ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 18 — 1990

Hétérogénéité et hasard dans les modèles de durée

Claude FOURGEAUD, Christian GOURIÉROUX Jacqueline PRADEL *

RÉSUMÉ. – Nous présentons diverses propriétés des modèles avec hétérogénéité prenant comme illustration des modèles de durée. Nous étudions d'abord les liens entre les concepts agrégés et désagrégés. Ceci nous permet de donner des définitions précises des notions de biais d'hétérogénéité et du phénomène « mobile-stable ». Nous introduisons également des relations d'ordre naturelles sur les distributions de variables de durée et sur les distributions d'hétérogénéité et nous examinons l'effet sur la variable de durée agrégée d'une « plus grande » hétérogénéité.

Heterogeneity and Hazard Dominance in Duration Data Models

ABSTRACT. – We present some properties concerning heterogeneity using as illustrations duration data models. We first study the links between aggregate and disaggregate concepts. This allows to give some precise definitions of the heterogeneity biases and of the mover stayer phenomenon. We also introduce some natural orderings on the distributions of duration variables and on the heterogeneity distributions and we examine the effect on the aggregate duration variable of a "greater heterogeneity".

* C. FOURGEAUD : Paris-I, CEPREMAP; C. GOURIÉROUX : CREST, CEPREMAP; J. PRADEL : Paris-IX, CEREMADE.

1 Introduction

Dans le modèle linéaire usuel : $Y = Xb + u$, le terme d'erreur u est souvent considéré comme un agrégat de variables aléatoires admettant des interprétations différentes. Une des composantes de la perturbation résume l'aspect aléatoire du phénomène observé, mais les autres composantes correspondent à des variables omises (supposées orthogonales à celles introduites), à la non constance du paramètre b par rapport au temps ou aux individus.... Ces dernières composantes sont souvent appelées *composantes d'hétérogénéité.*

Si, dans un tel modèle linéaire, la composante fondamentalement aléatoire et celle d'hétérogénéité peuvent être additionnées afin d'obtenir la perturbation, une telle agrégation simple est généralement non justifiée dans un contexte non linéaire. L'omission de la composante d'hétérogénéité dans un modèle linéaire, composante qui n'est pas identifiable au premier ordre, n'a pas de conséquence sur la convergence d'une procédure d'estimation comme celle des moindres carrés. Cependant, il peut s'avérer important de prendre en compte cette composante dans des modèles plus complexes à la fois pour obtenir la convergence des méthodes d'estimation usuelles et pour interpréter de façon non biaisée les résultats.

Dans cet article, nous présentons diverses propriétés concernant le phénomène d'hétérogénéité en utilisant comme illustration des modèles de durée. Dans les dix dernières années ces modèles ont été étudiés de façon approfondie, en liaison avec l'augmentation du chômage [voir e. g. NICKELL [1979], KALBFLEISCH-PRENTICE [1980], LANCASTER-NICKELL [1980], FLINN-HECKMAN [1982], CHESHER-LANCASTER [1983], HECKMAN-SINGER [1984]...].

Dans le paragraphe 2, nous décrivons un modèle de durée avec hétérogénéité, à la fois aux niveaux désagrégé et agrégé (c'est-à-dire après avoir intégré le facteur d'hétérogénéité). Cette étude nous permet de relier facilement les résultats au niveau agrégé avec la moyenne des résultats désagrégés. En général ces deux notions ne coïncident pas et ceci met en évidence l'existence de biais d'hétérogénéité. Le signe de ce biais est déterminé dans divers cas, en particulier pour ce qui concerne l'estimation de la fonction de hasard et de la durée de vie moyenne restante. Ce biais est souvent interprété dans la littérature par le phénomène, dit Mobile-Stable [« Mover-Stayer »], à partir du cas simple de modèles désagrégés exponentiels. Dans ce papier, nous donnons une description précise de ce phénomène en considérant l'évolution des distributions d'hétérogénéité.

Dans le paragraphe 3, nous introduisons divers préordres sur les distributions de variables de durée et sur les distributions d'hétérogénéité. Nous examinons alors l'effet sur une durée agrégée d'une « plus grande hétérogénéité ».

Diverses démonstrations techniques sont rassemblées en appendice.

2 Le modèle avec hétérogénéité et ses propriétés

2.1. Distribution d'une variable de durée

Nous considérons une variable τ s'interprétant comme la durée d'une période séparant deux évènements, par exemple la durée d'un épisode de chômage. Une telle variable est positive et au niveau des interprétations l'aspect temporel apparaitra fondamental. De façon à simplifier la présentation, nous supposons que la distribution de la variable τ est continue, de densité f et de fonction de répartition F. (Des résultats analogues peuvent cependant être obtenus dans le cas d'une durée à valeurs discrètes.)

La loi de cette durée peut aussi être caractérisée par l'intermédiaire d'autres fonctions, faciles à interpréter dans ce contexte et qui de plus s'introduisent naturellement dans divers calculs. Parmi ces fonctions les plus importantes sont : la fonction de survie, la fonction de hasard et la durée de vie moyenne restante [voir Cox-Oakes [1984]].

La fonction de survie :

(1) $$S(t)=1-F(t),$$

donne la probabilité que la variable τ dépasse une valeur donnée t : $S(t)=P(\tau>t)$. C'est une fonction continue décroissante, satisfaisant les conditions limites : $S(0)=1$ et $S(+\infty)=0$.

La fonction de hasard (ou **fonction de risque**) est définie par :

(2) $$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{S(t)}=-\frac{d}{dt}\operatorname{Log} S(t).$$

Si τ est la durée passée dans un état donné, la valeur $\lambda(t)$ peut être vue comme le taux instantané de sortie de cet état, puisque :

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t \to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P[t<\tau<t+\Delta t/\tau>t].$$

La fonction de hasard caractérise la loi de τ, du fait de la relation :

(3) $$S(t)=\exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\,du\right].$$

Cette formule conduit d'ailleurs à introduire le **hasard cumulé** :

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du.$$

Finalement, définissons la **durée de vie moyenne restante**. Si à la date t l'individu est encore dans l'état et si τ désigne sa date de sortie de l'état, sa durée de vie résiduelle est : $\tau-t$. Prenant l'espérance, nous obtenons :

$$(4) \qquad r(t)=\mathrm{E}[\tau-t/\tau>t].$$

Cette fonction est aussi en relation biunivoque avec la fonction de survie S et nous avons (KALBFLEISCH-PRENTICE [1980], p. 7) :

