Hétérogénéité II. Étude des biais de représentativité

(sous l'hypothèse d'exogénéité faible)

Christian GOURIÉROUX *

RÉSUMÉ. – Dans les modèles microéconométriques les différences entre individus sont prises en compte par l'intermédiaire des variables explicatives apparaissant dans le modèle, mais souvent aussi par l'intermédiaire des paramètres d'intérêt. Cette hétérogénéité du paramètre est généralement introduite en se donnant la distribution de ce paramètre sur les individus (distribution d'hétérogénéité) et en supposant que celle-ci est indépendante des valeurs des variables explicatives (hypothèse d'exogénéité faible). On remplace alors le modèle désagrégé initial par le modèle intégré par la distribution d'hétérogénéité, dit modèle par individu représentatif. Le but de ce papier est de discuter les biais d'interprétations, lorsque le modèle représentatif est directement utilisé comme s'il n'y avait pas hétérogénéité. On montre par exemple que la pratique usuelle conduit à surestimer les substitutions dans les modèles de consommation ou de production, à surestimer en général le taux de progrès technique; en revanche elle n'entraîne pas de biais important au niveau du calcul des fonctions de coût.

Heterogeneity II. Study of Bias (under the weak exogeneity assumption)

ABSTRACT. – In microeconomic, the individual differences are taken into account by the introduction of explanatory variables but also by means of the parameters of interest. This parameter of heterogeneity is in general described by the p.d.f. of the parameter among the individuals (heterogeneity distribution) and it is often assumed that it is independent on the values of the explanatory variables (Assumption of weak exogeneity). Then we replace the initial disaggregate model by the model integrated with respect to the heterogeneity distribution (The so-called representative model). The aim of this paper is to discuss the biases, which are consequences of a direct use of the representative model, as if heterogeneity was absent. We establish in particular that this usual practice leads to an overestimation of the substitution phenomenas in consumption or production models, to an overestimation of the effect of technical progress. On the other hand the biases may be neglected if we are interested in determining cost functions.

* C. GOURIÉROUX: CREST et CEPREMAP. Tous mes remerciements à I. Peaucelle et M. C. Pichery pour leurs commentaires sur les diverses versions de cet article.

1 Introduction

1.1. Modèles à coefficients aléatoires

Dans les modèles estimés sur données microéconomiques (individuelles ou spatio-temporelles) les différences entre individus sont prises en compte par l'intermédiaire des variables explicatives introduites dans le modèle, mais souvent aussi par l'intermédiaire des paramètres d'intérêt, qui mesurent par exemple l'effet des variables explicatives sur la variable endogène.

Considérons à titre d'illustration l'estimation d'une fonction de production de Cobb-Douglas sur données panel; le modèle au niveau désagrégé est défini par :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Log} Y_{it} = \theta_{i\,0} + \theta_{i\,1} \operatorname{Log} K_{it} + \theta_{i\,2} \operatorname{Log} L_{it} + \theta_{i\,3} \operatorname{Log} t + u_{it},$$
$$i = 1, \ldots, n; \qquad t = 1, \ldots, T,$$

où les erreurs u_{it} sont supposées centrées, non corrélées, de même variance. Y_{it} désigne la quantité d'output produite par l'entreprise i à la période t; K_{it} et L_{it} sont les quantités de capital et de travail utilisées pour cette production; le terme $\operatorname{Log} t$ est introduit pour prendre en compte par exemple le progrès technique. Les coefficients $\theta_{i\,1}$, $\theta_{i\,2}$ qui s'interprètent comme des élasticités, dépendent du type d'entreprises considéré; c'est pourquoi ils ont été indexés par i. Ils auraient pu aussi être indexés par la période t, le progrès technique pouvant induire une substitution capital-travail. Nous avons ici supposé l'indépendance temporelle des coefficients afin de simplifier les écritures et les résultats, mais aussi parce qu'à court terme l'effet du progrès technique se traduit plus en terme de niveau de production que de substitution entre inputs.

