(\rho_j)$, à l'équilibre du CAPM, n'est pas assuré par la condition $R < (1/\bar{x}' i)$. Pour des valeurs de φ_p proche de zéro il se peut qu'une variation de φ_p produise des effets positifs sur la prime de risque d'un ou de plusieurs actifs.

En conséquence, et à la différence du modèle de Mossin, il est possible qu'une amélioration de la valeur future d'un actif, si elle provient d'un accroissement de φ_p, augmente en même temps le prix d'équilibre et la prime de risque $E(\rho_j)$. [8]

3.2. Les effets de φ_p sur la demande d'actifs

Les prix d'équilibre dérivés dans le point précédent sont basés sur la double hypothèse que l'offre d'actifs et la richesse initiale (W_0) sont exogènes. Sans vouloir s'introduire dans les complexités dérivées de la suppression de telles hypothèses il serait intéressant d'analyser plus en détails comment les demandes d'actifs se modifient dans un cadre plus générale que celui du CAPM. A cet égard, l'équation (10) nous a permis de mettre en évidence l'existence de deux effets différents, un effet « rendement » et un effet « risque ». La question qui se pose encore, est celle des conditions sous lesquelles l'effet « rendement » va plus que compenser les variations de signe de l'effet « risque ».

Une façon de trancher la question sera d'évaluer la dérivée à une valeur quelconque du vecteur de prix, notamment sa valeur d'équilibre. Pour ce faire, nous reviendrons à notre solution d'équilibre du CAPM. Si l'on substitue (12) dans (10) :

$$(17) \qquad W_0 \left.\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\right|_{q^*} = \frac{1}{Rd} Q \Sigma_x^{-1} \bar{x}[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)]$$

où q^* représente le prix d'équilibre du CAPM, équation (12). Une démonstration de (17) est présentée en annexe.

L'effet direct de φ_p sur β dépend du signe de la parenthèse, lequel a déjà été étudié au point précédent : si $R < (1/\bar{x}' i)$ alors $[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)] > 0$, p. t. $\varphi_p \in [0, 1]$.

Pour l'actif « j » l'équation (17) devient :

$$(17') \qquad W_0 \left.\frac{\partial \beta_j}{\partial \varphi_p}\right|_{q^*} = \frac{q_j}{Rd} \sum_i \sigma^{ji} \bar{x}_i [1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)].$$

Bien que, à l'équilibre q_j est fonction de φ_p selon l'équation (12), il devrait être positif p. t. $\varphi_p \in [0, 1]$. Par contre, le signe de $\sum_i \sigma^{ji} \bar{x}_i$ n'est pas connu.

Pour les actifs qui fluctuent beaucoup avec la conjoncture réelle on peut s'attendre à ce que $\sum_i \sigma^{ji} \bar{x}_i > 0$, et donc, une variation de φ_p aura des effets positifs sur la demande.

Par contre, pour les actifs dont la valeur ne se modifie pas avec la conjoncturelle réelle (disons un actif « j » t. q. $\bar{x}_j = 0$), le signe de $\sum_i \sigma^{ji} \bar{x}_i$ va dépendre du signe des covariances. Il se peut que la somme soit négative et donc, que l'effet de φ_p sur la demande, étant donné « q », soit aussi négatif.

Même si l'équation (16) a été étudiée pour q^* d'équilibre du CAPM, elle est importante parce qu'elle nous permet de pressentir, d'une façon générale,

8. La condition qui rend négative la parenthèse de l'équation (16) est : $(\bar{x}' i)\bar{X}_k < \Sigma i$. C'est-à-dire que p. t. j. $(\bar{x}' i)\bar{X}_{kj} < \sum_i \sigma_{ij}$.

l'effet de φ_p sur β dans une condition d'équilibre quelconque, du type :

$$W\beta(\varphi_p, q) = S(.) \tag{18}$$

où $S(.)$ représente l'offre d'actifs. Bien que pour chaque forme particulière de (18) il faudra recalculer (17) pour bien connaître son signe.

4 Exemple : un modèle à deux actifs risqués

Nous allons poser un exemple pour analyser la portée des résultats précédents. Dans cet exemple nous allons travailler avec un modèle à deux actifs risqués : bons et actions; que nous allons noter par 1 et 2 respectivement. Nous allons supposer que la valeur des bons sera la même dans les deux régimes ($\bar{x}_1=0$), mais que la valeur des actions varie de $\bar{X}_p$ à $\bar{X}_k$ de façon telle que $\bar{x}_2=\bar{x}=\bar{X}_p-\bar{X}_k>0$. En plus, la matrice des variances et covariances est identique dans les deux régimes et la covariance entre X_1 et X_2 est positive et plus petite que 1. Il y a un troisième actif, la monnaie, que l'on suppose être l'actif non risqué.