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} r(t)=\dfrac{1}{\mathrm{S}(t)}\displaystyle\int_t^{\infty}\mathrm{S}(u)\,du, \\ \mathrm{S}(t)=\dfrac{r(0)}{r(t)}\exp\left[-\displaystyle\int_0^t\frac{du}{r(u)}\right]. \end{array}\right.$$

2.2. Hétérogénéité

A partir de maintenant, nous nous intéressons à une population d'individus (e. g. des chômeurs) ayant des caractéristiques différentes repérées par $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}$. La population complète $\mathscr{P}$ peut être partitionnée selon les sous-populations $\mathscr{P}_\theta$, constituées des individus de caractéristiques θ. Les tailles de ses sous-populations rapportées à celle de la population complète sont décrites par l'intermédiaire d'une loi de probabilité $\Pi(d\theta)$ sur l'ensemble Θ. Finalement nous supposons qu'il y a homogénéité à l'intérieur de chaque sous-population, c'est-à-dire nous considérons que les durées (de chômage) de deux individus d'une même sous-population $\mathscr{P}_\theta$ ont même loi.

Au niveau désagrégé de chacune des sous-populations $\mathscr{P}_\theta$, la distribution de la durée est décrite par l'une quelconque des fonctions :

$\mathrm{S}(t;\theta)$ [fonction de survie désagrégée];

$\lambda(t;\theta)$ [fonction de hasard désagrégée];

$r(t;\theta)$ [durée de vie moyenne restante désagrégée].

D'une sous-population à l'autre, la valeur de θ se modifie et il en est de même en général de la distribution de la durée. Le paramètre θ a le rôle d'un *facteur d'hétérogénéité* et Π est la *distribution d'hétérogénéité* à la date initiale $t=0$.

Il est important de remarquer que la distribution d'hétérogénéité dans la population de chômeurs change au cours du temps. Comme la proportion d'individus quittant cet état de chômage n'est pas la même pour les diverses sous-populations, la distribution d'hétérogénéité dépend vraisemblablement du temps. Elle est notée : $\Pi_t(d\theta)$.

Pour préciser cette remarque, considérons le cas limite d'une population $\mathscr{P}$ de taille infinie. La proportion d'individus de $\mathscr{P}_\theta$ restant chômeurs à la date t est $S(t;\theta)$. Nous en déduisons :

$$(6) \qquad \Pi_t(d\theta) = \frac{S(t;\theta)\,\Pi(d\theta)}{\int_\Theta S(t;\theta)\,\Pi(d\theta)}.$$

Dans les paragraphes qui suivent, $\underset{t}{E}$, $\underset{t}{V}$, $\underset{t}{\mathrm{Cov}}$ sont les espérance, variance et covariance par rapport à cette distribution.

2.3. Relation entre les résumés désagrégés et agrégés

Nous avons décrit la durée au niveau désagrégé. Nous pouvons maintenant considérer la distribution de cette variable au niveau agrégé, c'est-à-dire pour un individu tiré au hasard dans la population $\mathscr{P}$. La fonction de survie agrégée se déduit des fonctions désagrégées par :

$$(7) \qquad S(t) = \int_\Theta S(t;\theta)\,\Pi(d\theta).$$

Les deux autres fonctions caractérisant la loi s'en déduisent par les formules (2) et (5) :

$$\lambda(t) = -\frac{d\,\mathrm{Log}\,S(t)}{dt}, \qquad r(t) = \frac{1}{S(t)}\int_t^\infty S(u)\,du.$$

Remarque : Nous avons introduit de façon intuitive diverses distributions relatives au couple (τ, θ) et nous pouvons maintenant en donner les interprétations théoriques :

$\Pi(d\theta)$ est la loi marginale de la caractéristique θ;

$S(t;\theta)$ la loi conditionnelle de la durée τ sachant cette caractéristique.

On en déduit la loi du couple (τ, θ): $S(t;\theta)\,\Pi(d\theta)$, puis par intégration en θ, la loi marginale de la durée τ, qui n'est autre que la distribution agrégée $S(t)$.

Finalement, on notera que la distribution d'hétérogénéité de la date t est simplement la loi de la caractéristique θ sachant que la durée est supérieure à t: $\Pi_t(d\theta) = \Pi(d\theta/\tau \geqslant t)$.

Utilisant les diverses notions précédemment introduites, nous pouvons maintenant expliquer comment les résumés agrégés dépendent des résumés désagrégés. La démonstration simple du résultat ci-dessous est laissée au lecteur.

PROPRIÉTÉ 1 : S'il est possible de commuter intégration et dérivation, on a :

$\lambda(t) = \underset{t}{E}\,\lambda(t;\theta)$,

$r(t) = \underset{t}{E}\,r(t;\theta)$.

Le taux instantané de sortie concerne uniquement les individus encore au chômage à la date t. Il est donc naturel d'appliquer la formule d'agrégation en utilisant la distribution d'hétérogénéité Π_t. La même remarque s'applique pour la durée de vie moyenne restante. Ces relations simples sont à la base d'une étude jointe de ces résumés aux niveaux agrégé et désagrégé.

2.4. Lemme préliminaire

Pour cette comparaison, nous utiliserons le résultat suivant, dont une preuve peut être trouvée dans (GOURIÉROUX [1989]).

LEMME 2 : Si $g(t; \theta)$ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \Theta$ dans $\mathbb{R}$, différentiable par rapport à t, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underset{t}{\mathrm{E}}\, g(t; \theta) = \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial g(t; \theta)}{\partial t} \right] - \underset{t}{\mathrm{Cov}}\, [g(t; \theta), \lambda(t, \theta)].$$

2.5. Comparaison des évolutions agrégée et désagrégée des fonctions de hasard

Comme $\lambda(t) = \underset{t}{\mathrm{E}}\, \lambda(t; \theta)$, nous pouvons appliquer le lemme (2) avec $g(t; \theta) = \lambda(t; \theta)$. Nous obtenons :

PROPRIÉTÉ 3 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t) = \frac{\partial}{\partial t} \underset{t}{\mathrm{E}}\, \lambda(t; \theta) = \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t; \theta) \right] - \underset{t}{\mathrm{V}}\, [\lambda(t; \theta)].$$

La première relation $\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t) = \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t; \theta) \right] - \underset{t}{\mathrm{V}}\, \lambda(t; \theta)$, a une interprétation qui est bien connue dans le cas simple d'une fonction de hasard constante : $\lambda(t; \theta) = \theta$ (voir aussi le corollaire 4). Afin d'« estimer » l'évolution moyenne de la fonction de hasard au niveau désagrégé, il est naturel de considérer l'évolution relative à la population globale, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t)$. La propriété 3 dit que cette démarche naturelle conduit à une sous-estimation, puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t) \leqslant \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t; \theta) \right].$$

De plus l'importance de la différence entre ces deux quantités, c'est-à-dire l'importance du biais dépend de la variabilité du taux de sortie instantané.