On pourrait penser estimer directement le modèle de production désagrégé (1) à partir de données panel, en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires entreprise par entreprise. Cependant cette démarche se révèle souvent peu satisfaisante. Le nombre d'observations relatif à la composante temporelle est généralement assez faible, ce qui implique des estimateurs peu précis des coefficients $(\theta_{0\,i}, \theta_{1\,i}, \theta_{2\,i}, \theta_{3\,i})$.

On peut alors essayer de décrire les différences individuelles existant au niveau des coefficients (*l'hétérogénéité*) par une distribution de probabilité. Supposons que les vecteurs $(\theta_{0\,i}, \theta_{1\,i}, \theta_{2\,i}, \theta_{3\,i})'$, $i = 1, \ldots, n$ puissent être considérés comme indépendants, extraits d'une même loi de moyenne $(\bar\theta_0, \bar\theta_1, \bar\theta_2, \bar\theta_3)'$. On peut réécrire le modèle initial sous la forme :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Log} Y_{it} = \bar\theta_0 + \bar\theta_1 \operatorname{Log} K_{it} + \bar\theta_2 \operatorname{Log} L_{it} + \bar\theta_4 \operatorname{Log} t + v_{it},$$

où l'erreur :

$$v_{it} = u_{it} + \theta_{0\,i} - \bar\theta_0 + (\theta_{1\,i} - \bar\theta_1) \operatorname{Log} K_{it} + (\theta_{2\,i} - \bar\theta_2) \operatorname{Log} L_{it} + (\theta_{3\,i} - \bar\theta_3) \operatorname{Log} t,$$

est centrée.

On peut alors estimer directement les valeurs moyennes $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$, $\bar{\theta}_3$ en régressant la variable endogène sur les explicatives pour toutes les observations. Ceci nous conduit naturellement à introduire une « fonction de production moyenne » :

$$\operatorname{Log} Y_{it} = \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 \operatorname{Log} K_{it} + \bar{\theta}_2 \operatorname{Log} L_{it} + \bar{\theta}_3 \operatorname{Log} t,$$

où, pour simplifier les notations, nous avons conservé la même notation Y_{it} pour la production. Nous l'appellerons *fonction de production représentative* ou *fonction de production d'une firme représentative.* Nous avons vu qu'il s'agit d'une fonction essentiellement introduite dans un but d'estimation. Cependant l'exemple montre aussi que cette fonction est une fonction de production (elle est de type Cobb-Douglas). Ceci peut conduire à l'utiliser comme telle et par exemple à calculer les élasticités de la production par rapport au capital ou au travail, les élasticités de substitution, la fonction de coût... associées à cette fonction représentative. Ces calculs n'ont cependant de sens que si ces résumés de la fonction représentative sont facilement interprétables en fonction des résumés désagrégés correspondants. C'est cette question de l'interprétation des résumés de la fonction représentative que nous discutons dans ce papier.

1.2. Résumés désagrégés et résumés de la fonction représentative

Nous commençons par présenter le problème sous une forme plus générale.

Le modèle économétrique, en général non linéaire, que nous étudions au niveau désagrégé peut être écrit en niveau ou en logarithme. Dans le premier cas, il se présente sous la forme :

$$(3) \qquad Y_{it} = g(X_{it}, t, \theta_i) + u_{it}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, T,$$

où comme dans l'exemple précédent l'hétérogénéité n'est introduite qu'au niveau individuel. Ce modèle sera dans la suite appelé modèle en niveau. Ce modèle peut être résumé en intégrant l'hétérogénéité sur les individus. Dans la suite nous supposons toujours que *la distribution d'hétérogénéité* de la date *t ne dépend pas des valeurs prises par les variables* X. Il s'agit d'une hypothèse qui est impliquée par la condition d'exogénéité faible des variables explicatives introduites dans le modèle (voir GOURIÉROUX-PEAUCELLE [1990]). En revanche cette distribution peut dépendre du temps. Nous notons $\pi(\theta, t)$ la densité de cette distribution. Le modèle par *individu représentatif* associé est alors :

$$(4) \qquad Y_{it} = G(X_{it}, t) + v_{it}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, T,$$

avec :

$$G(X, t) = \int g(X, t, \theta)\, \Pi(t, \theta)\, d\theta = \underset{t}{E}\, g(X, t, \theta).$$