Les demandes d'actifs risqués sont :

$$B=\frac{q_1}{Rd}[q_1(\sigma^{11}+\varphi_p\varphi_k\bar{x}^2|\Sigma|^{-1})E(\rho_1)+q_2\sigma^{12}E(\rho_2)] \tag{18}$$

$$A=\frac{q_2}{Rd}[q_1\sigma^{12}E(\rho_1)+q_2\sigma^{22}E(\rho_2)] \tag{19}$$

où $d=1+\varphi_p\varphi_k\sigma^{22}\bar{x}^2$.

B représente la demande de bons et A la demande d'actions. Deux commentaires sortent de ces demandes :

1. Le terme $d\geqslant 1$ représente la réduction de la demande d'actifs dérivée de l'augmentation du risque ($d=|\Sigma|/|\Sigma_x|$). Si $\varphi_p=1$ (ou $\varphi_k=1$) la valeur de « d » sera unitaire, et elle sera maximale quand $\varphi_p=1/2$.

2. La matrice Σ^{-1} est égale à Σ_x^{-1} à la seule différence près du coefficient σ^{11} (en plus de « d »). Quand φ_p rapproche 1/2 la demande des bons (dont le risque spécifique ne se modifie pas) augmente.

D'abord regardons les effets de φ_p sur les prix d'équilibre définis par l'équation (15) et sur les primes de risques $E(\rho_j)$ définies par l'équation (16) :

$$\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_p}=0, \qquad \frac{\partial E(\rho_1)}{\partial\varphi_p}=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial\varphi_p}=\frac{\bar{x}}{r}[1-R\bar{x}(1-2\varphi_p)] \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\rho_2)}{\partial \varphi_p} = \frac{\bar{x}}{q_2}\left(1 - \frac{\mu_2}{r q_2}[1 - \mathrm{R}\bar{x}(1 - 2\varphi_p)]\right). \tag{22}$$

Le signe positif de l'équation (21), p. t. $\varphi_p \in [0, 1]$, est assuré par la condition $\mathrm{R} < (1/\bar{x})$. [9]

Le prix des bons ne se modifie pas à l'équilibre quand φ_p bouge. Par contre le prix des actions augmente si φ_p augmente. Ce qui a des implications procycliques pour les anticipations : si φ_p se réduit dans la dépression, cela entraîne comme conséquence une réduction du prix de l'actif et, dans la plupart des cas, une augmentation de la prime de risque $\mathrm{E}(\rho_j)$. Une augmentation de la prime de risque, de même qu'une réduction du prix de l'actif, a des effets défavorables sur l'investissement et donc sur la production elle-même.

Il nous reste à connaître les réactions des demandes d'actifs face à une modification de φ_p. Les demandes pour B et A ont été réécrites comme dans l'équation (9) et les effets directs de φ_p (avec q fixe et évalué à l'équilibre du CAPM) sont les suivants :

$$\left.\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \varphi_p}\right|_q = \frac{q_1 \sigma^{12} \bar{x}}{\mathrm{R} d}[1 - (1 - 2\varphi_p)\mathrm{R}\bar{x}] < 0 \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varphi_p}\right|_q = \frac{q_2 \sigma^{22} \bar{x}}{\mathrm{R} d}[1 - (1 - 2\varphi_p)\mathrm{R}\bar{x}] > 0 \tag{24}$$

p. t. $\varphi_p \in [0, 1]$ si $\mathrm{R} < (1/\bar{x})$

Quand on fait abstraction du déplacement de « q » vers sa nouvelle valeur d'équilibre, une augmentation de φ_p réduit la demande de bons et augmente la demande d'actions. [10]

Dans le cadre particulier du CAPM, équations (20) à (22), le déplacement de q_2 nécessaire pour rééquilibrer le marché d'actions ramène la demande d'obligations à sa valeur initiale.

5 Conclusions

Pour conclure nous voulons mettre l'accent sur trois points.