L'existence d'un tel biais d'hétérogénéité est souvent expliquée dans les modèles de durée par le phénomène mobile-stable. Parmi les individus, certains ont les taux de sorties les plus élevés et quittent plus facilement l'état considéré. Ceci implique une décroissance du taux de sortie moyen des individus restant dans l'état. Cette propriété mobile-stable explique le biais d'hétérogénéité, mais ces deux notions ne sont pas équivalentes. Dans le sous-paragraphe 2.7 nous préciserons le phénomène mobile-stable par une étude approfondie de la façon dont se modifient les distributions d'hétérogénéité au cours du temps.

Généralement le biais d'hétérogénéité est discuté dans la littérature en supposant l'indépendance temporelle au niveau désagrégé (voir e. g. HECKMAN-SINGER [1984], p. 77-78). Dans un tel cas, le résultat admet la forme très simple.

COROLLAIRE 4 : Si $\lambda(t; \theta)=\theta$, nous avons $\dfrac{\partial\lambda(t)}{\partial t}<0$.

Une non dépendance temporelle au niveau désagrégé, $\dfrac{\partial\lambda(t; \theta)}{\partial t}=0$, se traduit par une dépendance négative au niveau agrégé.

2.6. Évolutions comparées des durées de vie moyenne restantes aux niveaux agrégé et désagrégé

Cette étude est facile si nous supposons que les fonctions de hasard individuelles peuvent être classées en ordre croissant. Une telle classification est uniquement possible si deux fonctions de hasard correspondant à deux valeurs différentes du facteurs d'hétérogénéité ne se coupent pas. Nous donnons ci-dessous la forme mathématique de cette hypothèse.

HYPOTHÈSE 1 : Le paramètre θ appartient à l'intervalle $\Theta \subset \mathbb{R}$ et l'application partielle : $\theta \to \lambda(t, \theta)$ est croissante pour toute valeur de t.

Il faut noter qu'une hypothèse de ce type est habituellement faite dans les modèles de durée. En effet si $x=(x_1 \ldots x_K)$ désignent les diverses variables explicatives individuelles introduites dans le modèle de durée, la loi de τ conditionnelle à x est supposée dépendre des explicatives par l'intermédiaire d'un « indice » linéaire $\theta=xb=x_1 b_1+\ldots+x_K b_K$, qui est à valeurs réelles et résume toute l'hétérogénéité.

Sous l'hypothèse 1, il est possible de ranger les individus selon la valeur de leur durée de vie moyenne restante.

PROPRIÉTÉ 5 : Sous l'hypothèse 1, les applications partielles : $\theta \to r(t, \theta)$ sont décroissantes pour tout t.

Preuve : Des formules (3) et (5), nous déduisons :

$$\begin{aligned} r(t;\theta) &= \frac{1}{S(t;\theta)}\int_t^{\infty} S(u;\theta)\,du \\ &= \int_t^{\infty} \frac{\exp - \int_0^u \lambda(v;\theta)\,dv}{\exp - \int_0^t \lambda(v;\theta)\,dv}\,du \\ &= \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_t^{t+u} \lambda(v;\theta)\,dv\right) du. \end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle et l'opérateur $\int . du$ sont croissants, le résultat en découle immédiatement. □

Plus grande est la probabilité de trouver un emploi, plus petite est la durée moyenne résiduelle passée au chômage. Cette interprétation est évidemment très naturelle. Remarquons que dans le cas d'indépendance temporelle, la propriété 5 est immédiate, puisque $\lambda(t;\theta)=\theta$ et $r(t;\theta)=\frac{1}{\theta}$.

Comme : $r(t) = \underset{t}{E}\, r(t;\theta)$, nous pouvons appliquer le lemme 2 avec $g(t;\theta)=r(t;\theta)$.

Propriété 6 : $\frac{dr(t)}{dt} = \underset{t}{E}\left[\frac{\partial}{\partial t} r(t;\theta)\right] - \underset{t}{\mathrm{Cov}}\,[r(t;\theta), \lambda(t;\theta)]$.

Cette formule peut être interprétée en terme de biais d'hétérogénéité puisque : $\frac{dr(t)}{dt} \neq \underset{t}{E}\left[\frac{\partial}{\partial t} r(t;\theta)\right]$. De plus le signe de ce biais est connu dans un cas important.

Propriété 7 : Sous l'hypothèse 1, le biais d'hétérogénéité : $\frac{dr(t)}{dt} - \underset{t}{E}\left[\frac{\partial}{\partial t} r(t;\theta)\right]$, est positif.

Preuve : Ceci résulte de la corrélation nécessairement négative, entre une fonction croissante et une fonction décroissante d'une même variable aléatoire (voir appendice 1). □

Il s'agit d'un résultat semblable à celui obtenu pour les fonctions de hasard : si l'approximation naturelle de $\underset{t}{E}\,\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t;\theta)$ sous-estime cette quantité, l'approximation naturelle de $\underset{t}{E}\,\frac{\partial}{\partial t} r(t;\theta)$ surestime cette dernière. L'interprétation en terme de mobile-stable est la même. Comme d'habitude le résultat prend une forme plus simple lorsqu'il y a indépendance temporelle.

COROLLAIRE 8 : Si $\lambda(t;\theta)=\theta\left[\Leftrightarrow r(t;\theta)=\frac{1}{\theta}\right]$, la durée de vie moyenne agrégée est une fonction croissante : $\frac{dr(t)}{dt} \geqslant 0$.

2 Évolution temporelle des distributions d'hétérogénéité

Finalement nous allons comparer les distributions d'hétérogénéité correspondant à deux dates différentes.

PROPRIÉTÉ 9 : Sous l'hypothèse 1, nous avons : $\underset{t}{\mathrm{E}}\, g(\theta) \geqslant \underset{t'}{\mathrm{E}}\, g(\theta)$, pour toute fonction croissante g et tout couple de réels $t' \geqslant t$.