Une démarche similaire peut être suivie, lorsque le modèle initial concerne une variable économique expliquée, exprimée en logarithme. Le modèle initial est :

(5) $\quad \operatorname{Log} Y_{it} = \operatorname{Log} g(X_{it}, t, \theta_i) + u_{it}, \qquad i=1, \ldots, n, \quad t=1, \ldots, T,$

et dans la suite est appelé modèle en logarithme.

Le modèle représentatif s'en déduit par intégration; on a :

(6) $\quad \operatorname{Log} Y_{it} = \operatorname{Log} G(X_{it}, t) + v_{it}, \qquad i=1, \ldots, n, \quad t=1, \ldots, T,$

avec :

$$G(X, t) = \exp \int \operatorname{Log} g(X, t, \theta)\, \Pi(t, \theta)\, d\theta = \exp \underset{t}{E} \operatorname{Log} g(X, t, \theta).$$

Les formulations précédentes sont suffisamment larges pour couvrir de nombreux exemples rencontrés en pratique : estimation de modèles à coefficients aléatoires à partir de données panel ($t=1, \ldots, T$) ou à partir d'une coupe instantanée ($t=1$) (dans ce dernier cas il n'est évidemment pas nécessaire de faire apparaître l'indice temps dans la distribution d'hétérogénéité), estimation de fonctions de production, de fonctions de coût, de fonctions de demande...

Pour ces diverses fonctions, il est naturel pour faciliter l'interprétation de calculer certains résumés. Un résumé scalaire apparaît comme une application qui à une telle fonction de (X, t), notée $g(.)$ fait correspondre un réel $\varphi(g)$. Ainsi, pour un modèle exprimé en niveau, l'élasticité par rapport à la première variable, évaluée en X, t est l'application :

$$g(.) \rightarrow \varphi(g) = \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, t)}{\partial \operatorname{Log} X_1}.$$

Ces résumés peuvent être calculés à la fois au niveau désagrégé et à partir de la fonction représentative. On obtient respectivement :

(7) $$\varphi(\theta) = \varphi(g(.\,; \theta));$$

et

(8) $$\Phi = \varphi(G(.)).$$

Nous nous proposons d'examiner les relations entre le résumé Φ et les divers résumés individuels $\varphi(\theta)$. En particulier nous considérons les questions suivantes :

(i) Le *résumé* Φ est-il *représentatif*, au sens où il se déduit des résumés désagrégés par simple intégration? Mathématiquement il s'agit de vérifier si :

(9) $$\Phi = \underset{t}{E}\, \varphi(\theta) = \int \varphi(\theta)\, \Pi(\theta, t)\, d\theta.$$

(ii) Généralement la condition précédente ne sera pas satisfaite. Ceci s'explique par le fait qu'il n'est pas possible de commuter la notion d'espérance avec des applications non linéaires. On peut alors penser à une notion de *représentativité faible.* Le *résumé* est *faiblement représentatif* s'il se déduit des résumés désagrégés par une moyenne non nécessairement fondée sur la distribution d'hétérogénéité initiale. Il s'agit donc d'étudier l'existence d'une loi $\Pi^*(\theta, X, t)$ telle que :

$$\Phi = \overset{*}{\underset{t}{E}}\, \varphi(\theta) = \int \varphi(\theta)\, \Pi^*(\theta, X, t)\, d\theta \left(\neq \int \varphi(\theta)\, \Pi(\theta, t)\, d\theta\right). \tag{10}$$