1. Le modèle de portefeuille a été adapté pour rendre explicite la formation d'attentes dans une économie en déséquilibre, tout en leur laissant un caractère exogène. Les agents savent que l'économie réelle ne sera pas

9. Pour que le signe de l'équation (22) soit négatif p. t. $\varphi_p \in [0, 1]$ il faut que $\bar{x}\mathrm{X}_k < \sigma_{12} + \sigma_{22}$.
10. Il est supposé que $\sigma^{12} < 0$, c'est-à-dire que $0 < \sigma_{12}$ et $|\Sigma| > 0$.

nécessairement en équilibre; ils essayent donc de prévoir, d'une façon exogène, les risques et les rendements des actifs dans chaque régime possible. De même, ils associent une probabilité à chacun de ces régimes.

2. C'est sous ces hypothèses qu'a été bâti le résultat principal de notre modèle : si la valeur d'un actif est plus élevée dans un régime que dans un autre, une augmentation de la probabilité de réalisation de ce régime augmente la demande et le prix d'équilibre de l'actif. Notamment, si la valeur attendue des entreprises est plus élevée dans le régime classique que dans le régime keynésien, une augmentation de la probabilité d'être en régime classique augmente la demande et le prix des actions.

3. En somme, ce modèle semble être un bon point de départ pour l'intégration des actifs financiers dans les modèles macroéconomiques de déséquilibre. En effet il permet de définir les demandes d'actifs financiers sans faire appel à des hypothèses *ad-hoc*, [11] et plus fondamentalement, il permet un feed-back des équilibres de l'économie réelle vers l'économie financière.

11. Hool [1980], par exemple, suppose l'existence d'une utilité différente pour la détention de chaque type d'actif.

A.1. Nous allons garder une expression plus générale pour la demande de portefeuille, que celle des équations (5) à (8) du texte principal. Pour ce faire nous substituerons l'équation (6) par l'équation (24). En levant l'hypothèse d'identité des matrices de variance et covariance conditionnelles des X par rapport aux états de la conjonture, nous ne sommes plus capables d'exprimer explicitement la matrice inverse. La demande de portefeuille est définie par les équations :

$$W_0\,\beta = (1/R)\,\Sigma_x^{-1}\,QE(\rho) \tag{23}$$

$$\Sigma_x = \Sigma_k + \varphi_p\,\Delta\Sigma + \varphi_p\,\varphi_k\,\bar{x}\bar{x}' \tag{24}$$

$$E(\rho) = Q^{-1}\,\mu - ri \tag{25}$$

où

$$\Delta\Sigma = \Sigma_p - \Sigma_k = V(X\,|\,P) - V(X\,|\,K);$$
$$\mu = \varphi_p\,\bar{x} + \bar{X}_k;$$
$$\bar{x} = \bar{X}_p - \bar{X}_k.$$

A.2. La condition d'équilibre du marché (CAPM) est définie par l'équation (11) du texte principal :

$$W_0\,\beta = q. \tag{26}$$

Ce qui nous amène à la solution d'équilibre :

$$q = \frac{\mu}{r} - \frac{R}{r}\Sigma_x\,i. \tag{27}$$

L'effet d'une variation de φ_p sur le prix d'équilibre est :

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi_p} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi_p} - R\frac{\partial \Sigma_x}{\partial \varphi_p}i\right) \geqslant \frac{1}{r}(\bar{x} - R\,[\Delta\Sigma + (1-2\,\varphi_p)\,\bar{x}\bar{x}']\,i) \tag{28}$$

Le signe de la dérivée peut s'assurer par les conditions :

$$\bar{x} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta\Sigma\,i > 0 \tag{29}$$

$$\Delta\Sigma\,i \leqslant \bar{x}\bar{x}'\,i \tag{30}$$

$$R < 1/(2\,\bar{x}'\,i) \tag{31}$$

lesquelles impliquent :

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi_p} \geqslant \frac{\bar{x}}{r}(1 - 2\,R\,(\bar{x}'\,i)\,(1-\varphi_p)) \geqslant \frac{\bar{x}}{r}(1 - 2\,R\,(\bar{x}'\,i)) \geqslant 0. \tag{32}$$

De même que dans le cas moins général du texte principal, il se peut que l'une de ces conditions ne se vérifie pas.