Preuve : Appliquons le lemme 2 avec : $g(t;\theta)=g(\theta)$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{t}{\mathrm{E}}\, g(\theta)=\underset{t}{\mathrm{E}}\left[\frac{\partial}{\partial t} g(\theta)\right]-\underset{t}{\mathrm{Cov}}\,[g(\theta), \lambda(t;\theta)]=-\underset{t}{\mathrm{Cov}}\,[g(\theta), \lambda(t;\theta)].$$

Cette dernière quantité est négative car $g(.)$ et $\lambda(t;.)$ sont des fonctions croissantes de θ. Nous en déduisons que l'application $t \mapsto \underset{t}{\mathrm{E}}\, g(\theta)$ est décroissante. □

Remarquons que la formule apparaissant dans la preuve :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{t}{\mathrm{E}}\, g(\theta)=-\underset{t}{\mathrm{Cov}}\,(g(\theta), \lambda(t;\theta)),$$

permet d'obtenir directement certaines interprétations; ainsi pour un modèle à hasard proportionnel $\lambda(t;\theta)=\theta\,\lambda(t;1)=\theta\,\lambda_1(t)$ et le choix $g(\theta)=\theta$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\underset{t}{\mathrm{E}}\,\theta=\lambda_1(t)\underset{t}{\mathrm{V}}\,\theta.$$

Il y a baisse de la valeur moyenne du facteur d'hétérogénéité et l'importance de cette baisse est liée à la variabilité de ce facteur.

La condition de la propriété 9 est la condition de dominance stochastique à l'ordre 1 [voir e.g. BRUMELLE-VICKSON [1975]]. Cette condition peut donc être exprimée de façon équivalente à l'aide des fonctions de répartition :

$$Q_t(\theta)=\int_0^{\theta} \Pi_t(du).$$

COROLLAIRE 10 : Sous l'hypothèse 1 et si $t'>t$, Π_t domine $\Pi_{t'}$ à l'ordre 1, ou de façon équivalente : $\forall\theta$, $Q_{t'}(\theta)\geq Q_t(\theta)$.

La dernière inégalité est clairement la description mathématique du phénomène mobile-stable. Lorsque le temps s'accroît, la proportion de stables s'accroît et le résultat est valable pour toute définition possible de ce qu'est un stable, c'est à dire pour toute valeur de θ définissant la limite entre mobiles et stables.

La suite de fonctions cumulatives Q_t étant croissante, nous en déduisons la convergence faible de la suite de distributions d'hétérogénéité (Π_t) vers une distribution limite Π_∞. Cette limite fournit le « degré minimum » d'hétérogénéité qui peut être atteint. Cette limite peut *a priori* être quelconque, comme le montre le résultat suivant.

PROPRIÉTÉ 11 : Supposons que la distribution d'hétérogénéité initiale Π soit la loi uniforme sur l'intervalle [0, 1] et considérons une loi continue sur [0, 1], de densité f strictement positive et décroissante. Alors on peut trouver une famille $S(t;\theta)$ de fonction de survie satisfaisant l'hypothèse 1 et pour laquelle la distribution d'hétérogénéité limite associée Π_∞ est la loi de densité f.

Preuve : (i) Notons d'abord que l'hypothèse Π est la loi uniforme sur [0, 1] n'est pas très contraingante, car dès que le facteur d'hérétogénéité a une loi continue de fonction de répartition strictement croissante, on peut se ramener à ce cas par changement croissant de paramètre θ.

(ii) De plus l'hypothèse f décroissante est également naturelle, puisque la loi limite Π_∞, de densité f, doit accorder un poids plus important aux stables.

(iii) Introduisons alors la famille définie par les fonctions de hasard :

$$\lambda(t;\theta)=1-\log f(\theta)\exp-t.$$

L'hypothèse 1 est satisfaite, puisque f est une fonction décroissante de θ

La fonction de survie est :

$$\begin{aligned}S(t;\theta)&=\exp-\int_0^t\lambda(u;\theta)\,du\\&=\exp\left\{-t+\log f(\theta)(1-\exp-t)\right\}\\&=\exp(-t)\,f(\theta)^{1-\exp-t}.\end{aligned}$$

La distribution d'hétérogénéité à la date t admet pour densité :

$$\begin{aligned} q_t(\theta) &= \frac{S(t;\theta)}{\int_0^1 S(t,u)\,du} \\ &= \frac{\exp(-t)\,f(\theta)^{1-\exp -t}}{\int_0^1 \exp(-t)\,f(u)^{1-\exp -t}\,du} \\ &= \frac{f(\theta)^{1-\exp\ -t}}{\int_0^1 f(u)^{1-\exp -t}\,du}. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que lorsque t tend vers l'infini, cette densité converge vers :

$$q_\infty(\theta) = \frac{f(\theta)}{\int_0^1 f(u)\,du} = f(\theta). \quad \square$$

Le fait que tous les types d'individus continuent à coexister asymptotiquement dans la population se comprend facilement, lorsqu'on examine la forme des fonctions de hasard. Ces fonctions, différentes pour t faible, sont toutes asymptotiquement équivalentes lorsque t tend vers l'infini. Le facteur d'hétérogénéité sert donc essentiellement à différentier les courtes durées.

Lorsque le facteur d'hétérogénéité permet aussi de discriminer entre les longues durées, on peut en revanche espérer atteindre asymptotiquement une population homogène. La propriété ci-dessous correspond à de tels cas.

PROPRIÉTÉ 12 : (i) Sous l'hypothèse de hasard proportionnel, la distribution limite Π_∞ est une masse ponctuelle.
(ii) Si la distribution d'hétérogénéité initiale est la loi uniforme sur [0, 1], si $\lambda(t;\theta)$ est une famille de fonctions de hasard vérifiant l'hypothèse 1 et telle que les hasards cumulés satisfassent :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha \in]0,1[: \qquad \lim_{t \mapsto \infty} [\Lambda(t;\varepsilon) - \Lambda(t;\alpha\varepsilon)] = +\infty$$

alors Π_∞ se réduit à la masse ponctuelle en zéro.

Preuve : Voir appendice 2.

Notons que dans le cas où la distribution d'hétérogénéité initiale Π est une loi continue de fonction de répartition strictement croissante et où le modèle est à hasard proportionnel, l'une quelconque des propriétés 12 (i) ou 12 (ii) permet de montrer l'homogénéité asymptotique. Ceci est clair pour 12 (i). Pour 12 (ii) il suffit de noter que le paramètre $\theta^* = Q(\theta)$ admet la loi uniforme sur [0, 1] et que la fonction de hasard cumulé exprimée en fonction de θ^* est du type : $\Lambda(t;\theta^*) = Q^{-1}(\theta^*)\Lambda_0(t)$. On voit alors que :

$$\Lambda(t,\varepsilon) - \Lambda(t,\alpha\varepsilon) = \Lambda_0(t)\,[Q^{-1}(\varepsilon) - Q^{-1}(\alpha\varepsilon)]$$

tend vers l'infini avec t, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in [0, 1]$.