Lorsqu'une telle relation existe, il est intéressant d'examiner la forme des pondérations Π^* conduisant à cette interprétation naturelle de Φ. (iii) Dans les cas usuels, les résumés Φ ne sont pas représentatifs, même faiblement. On peut alors étudier l'erreur d'interprétation commise en les utilisant tels quels. Pour cela on peut calculer le *biais de représentativité :*

$$B(\Phi) = \Phi - E\,\varphi(\theta) = \Phi - \int \varphi(\theta)\, \Pi(\theta, t)\, d\theta, \tag{11}$$

regarder son signe et son importance. Un tel biais pourra aussi dans certains cas être évalué par rapport à une moyenne fondée sur une autre distribution $\Pi^*(\theta, X, t)$.

1.3. Plan du papier

Dans le paragraphe 2, nous présentons divers résumés, qui souvent apparaissent représentatifs ou faiblement représentatifs. C'est le cas des propensions ou des productivités marginales, des élasticités, des rendements, du progrès technique, des taux marginaux de substitution.

Dans le paragraphe 3, nous développons des applications relatives aux phénomènes de substitutions. Nous commençons par examiner le cas des systèmes complets de demande et décrivons un cas où le système représentatif, c'est-à-dire intégré par la distribution d'hétérogénéité, satisfait les conditions d'intégrabilité dès que les systèmes de demande désagrégés les satisfont. Ceci nous permet de comparer la matrice de Slutsky calculée à partir du système représentatif avec la moyenne des matrices de Slutsky désagrégées. On voit *qu'il y a un biais de représentativité dans le sens d'un accroissement* (*fictif*) *de la substitution.* De plus ce biais peut être facilement majoré à partir de la matrice de variance covariance des erreurs apparaissant dans le système complet de demande (matrice qui, rappelons-le, est singulière).

Le même type de démarche est appliquée au cas de la production. Ceci permet de voir que dans ce cas également il y a un biais de représentativité qui va dans le sens d'un accroissement fictif de la substitution.

Finalement dans le paragraphe 4, nous nous intéressons à des résumés obtenus de façon indirecte. Nous considérons à titre d'exemple l'effet sur la fonction de coût d'une intégration effectuée sur les fonctions de production. Des résultats très généraux sont difficiles à obtenir, mais en revanche on peut mener une étude complète en supposant que l'hétérogénéité n'est pas trop importante. Cette étude locale permet de mettre en évidence *une représentativité à l'ordre deux des résumés tels que la fonction de coût et les fonctions de demande.*

Les divers résultats qui sont ainsi obtenus doivent être principalement considérés comme des illustrations de type pédagogique. En effet les biais sont présentés et étudiés en supposant qu'il n'y a pas d'erreurs de spécification autres que celles dues à l'hétérogénéité, ou que celles-ci sont d'importance secondaire.

2 Quelques résumés représentatifs

Les exemples les plus connus de résumés représentatifs sont les propensions ou productivités marginales et les élasticités. Les liens entre ces résumés et les résumés désagrégés correspondants sont explicités dans divers ouvrages de microéconomie [voir e. g. VARIAN [1984]]. Nous rappelons donc ces propriétés essentiellement pour bien mettre en évidence les techniques qui seront utilisées dans la suite.

2.1. Propensions ou productivités marginales

(i) Considérons d'abord le cas d'un modèle en niveau. La propension relativement à une variable X_1 est définie par :

$$\varphi(\theta)=\frac{\partial g(X, t, \theta)}{\partial X_1}.$$

Comme il est possible d'intervertir les dérivations et les calculs d'espérance sous des conditions assez générales, on a :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\partial G(X, t)}{\partial X_1} \\ &= \frac{\partial \underset{t}{E}\, g(X, t, \theta)}{\partial X_1} \\ &= \underset{t}{E}\left[\frac{\partial g(X, t, \theta)}{\partial X_1}\right] \\ &= \underset{t}{E}\, \varphi(\theta).\end{aligned}$$

La propension calculée sur la fonction représentative est donc représentative des propensions désagrégées. Le même résultat serait aussi valable pour toutes les dérivées supérieures par rapport aux diverses composantes du vecteur X.