A.3. Lorsque nous regardons le comportement des investisseurs à prix donnés, l'influence de φ_p sur la demande d'actifs est donnée par :

$$\text{(33)} \qquad W_0 \left.\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\right|_q = \frac{1}{R} Q \frac{\partial \Sigma_x^{-1}}{\partial \varphi_p} Q E(\rho) + \frac{1}{R} Q \Sigma_x^{-1} Q \frac{\partial E(\rho)}{\partial \varphi_p}$$

$$\frac{\partial E(\rho)}{\partial \varphi_p} = Q^{-1} \bar{x}$$

$$\frac{\partial \Sigma_x^{-1}}{\partial \varphi_p} = -\Sigma_x^{-1} \frac{\partial \Sigma_x}{\partial \varphi_p} \Sigma_x^{-1}$$

$$\frac{\partial \Sigma_x}{\partial \varphi_p} = \Delta\Sigma + (1 - 2\varphi_p) \bar{x}\bar{x}$$

alors,

$$\text{(34)} \qquad W_0 \left.\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\right|_q = \frac{1}{r} Q \Sigma_x^{-1} (\bar{x} - [\Delta\Sigma + (1 - 2\varphi_p) \bar{x}\bar{x}'] \Sigma_x^{-1} Q E(\rho)).$$

A partir de la définition de $E(\rho)$ dans l'équation (25), et si Q est évalué à l'équilibre du CAPM, selon l'équation (26) :

$$R\, i = \Sigma_x^{-1} (\mu - rq) = \Sigma_x^{-1} Q E(\rho)$$

En conséquence :

$$\text{(35)} \qquad W_0 \left.\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\right|_q = \frac{1}{r} Q \Sigma_x^{-1} (\bar{x} - R [\Delta\Sigma + (1 - 2\varphi_p) \bar{x}\bar{x}'] i).$$

L'expression entre parenthèses est identique à celle de l'équation (28).

Donc, les conditions (29) à (31) assurent son signe.

Si comme dans le texte principal $\Delta\Sigma = 0$ alors (28) devient (15). En plus, du fait que $\Sigma_x^{-1} \bar{x} = (1/d) \Sigma^{-1} \bar{x}$, alors (35) devient (17).

Par définition, la matrice de variances et covariances s'écrit :

(36) $$\Sigma_x = \sum_s \varphi_s (X_s - \mu)(X_s - \mu)'$$

et, par le faite que P est l'événement complémentaire de K :

(37) $$\Sigma_x = \sum_{s \in p} \varphi_s (X_s - \mu)(X_s - \mu)' + \sum_{s \in k} \varphi_s (X_s - \mu)(X_s - \mu)'.$$

La valeur attendue de X peut se décomposer comme :

(38) $$\mu = \bar{X}_p - \varphi_k \bar{x} = \bar{X}_k + \varphi_p \bar{x}$$

où $\bar{x} = \bar{X}_p - \bar{X}_k$.

Si l'on substitue (38) dans (37) :

(39) $$\Sigma_x = \varphi_p \sum_{s \in p} \frac{\varphi_s}{\varphi_p} (X_s - \bar{X}_p + \varphi_k \bar{x})(X_s - \bar{X}_p + \varphi_k \bar{x})'$$
$$+ \varphi_k \sum_{s \in k} \frac{\varphi_s}{\varphi_k} (X_s - \bar{X}_k - \varphi_p \bar{x})(X_s - \bar{X}_k - \varphi_p \bar{x})'.$$

Si l'on factorise, en sachant que $\sum_{s \in p} \varphi_s (X_s - \bar{X}_p) = \sum_{s \in k} \varphi_s (X_s - \bar{X}_k) = 0$, on peut récrire (39) comme :

(40) $$\Sigma_x = \varphi_p V(X \mid P) + \varphi_k V(X \mid K) + (\varphi_p \varphi_k^2 + \varphi_p^2 \varphi_k) \bar{x}\bar{x}'.$$

Ce qui nous amène à :

(41) $$\Sigma_x = \varphi_p V(X \mid P) + \varphi_k V(X \mid K) + \varphi_p \varphi_k \bar{x}\bar{x}'.$$

C.1. Certains **calculs préalables** nous seront utiles :

$$\Sigma_x^{-1}\bar{x}=\frac{1}{d}\Sigma^{-1}\bar{x}. \tag{42}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\Sigma_x^{-1}\bar{x}&=\Sigma^{-1}\bar{x}-\frac{\varphi_p\varphi_k}{d}\Sigma^{-1}\bar{x}\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x}\\&=\Sigma^{-1}\bar{x}\left[1-\frac{\varphi_p\varphi_k}{d}\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x}\right]\\&=\frac{1}{d}\Sigma^{-1}\bar{x}.\quad\square\end{aligned}$$