On peut également décrire un effet à l'ordre deux sur la distribution d'hétérogénéité.

Propriété 13 : Sous l'hypothèse 1, si la distribution d'hétérogénéité initiale est continue : $\Pi(d\theta) = q(\theta)\, d\theta$, avec une densité différentiable à la fois par rapport à t et θ, la distribution d'hétérogénétité $\Pi_t(d\theta)$ est continue, avec une densité q_t telle que :

$$\frac{\partial \log q_{t'}(\theta)}{\partial \theta} \leqslant \frac{\partial \log q_t(\theta)}{\partial \theta}, \qquad \forall \theta, \quad \forall t' > t.$$

Preuve : Voir appendice 3.

Cette propriété peut être illustrée à l'aide de deux exemples.

(i) Supposons que la distribution Π soit une loi uniforme sur $[\theta_0, \theta_1]$.

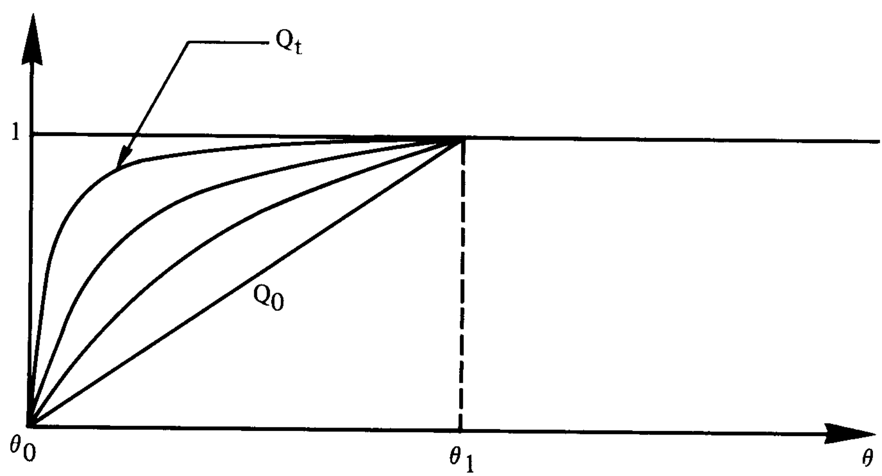
Nous avons :

$$\frac{\partial \log q_t(\theta)}{\partial \theta} \leqslant \frac{\partial \log q_0(\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 Q_t(\theta)}{\partial \theta^2} \leqslant 0.$$

Ainsi la suite de fonctions cumulatives Q_t est composée de fonctions concaves avec la configuration ci-dessous :



(ii) Une autre illustration du résultat précédent est obtenue en mélangeant un modèle avec indépendance temporelle, c'est-à-dire un modèle exponentiel : $S(t; \theta) = \exp(-\theta t)$, avec une distribution d'hétérogénéité de type gamma :

$$q(\theta)=\frac{a^{\upsilon}\,\theta^{\upsilon-1}\exp-a\theta}{\Gamma(\upsilon)}.$$

Un calcul simple montre que les distributions d'hétérogénéité successives sont toutes liées à la loi gamma :

$$q_t(\theta)=\frac{(a+t)^{\upsilon}\,\theta^{\upsilon-1}\exp-\theta\,(a+t)}{\Gamma(\upsilon)};$$

ainsi à la date t, la distribution de $\theta\,(a+t)$ est une loi gamma de paramètre υ, et, dans le cas limite $t\mapsto\infty$, nous obtenons une masse ponctuelle en zéro.

3 Ordres sur les distributions de durée

Afin de préciser les interprétations des paramètres apparaissant dans les modèles de durée, il est intéressant d'introduire des classements sur les lois des variables positives. A titre d'illustration, nous pouvons considérer que la durée τ est la durée de vie d'un individu et que nous cherchons des relations binaires pour décrire la préférence à vivre le plus longtemps possible.

Le même type de relations pourrait également être utilisé pour la description du chômage. Il suffit de transformer les relations par symétrie, puisque dans cet exemple les individus ont une préférence pour les petits épisodes de chômage. Il existe diverses définitions naturelles d'une telle relation d'ordre. Nous les explicitons successivement, décrivons les liens entre ces divers définitions et les relions à des ordres sur les distributions d'hétérogénéité.

3.1. Dominance stochastique d'ordre un

La relation d'ordre la plus utilisée sur les distributions de probabilité est définie de la façon suivante :

DÉFINITION 1 : Considérons deux distributions de durée P* et P, de densités respectives f^* et f. P* domine P à l'ordre un si et seulement si pour toute fonction croissante positive V, on a :

$$E^*V(\tau)=\int_0^{\infty}V(t)\,f^*(t)\,dt\geqslant EV(\tau)=\int_0^{\infty}V(t)\,f(t)\,dt.$$

La fonction V peut être interprétée comme une fonction d'utilité et la condition précédente décrit une préférence pour les grandes valeurs de la durée, préférence qui est uniforme dans les diverses fonctions d'utilité V.

Comme nous l'avons déjà mentionné cet ordre peut être traduit au moyen des fonctions de survie :

(8) $$\begin{gathered}\text{P* domine P à l'ordre 1 si et seulement si :}\\ S^*(t) \geqslant S(t), \quad \forall t.\end{gathered}$$

La condition de dominance est satisfaite si et seulement si la probabilité d'atteindre un âge donné t est plus grande avec P* qu'avec P et ceci pour toute valeur de l'âge. La comparaison des distributions peut ainsi être menée à l'aide de fonctions réelles.

Nous nous proposons maintenant de considérer des modèles de durée avec hétérogénéité, d'introduire l'idée de plus grande hétérogénéité et d'en examiner les implications sur les fonctions de survie. De façon à simplifier la présentation, nous nous restreindrons au cas de hasard proportionnel au niveau désagrégé.

Le premier niveau d'hétérogénéité est obtenu en introduisant un facteur θ; la fonction de hasard est : $\lambda(t;\theta)=\theta\lambda_1(t)$ et nous notons $\Pi_1(d\theta)$ la distribution d'hétérogénéité.