PROPRIÉTÉ 1 : Dans le cas d'un modèle en niveau, la propension Φ est représentative des propensions individuelles.

(ii) Si maintenant le modèle initial est en logarithme, on a :

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\partial G(X, t)}{\partial X_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial X_1}[\exp \mathop{E}_t \operatorname{Log} g(X, t, \theta)] \\ &= \exp[\mathop{E}_t \operatorname{Log} g(X, t, \theta)] \mathop{E}_t\left[\frac{1}{g(X, t, \theta)}\varphi(\theta)\right].\end{aligned}$$

On voit que la propension Φ apparaît comme une somme des propensions désagrégées avec des coefficients : $\dfrac{\exp \mathop{E}_t \operatorname{Log} g(X, t, \theta)}{g(X, t, \theta)}$, dont la somme n'est pas égale à 1. Dans ce cas la propension Φ n'apparaît pas faiblement représentative. On peut cependant avoir une idée sur le biais de représentativité. La distribution la plus naturelle à introduire est :

$$\Pi^*(\theta, X, t) = \frac{1}{g(X, t, \theta)}\Pi(\theta, t)/\mathop{E}_t\left[\frac{1}{g(X, t, \theta)}\right],$$

ce qui a un sens puisque g est, dans un modèle en logarithme, à valeurs strictement positives. On a alors :

$$\Phi - \mathop{\overset{*}{E}}_t \varphi(\theta) = \mathop{E}_t\left[\frac{\varphi(\theta)}{g(X, t, \theta)}\right][\exp \mathop{E}_t \operatorname{Log} g(X, t, \theta) - 1/E_t[1/g(X, t, \theta)]].$$

Comme une moyenne géométrique est toujours supérieure à une moyenne harmonique, le second terme du produit est toujours positif. On en déduit la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ 2 : Dans un modèle en logarithme, la propension calculée sur la fonction représentative a tendance à surestimer la propension moyenne $\mathop{\overset{*}{E}}_t \varphi(\theta)$ lorsque celle-ci est positive, à la sous-estimer sinon.

2.2. Élasticités

La même approche peut être suivie pour les élasticités.

(i) Lorsque le modèle est en niveau, on a pour les résumés désagrégés :

$$\varphi(\theta) = \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, t, \theta)}{\partial \operatorname{Log} X_1},$$

et pour la fonction représentative :

$$\Phi = \frac{\partial \operatorname{Log} G(X, t)}{\partial \operatorname{Log} X_1}.$$

On peut expliciter cette dernière formule; on obtient :

$$\Phi = \frac{1}{G(X, t)} \frac{\partial \operatorname{Log} G(X, t)}{\partial \operatorname{Log} X_1},$$

$$\Phi = \frac{1}{\underset{t}{E}\, g(X, t, \theta)} \underset{t}{E} \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, t, \theta)}{\partial \operatorname{Log} X_1},$$

$$\Phi = \frac{1}{\underset{t}{E}\, g(X, t, \theta)} \underset{t}{E} [\varphi(\theta) g(X, t, \theta)].$$

Dès que la fonction g est à valeurs positives, on peut introduire la distribution de probabilité :

$$\Pi^* (\theta, X, t) = g(X, t, \theta)\, \Pi(\theta, t) / \underset{t}{E}\, g(X, t, \theta),$$

et on vérifie que : $\Phi = \overset{*}{\underset{t}{E}}\, \varphi(\theta)$.

Propriété 3 : Dans le cas d'un modèle en niveau, l'élasticité calculée à partir de la fonction représentative est faiblement représentative des élasticités désagrégées. Les pondérations sont proportionnelles aux valeurs de la fonction g.