Notamment :

$$\bar{x}'\Sigma_x^{-1}=\frac{1}{d}\bar{x}'\Sigma^{-1}. \tag{43}$$

C.2. L'équation (10) dit :

$$W_0\frac{\partial\beta}{\partial\varphi_p}\bigg|_q=\frac{-1}{R\,d^2}\Pi(1-2\,\varphi_p)+\frac{1}{R}Q\Sigma_x^{-1}\bar{x} \tag{10}$$

où

$$\Pi=Q\Sigma^{-1}\bar{x}\bar{x}'\Sigma^{-1}QE(\rho)$$

et

$$d=1+\varphi_p\varphi_k\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x}.$$

Si l'on substitue (42) dans (10), et on met en évidence $\frac{1}{R\,d}Q\Sigma_x^{-1}\bar{x}$, on obtient :

$$W_0\frac{\partial\beta}{\partial\varphi_p}\bigg|_q=\frac{1}{R\,d}Q\Sigma^{-1}\bar{x}\left[1-\frac{1}{d}(1-2\,\varphi_p)\bar{x}'\Sigma^{-1}QE(\rho)\right] \tag{44}$$

En substituant l'équation (7) dans l'équation (44) nous arrivons à :

$$W_0\frac{\partial\beta}{\partial\varphi_p}\bigg|_q=\frac{1}{R\,d}Q\Sigma^{-1}\bar{x}\left[1-\frac{1}{d}(1-2\,\varphi_p)\bar{x}'\Sigma^{-1}(\mu-rq)\right] \tag{45}$$

grâce à : $q\equiv Q\,i$.

Si l'on substitue la condition d'équilibre pour les prix, c'est-à-dire l'équation (12), en appelant q^* la solution d'équilibre, on obtient l'équation (17) :

$$(17) \qquad W_0 \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_p}\bigg|_{q^*} = \frac{1}{Rd} Q \Sigma_x^{-1} \bar{x}[1 - R(\bar{x}' i)(1 - 2\varphi_p)]. \quad \square$$

• Références bibliographiques

DREZE, J. (1987). – *Essays on Economic Decision under Uncertainty*, Cambridge University Press.

DREZE, J. et MODIGLIANI, F. (1966). – « Épargne et consommation en avenir aléatoire », *Cahiers du Séminaire d'Économétrie*, 9, p. 7-33.

DREZE, J. et MODIGLIANI, F. (1972). – « Consumption Decisions under Uncertainty », *Journal of Economic Theory*, p. 308-335.

FARRAR, D. (1962). – *The Investment Decision under Uncertainty*, Prentice-Hall Inc.

HOOL, B. (1980). – « Monetary and Fiscal Policies in Short Run Equilibria with Rationing », *International Economy Review*, 21, n° 2, June.

LAMBERT, J. P. (1988). – *Disequilibrium Macroeconomie Models*, Cambridge University Press.

LAMBERT, J. P. et MULKAY, B. (1987). – « Investment in a Disequilibrium Context or Does Profitability Really Matter ? », CORE, *Discussion Paper*, n° 8703.

MALINVAUD, E. (1980). – *Profitability and Unemployment*, Cambridge University Press and Edition de la Maison des Sciences de l'Homme.

MALINVAUD, E. (1986). – « Capital productif, incertitudes et profitabilité », *Annales d'Économie et de Statistique*, 5, p. 1-36.

MOSSIN, J. (1977). – *The Efficiency of Financial Markets*, Levington Books.

NEARY, J. P. et STIGLITZ, J. (1983). = « Toward a Reconstruction of Keynesian Economics: Expectations and Constrained Equilibria », *The Quarterly Journal of Economics*, 98, supplément 1983.

PARKIN (1970). – « Discount House Portfolio and Debt Selection », *Review of Economic Studies*, 37, n° 112, p. 469-497.

TOBIN, J. (1958). – « Liquidity Preferences as Behaviour Towards Risk », *Review of Economic Studies*, p. 65-86.

TOBIN, J. (1969). – « A General Equilibrium Approach to Monetary Theory », *Journal of Money, Credit and Banking*, p. 15-29.

TOBIN, J. (1982). – « Money and Finance in the Macroeconomic Process », *Journal of Money, Credit and Banking*, Nobel Lecture.