Un second niveau d'hétérogénéité peut être construit à partir du premier en introduisant un autre facteur α : le paramètre d'hétérogénéité correspondant est alors $\beta=\theta+\alpha$, et la fonction de hasard est :

$$\lambda(t;\beta)=(\theta+\alpha)\,\lambda_1(t).$$

Ces deux facteurs devraient être tels que la distribution marginale de θ soit $\Pi_1(d\theta)$ et la distribution conditionnelle de α sachant θ, notée $\Pi_2(d\alpha/\theta)$, soit de moyenne nulle. De façon claire, le second modèle est plus hétérogène que le premier.

Ces deux modèles peuvent aussi être décrits de la façon suivante :

(*) au premier niveau, nous avons : $\lambda(t;\theta)=\theta\,\lambda_1(t)$. où le facteur d'hétérogénéité a pour distribution $\Pi_1(d\theta)$;

(**) au second niveau, nous avons : $\lambda(t;\beta)=\beta\,\lambda_1(t)$, avec une nouvelle distribution d'hétérogénéité $\Pi_1^*(d\beta)$ définie par :

$$\int_{\Theta} g(\beta)\,\Pi_1^*(d\beta)=\iint_{\Theta^2} g(\theta+\alpha)\,\Pi_2(d\alpha/\theta)\,\Pi_1(d\theta).$$

Avec cette formulation, on remarque que l'idée de plus grande hétérogénéité est directement liée à la dominance stochastique d'ordre deux (voir ROTHSCHILD-STIGLITZ [1970], [1973], BRUMELLE-VICKSON [1975]).

DÉFINITION 2 : La distribution Π_1^* conduit à une plus grande hétérogénéité que Π_1 si et seulement si Π_1^* domine Π_1 à l'ordre deux.

Dans la littérature sur la dominance stochastique, on insiste souvent sur le fait que la dominance stochastique d'ordre un est beaucoup plus contraignante que la dominance stochastique d'ordre deux et on en déduit que l'ordre un est rarement satisfait et de peu d'intérêt pratique. En fait nous allons voir que ces deux dominances sont intimement liées dans le cas des modèles de durée.

PROPRIÉTÉ 14 : Sous l'hypothèse de hasard proportionnel $\lambda(t;\theta)=\theta\,\lambda_1(t)$, si Π_1^* conduit à une plus grande hétérogénéité que Π_1, si P^* et P sont les distributions de durée agrégées correspondant à Π_1^* et Π_1, alors P^* domine P à l'ordre un.

Preuve : Nous avons :

$$S(t)=\int_{\Theta} \exp(-\theta\Lambda_1(t))\,\Pi_1(d\theta),$$

$$S^*(t)=\iint_{\Theta^2} \exp[-(\theta+\alpha)\,\Lambda_1(t)]\,\Pi_2(d\alpha/\theta)\,\Pi_1(d\theta),$$

où $\Lambda_1(t)=\int_0^t \lambda_1(u)\,du.$

En introduisant les espérances conditionnelles, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}S^*(t)&=E\,E\,[\exp[-(\theta+\alpha)\,\Lambda_1(t)]/\theta]\\&=E\left\{\exp(-\theta\Lambda_1(t))\,E(\exp-\alpha\Lambda_1(t)/\theta)\right\}\\&\geqslant E\left\{\exp(-\theta\Lambda_1(t))\exp[-E(\alpha/\theta)\,\Lambda_1(t)]\right\}\\&=E\,[\exp-\theta\Lambda_1(t)]=S(t).\quad\square\end{aligned}$$

3.2. Dominance sur les fonctions de hasard

Vue l'importance des fonctions de hasard dans la modélisation des durées, il est naturel d'introduire une relation d'ordre fondée sur la fonction λ. La préférence à vivre longtemps est naturellement décrite en souhaitant un taux de « sortie » le plus faible possible.

DÉFINITION 3 : La distribution P^* domine la distribution P pour les fonctions de hasard si et seulement si : $\lambda(t)\geqslant\lambda^*(t),\ \forall t$.

Cet ordre apparaît plus restrictif que la dominance stochastique d'ordre un. La propriété ci-dessous montre qu'elle équivaut à une dominance d'ordre un, écrite à tous les âges :

PROPRIÉTÉ 15 : P^* domine P pour les fonctions de hasard si et seulement si pour toute fonction V positive croissante, pour tout réel positif t_0, on a :
$E^*[V(\tau)/\tau\geqslant t_0]\geqslant E(V(\tau)/\tau\geqslant t_0]$.

Preuve : Voir appendice 4.

Cet ordre sur les distributions de durée peut être déduit d'ordres sur les distributions d'hétérogénéité sous-jacentes. Ainsi on peut établir (voir appendice 4) que si Π_1^* domine Π_1 à l'ordre deux et si $E(\exp-\alpha\,t/\theta)$ est une fonction décroissante de θ, alors P* domine P pour les fonctions de hasard.

4 Conclusion

Dans les paragraphes précédents nous avons décrit diverses propriétés des modèles de durée avec hétérogénéité. En particulier nous avons comparé les propriétés du modèle désagrégé avec celles du modèle agrégé, c'est-à-dire dans lequel l'hétérogénéité est oubliée et constaté qu'une utilisation directe du modèle agrégé conduit généralement à des biais lorsqu'on s'intéresse aux évolutions. Cet article constitue une première étape vers une étude des problèmes posés dans les modèles de durée par l'oubli des facteurs d'hétérogénéité. Les modèles de durée sont habituellement étudiés en introduisant des variables explicatives x et des paramètres b mesurant les effets de ces variables. La fonction de hasard est alors $\lambda(t;\, x,\, b;\, \theta)$. Si on oublie la présence de l'hétérogénéité, c'est-à-dire si on impose $\theta = 0$, les estimateurs du maximum de vraisemblance de b sont biaisés. Les résultats obtenus dans ce papier permettent de penser que le biais est toujours dans le même sens et qu'il s'accroît avec l'importance de l'hétérogénéité.

Corrélation entre deux fonctions croissantes d'une même variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire, g et h deux fonctions croissantes, alors $\mathrm{Cov}(g(X), h(X)) \geqslant 0$.