Ainsi le résumé Φ a une interprétation en terme de moyenne, mais pour une loi différente de la distribution d'hétérogénéité initiale. Il est alors naturel d'examiner l'écart entre Φ et la moyenne $\underset{t}{E}\, \varphi(\theta)$ prise par rapport à cette distribution. On a :

$$\begin{aligned} &\varphi - \underset{t}{E}\, \varphi(\theta) \\ &= \frac{\underset{t}{E} [g(X, t, \theta)\, \varphi(\theta)]}{\underset{t}{E} [g(X, t, \theta)]} - \underset{t}{E}\, \varphi(\theta) \\ &= \frac{1}{\underset{t}{E} [g(X, t, \theta)]} \underset{t}{\operatorname{Cov}} [g(X, t, \theta), \varphi(\theta)]. \end{aligned}$$

Propriété 4 : On a :

$$\Phi - \underset{t}{E}\, \varphi(\theta) = \frac{1}{\underset{t}{E} [g(X, t, \theta)]} \underset{t}{\operatorname{Cov}} [g(X, t, \theta), \varphi(\theta)].$$

En particulier on a un biais de représentativité positif si les élasticités sont fonctions croissantes des niveaux, négatif si elles sont fonctions décroissantes de ces niveaux.

La propriété résulte du fait que deux variables aléatoires en liaison croissante ont une covariance positive.

(ii) La calcul correspondant à des données en logarithme est évidemment direct et conduit au résultat ci-dessous.

Propriété 5 : Dans le cas d'un modèle en logarithme, l'élasticité Φ est représentative des élasticités individuelles.

2.3. Rendements d'échelle

Dans le cas de fonctions de production, on peut s'intéresser aux rendements d'échelle. Ce résumé est défini à partir de l'équation d'Euler et est égal à :

$$\varphi(\theta) = X' \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, t, \theta)}{\partial X};$$

les liens avec le résumé Φ correspondant se déduisent immédiatement des propriétés montrées pour les élasticités.

Propriété 6 : Dans le cas d'un modèle en niveau, Φ est faiblement représentatif et il est représentatif pour un modèle en logarithme. En particulier si toutes les fonctions désagrégées sont à rendement d'échelle constant $\varphi(\theta) = 1$, $\forall \theta$ [resp. croissant $\varphi(\theta) \geqslant 1$, $\forall \theta$, resp. décroissant $\varphi(\theta) \leqslant 1$, $\forall \theta$], il en est de même de la fonction représentative : $\Phi = 1$ (resp. : $\Phi \geqslant 1$, resp. : $\Phi \leqslant 1$).

2.4. Taux de progrès technique

Ce résumé est également relatif au cas d'une fonction de production, mais aurait son analogue en théorie de la demande avec une interprétation du type modification temporelle des préordres de préférence. Nous considérons par exemple le cas d'un modèle en logarithme. On a :

$$\varphi(\theta) = \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, t, \theta)}{\partial t}.$$

Le résumé Φ correspondant est :

$$\Phi = \frac{\partial \operatorname{Log} G(X, t)}{\partial t}$$

Dans le calcul explicite de ce résumé, nous devons maintenant tenir compte de la modification éventuelle de la distribution d'hétérogénéité en fonction de la variable intervenant dans la dérivation, c'est-à-dire le temps.

On a :

$$\Phi = \frac{\partial \underset{t}{\mathrm{E}} \operatorname{Log} g(\mathrm{X}, t, \theta)}{\partial t}$$

$$= \underset{t}{\mathrm{E}} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} g(\mathrm{X}, t, \theta) + \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\operatorname{Log} g(\mathrm{X}, t, \theta) \frac{\partial \operatorname{Log} \Pi(\theta, t)}{\partial t} \right].$$

Comme Π est une distribution de probabilité, on a :

$$\underset{t}{\mathrm{E}} \frac{\partial \operatorname{Log} \Pi(\theta, t)}{\partial t} = \int \frac{\partial \Pi(\theta, t)}{\partial t} d\theta = \frac{\partial}{\partial t} \int \Pi(\theta, t)\, d\theta = \frac{\partial}{\partial t}(1) = 0;$$

On en déduit que :

$$\Phi - \underset{t}{\mathrm{E}}\, \varphi(\theta) = \underset{t}{\mathrm{Cov}} \left[\operatorname{Log} g(\mathrm{X}, t, \theta), \frac{\partial \operatorname{Log} \Pi(\theta, t)}{\partial t} \right]$$

PROPRIÉTÉ 7 : Un calcul direct effectué à partir de la fonction représentative conduit à un biais de représentativité, dès que la modification temporelle de la distribution d'hétérogénéité est liée au niveau de production.

Le sens de ce biais peut souvent être évalué en pratique. Si par exemple la proportion de firmes ayant de fortes productions a tendance à croître avec le temps, le résumé Φ prendre à la fois en compte le progrès technologique et cette modification de la distribution des firmes. Cette modification ayant un effet positif sur le niveau de production, il y aura surestimation du progrès technique individuel en utilisant Φ.

2.5. Taux marginaux de substitution

Prenons le cas d'une fonction de production estimée en niveau. Les taux sont définis par :

$$\varphi_{kl}(\theta) = \frac{\partial g(\mathrm{X}, t, \theta)}{\partial \mathrm{X}_k} \Big/ \frac{\partial g(\mathrm{X}, t, \theta)}{\partial \mathrm{X}_l}, \qquad \Phi_{kl} = \frac{\partial \mathrm{G}(\mathrm{X}, t)}{\partial \mathrm{X}_k} \Big/ \frac{\partial \mathrm{G}(\mathrm{X}, t)}{\partial \mathrm{X}_l},$$

où k et l sont les indices des deux facteurs entre lesquels a lieu la substitution.

On a :

$$\Phi_{kl} = \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial g(\mathrm{X}, \theta, t)}{\partial \mathrm{X}_k} \right] \Big/ \left[\frac{\partial g(\mathrm{X}, \theta, t)}{\partial \mathrm{X}_l} \right]$$

$$= \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial g(\mathrm{X}, \theta, t)}{\partial \mathrm{X}_l} \varphi_{kl}(\theta) \right] \Big/ \underset{t}{\mathrm{E}} \left[\frac{\partial g(\mathrm{X}, \theta, t)}{\partial \mathrm{X}_l} \right].$$

On voit donc qu'il s'agit d'une moyenne dès que les productivités $\dfrac{\partial g(\mathrm{X}, \theta, t)}{\partial \mathrm{X}_l}$ sont à valeurs positives.

PROPRIÉTÉ 8 : Le taux marginal de substitution Φ est faiblement représentatif des taux marginaux de substitution désagrégés. Les pondérations sont proportionnelles aux productivités marginales relatives à l'un des facteurs.

3 Étude de la substitution à partir des fonctions représentatives

Les propriétés précédentes étaient faciles à établir parce qu'elles concernaient des dérivées, directes ou logarithmiques, ou des rapports de dérivées. Nous allons maintenant présenter quelques calculs de biais relatifs à des fonctions plus compliquées. Nous considérons successivement les coefficients de substitution en théorie de la consommation et les élasticités de substitution en théorie de la production. Les divers modèles sont pris en niveaux et on ne fait apparaître ni l'indice temporel t, ni l'indice individuel i, pour ne pas alourdir les notations.

3.1. Conditions d'intégrabilité en théorie de la demande

3.1.1. *Modèles désagrégés et représentatif*

On s'intéresse à un ensemble de systèmes complets de demande (un système par individus) supposés compatibles avec la maximisation d'une fonction d'utilité. Cette fonction dépend de l'individu considéré et la maximisation.

$$\begin{cases} \max_y \mathrm{U}(y, \theta) \\ p' y = \mathrm{R}, \end{cases}$$

conduit à un système de demandes marshaliennes de la forme :

$$y = g(p, \mathrm{R}, \theta), \tag{12}$$

qui est multidimensionnel avec une dimension égale au nombre de biens.