Considérons deux tirages indépendants X_1, X_2 effectués dans la loi de X. Comme g et h sont croissantes, on a :

$$[g(X_1) - g(X_2)][h(X_1) - h(X_2)] \geqslant 0.$$

Prenant l'espérance, on obtient :

$$\mathrm{E}[g(X_1) - g(X_2)][h(X_1) - h(X_2)] \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{E}[g(X_1)h(X_1)] - \mathrm{E}g(X_2)\mathrm{E}h(X_1) - \mathrm{E}g(X_1)\mathrm{E}h(X_2) + \mathrm{E}[g(X_2)h(X_2)] \geqslant 0 \quad \text{(à cause de l'indépendance entre } X_1 \text{ et } X_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2[\mathrm{E}[g(X)h(X)] - \mathrm{E}g(X)\mathrm{E}h(X)] \geqslant 0 \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Cov}[g(X), h(X)] \geqslant 0.$$

Distribution limite Π_∞

1. *Démonstration de la propriété 12 (i)*

On peut remarquer qu'il suffit, quitte à remplacer la variable de durée initiale τ par sa transformée croissante $\Lambda(\tau)$, de montrer le résultat dans le cas d'indépendance temporelle $\lambda(t;\theta)=\theta$.

(i) Si $\lambda(t;\theta)=\theta$, la fonction de survie est :

$S(t;\theta)=\exp(-\theta t)$ et la distribution d'hétérogénéité est donnée par :

$$\Pi_t(d\theta)=\frac{\exp-\theta t\,\Pi(d\theta)}{\int_\Theta \exp-\theta t\,\Pi(d\theta)}.$$

Nous en déduisons après translation du temps :

$$\begin{aligned}
\Pi_{t+t_0}(d\theta) &= \frac{\exp-\theta(t+t_0)\,\Pi(d\theta)}{\int_\Theta \exp-\theta(t+t_0)\,\Pi(d\theta)}\\
&= \frac{\exp-\theta t\left((\exp-\theta t_0\,\Pi(d\theta))\Big/\left(\int_\Theta \exp-\theta t_0\,\Pi(d\theta)\right)\right)}{\int_\Theta \exp-\theta t\left((\exp-\theta t_0)\Big/\left(\int_\Theta \exp-\theta t_0\,\Pi(d\theta)\right)\right)\Pi(d\theta)}\\
&= \frac{\exp-\theta t\,\Pi_{t_0}(d\theta)}{\int_\Theta \exp-\theta t\,\Pi_{t_0}(d\theta)}.
\end{aligned}$$

(ii) Donc pour toute fonction continue bornée g :

$$\underset{t+t_0}{\mathrm{E}}\; g(\theta)=\underset{t_0}{\mathrm{E}}[\exp-\theta t g(\theta)]/\underset{t_0}{\mathrm{E}}(\exp-\theta t),$$

et, lorsque t_0 tend vers l'infini, cette relation devient :

$$\underset{\infty}{\mathrm{E}}\, g(\theta)\,\underset{\infty}{\mathrm{E}}(\exp-\theta t)=\underset{\infty}{\mathrm{E}}[\exp-\theta t g(\theta)], \qquad \forall t,\quad \forall g.$$

(ii) Choisissant $g(\theta)=\exp-\theta\tau$, nous avons :

$$\underset{\infty}{\mathrm{E}}(\exp-\theta\tau)\,\underset{\infty}{\mathrm{E}}(\exp-\theta t)=\underset{\infty}{\mathrm{E}}\exp-\theta(t+\tau), \qquad \forall t,\quad \tau.$$

Donc la transformée de Laplace $\mathscr{L}_\infty(t)=\underset{\infty}{\mathrm{E}}(\exp-\theta t)$ de la distribution limite Π_∞ satisfait :

$$\mathscr{L}_\infty(\tau)\,\mathscr{L}_\infty(t)=\mathscr{L}_\infty(t+\tau), \qquad \forall t,\quad \tau.$$

Ceci implique la forme spécifique : $\mathscr{L}_\infty(t) = \exp at$, où a est un réel positif, et l'égalité de Π_∞ avec la masse ponctuelle en a. □

2. *Démonstration de la propriété 12 (ii)*

Nous allons montrer que :

$$\lim_{t \mapsto \infty} Q_t(\varepsilon) = 1, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

ce qui établira le résultat.

Nous avons :

$$Q_t(\varepsilon) = \frac{\int_0^\varepsilon S(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^1 S(t;\theta)\,d\theta} = \frac{\int_0^\varepsilon S(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^\varepsilon S(t;\theta)\,d\theta + \int_\varepsilon^1 S(t;\theta)\,d\theta},$$

$$Q_t(\varepsilon) = \left[1 + \frac{\int_\varepsilon^1 S(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^\varepsilon S(t;\theta)\,d\theta}\right]^{-1}.$$

Or :

$$\lim_{t \mapsto \infty} \frac{\int_\varepsilon^1 S(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^\varepsilon S(t;\theta)\,d\theta}$$

$$\leqslant \lim_{t \mapsto \infty} \frac{\int_\varepsilon^1 S(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^{\alpha\varepsilon} S(t;\theta)\,d\theta} \quad \text{(où le } \alpha \text{ est celui intervenant dans la propriété)}$$

$$= \lim_{t \mapsto \infty} \frac{\int_\varepsilon^1 \exp - \Lambda(t;\theta)\,d\theta}{\int_0^{\alpha\varepsilon} \exp - \Lambda(t;\theta)\,d\theta}$$

$$\leqslant \lim_{t \mapsto \infty} \frac{1-\varepsilon}{\alpha\varepsilon} \exp - [\Lambda(t,\varepsilon) - \Lambda(t,\alpha\varepsilon)]$$

$= 0$, d'après la condition de 12 (ii)

Le résultat en découle. □

Effet à l'ordre deux sur la distribution Π_t

Nous avons :

$$q_t(\theta) = \frac{S(t;\theta)\, q(\theta)}{\int_\Theta S(t;\theta)\, q(\theta)\, d\theta}.$$

et : $\operatorname{Log} q_t(\theta) = \operatorname{Log} S(t;\theta) + \operatorname{Log} q(\theta) - \operatorname{Log} \int_\Theta S(t;\theta)\, q(\theta)\, d\theta.$

Par différentiation relativement à t, θ, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \operatorname{Log} q_t(\theta)}{\partial t\, \partial\theta} &= \frac{\partial^2 \operatorname{Log} S(t;\theta)}{\partial t\, \partial\theta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial t}[-\operatorname{Log} S(t;\theta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}\lambda(t;\theta).\end{aligned}$$

Comme d'après l'hypothèse 1, la fonction de hasard est croissante en θ, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda(t;\theta) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \operatorname{Log} q_t(\theta)}{\partial t\, \partial\theta} < 0.$$

ce qui fournit le résultat. □

Dominance pour les fonctions de hasard

Supposons que $\lambda(t) \geqslant \lambda^*(t)$, $\forall t$. Nous en déduisons que :

$$\int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(u)\,du \geqslant \int_{t_0}^{t+t_0} \lambda^*(u)\,du, \qquad \forall t_0, t \text{ positifs}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Lambda(t+t_0) - \Lambda(t_0) \geqslant \Lambda^*(t+t_0) - \Lambda^*(t_0), \qquad \forall t_0, t \text{ positifs}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S^*(t+t_0)}{S^*(t_0)} \geqslant \frac{S(t+t_0)}{S(t_0)}, \qquad \forall t_0, t \text{ positifs}$$

La dominance d'ordre un des lois conditionnelles à $\tau \geqslant t_0$ en découle, en notant que sous la loi S :

$$P(\tau \geqslant t + t_0 / \tau \geqslant t_0) = \frac{S(t+t_0)}{S(t_0)}.$$

Inversement si on a la dominance stochastique d'ordre un, on en déduit :

$$\int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(u)\,du \geqslant \int_{t_0}^{t+t_0} \lambda^*(u)\,du, \qquad \forall t_0, t \text{ positifs}$$

On a donc :

$$\lim_{t \mapsto \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(u)\,du \geqslant \lim_{t \mapsto \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t_0} \lambda^*(u)\,du, \qquad \forall t_0.$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(t_0) \geqslant \lambda^*(t_0), \qquad \forall t_0.$$

Ordre sur les distributions d'hétérogénéité impliquant la dominance pour les fonctions de hasard

(i) Nous avons :

$E[\alpha \exp - \alpha\, t/\theta] - E[\alpha/\theta]\, E[\exp - \alpha\, t/\theta] \leqslant 0$, car α et $\exp(-\alpha\, t)$ sont des fonctions respectivement croissante et décroissante de α. De plus comme $E[\alpha/\theta] = 0$, nous avons $E[\alpha \exp - \alpha\, t/\theta] \leqslant 0$.

Nous en déduisons que :

$$\lambda^*(t) = \frac{\displaystyle\iint_{\Theta^2} (\theta+\alpha) \exp[-(\theta+\alpha)\, t]\, \Pi_2(d\alpha/\theta)\, \Pi_1(d\theta)}{\displaystyle\iint_{\Theta^2} \exp[-(\theta+\alpha)\, t]\, \Pi_2(d\alpha/\theta)\, \Pi_1(d\theta)}$$

$$= \frac{E[(\theta+\alpha) \exp - \theta\, t \exp - \alpha\, \mathrm{t}]}{E[\exp - \theta\, t \exp - \alpha\, t]}$$

$$= \frac{E[\theta \exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}{E[\exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]} + \frac{E[\exp - \theta\, t\, E[\alpha \exp - \alpha\, t/\theta]]}{E[\exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}.$$

$$\leqslant \frac{E[\theta \exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}{E[\exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}.$$

(ii) Par ailleurs, comme $E[\exp - \alpha\, t/\theta]$ est décroissante par rapport à θ, on a :

$$\underset{t}{\mathrm{Cov}}\,(\theta, E(\exp - \alpha\, t/\theta)) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{E[\theta \exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}{E(\exp - \theta\, t)} - \frac{E(\theta \exp - \theta\, t)}{E(\exp - \theta\, t)}\, \frac{E[\exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}{E(\exp - \theta\, t)} \leqslant 0,$$

$$\Leftrightarrow \frac{E[\theta \exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]}{E[\exp - \theta\, t\, E(\exp - \alpha\, t/\theta)]} \leqslant \frac{E(\theta \exp - \theta\, t)}{E(\exp - \theta\, t)} = \lambda(t).$$

Ceci implique d'après (i) : $\lambda^*(t) \leqslant \lambda(t)$. □

• Références bibliographiques

Brumelle, S. et Vickson, R. (1975). – « A Unified Approach to Stochastic Dominance » in *Stochastic optimization models in Finance*, Ed. Ziemba-Vickson, Academic Press, p. 101-113.

Chamberlain, G. (1979). – *Heterogeneity, Omitted Variable Bias and Duration Dependence*, Harvard D.P.

Chesher, A. (1984). – « Testing for Neglected Heterogeneity », *Econometrica*, 52, p. 865-872.

Chesher, A. et Lancaster, T. (1983). – « The Estimation of Models of Labour Market Behaviour », *R.E.S.*, p. 609-624.

Congdon, P. (1985). – « Heterogeneity and Timing Effect in Occupational Mobility: a General Model », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 47, p. 347-369.

Cox, D. et Oakes, D. – *Analysis of Survival Data*, Chapman-Hall.

Elbers, C. et Ridder, G. (1982). – « True and Spurious Duration Dependence: the Identifiability of the Proportional Hazard Model », *R.E.S.*, 49, p. 403-410.

Feller, W. (1971). – *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, New York, Wiley, Chapter XIII.

Flinn, C. et Heckman, J. L. (1982). – « New Methods for Analyzing Structural Models of Labor Force Dynamics », *Journal of Econometrics*, 18, p. 115-168.

Gouriéroux, C. (1989). – *Econométrie des variables qualitatives*, seconde édition, Economica.

Heckman, J. (1981). – « Heterogeneity and State Dependence », in *Studies in Labor Markets*, Ed. S. Rosen, University of Chicago Press.

Heckman, J. et Singer, B. (1984). – « Econometric Duration Analysis », *Journal of Econometrics*, 24, p. 63-132.

Kalbfleisch, J. et Prentice, R. (1980). – *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, Wiley.

Kiefer, N. (1984). – « A Simple Test for Heterogeneity in Exponential Models of Duration », *Journal of Labor Economics*, 2, p. 534-549.

Lancaster, T. (1979). – « Econometric Methods for the Duration of Unemployment », *Econometrica*, 47, p. 939-956.

Lancaster, T. et Nickell, S. (1980). – « The Analysis of Re-employment Probabilities of the Unemployed », *JRSS* A, p. 141-165.

Lawless, J. (1982). – *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley.

Nickell, S. (1979). – « Estimating the Probability of Leaving Unemployment », *Econometrica*, 47, p. 1249-1266.

Rothschild, M. et Stiglitz, J. (1970). – « Increasing Risk I: A definition », *JET* 2, p. 225-247.

Rothschild, M. et Stiglitz, J. (1973). – « Some Further Results on the Measurement of Inequality », *JET* 6, p. 188-204.

Spilerman, S. (1972). – « Extensions of the Mover-Stayer Model », *American Journal of Sociology*, 78, p. 599-626.