Inversement étant donné un système tel que (12) de fonctions homogènes en (p, R), on sait qu'il peut être vu comme résultant d'une optimisation d'utilité sous contrainte de budget si les conditions d'intégrabilité ci-dessous sont satisfaites :

Conditions d'intégrabilité (13)

$$p' g(p, \mathrm{R}, \theta) = \mathrm{R} \tag{$*$}$$

(**) Si: $s_{hk}(p, \mathrm{R}, \theta) = \dfrac{\partial g_h}{\partial p_k}(p, \mathrm{R}, \theta) + g_k(p, \mathrm{R}, \theta)\dfrac{\partial g_h}{\partial \mathrm{R}}(p, \mathrm{R}, \theta)$,

désigne le coefficient de substitution, la matrice de Slutsky $s = (s_{hk})$ est symétrique, semi-définie négative et telle que $p' s = 0$.

Si maintenant nous nous intéressons à l'estimation de systèmes complets de demande en niveau, nous sommes conduits à intégrer les diverses fonctions de demande par rapport à la même distribution d'hétérogénéité. Le système représentatif est alors :

$$y = \mathrm{G}(p, \mathrm{R}) = \mathrm{E}\, g(p, \mathrm{R}, \theta). \tag{13}$$

Une question naturelle est alors de savoir si ce système représentatif peut ou non être vu comme résultant de l'optimisation d'une fonction d'utilité. Comme l'homogénéité est conservée par intégration, il suffit d'examiner les conditions d'intégrabilité.

3.1.2. *Coefficients de Slutsky calculés à partir du système représentatif*

Notons S_{hk} ces coefficients. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{hk} &= \frac{\partial \mathrm{G}_h(p, \mathrm{R})}{\partial p_k} + \mathrm{G}_k(p, \mathrm{R})\frac{\partial \mathrm{G}_h(p, \mathrm{R})}{\partial \mathrm{R}} \\
&= \mathrm{E}\left(\frac{\partial g_h(p, \mathrm{R}, \theta)}{\partial p_k}\right) + \mathrm{E}[g_k(p, \mathrm{R}, \theta)]\,\mathrm{E}\left[\frac{\partial g_h(p, \mathrm{R}, \theta)}{\partial \mathrm{R}}\right] \\
&= \mathrm{E}\, s_{hk}(p, \mathrm{R}, \theta) - \mathrm{Cov}\left[g_k(p, \mathrm{R}, \theta), \frac{\partial g_h(p, \mathrm{R}, \theta)}{\partial \mathrm{R}}\right].
\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 9 : Il y a généralement un biais dans la détermination des coefficients de Slutsky s_{hk}. Ce biais a un signe opposé à la corrélation entre la demande de bien k et la propension marginale à consommer relative au bien h.

On peut alors regarder quelles sont parmi les conditions d'intégrabilité celles qui sont satisfaites.

1. Comme : $p' g(p, \mathrm{R}, \theta) = \mathrm{R}$, $\forall \theta$, on a par intégration :

$$\mathrm{E}\, p' g(p, \mathrm{R}, \theta) = p' \mathrm{G}(p, \mathrm{R}) = \mathrm{R}.$$

La contrainte de budget est donc satisfaite pour le système de demande représentatif.

2. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
p' \mathrm{S} &= p' \mathrm{E}\, s - p' \mathrm{Cov}\left[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{R}}(p, \mathrm{R}, \theta), g(p, \mathrm{R}, \theta)\right] \\
&= \mathrm{E}(p' s) - \mathrm{Cov}\left[p' \frac{\partial g}{\partial \mathrm{R}}(p, \mathrm{R}, \theta), g(p, \mathrm{R}, \theta)\right].
\end{aligned}$$

D'après la contrainte sur les matrices de Slutsky désagrégées on a : $p's=0$. De plus par dérivation de la contrainte de budget, on obtient : $p'\frac{\partial g}{\partial R}(p, R, \theta)=1$ et donc la covariance entre cette dérivée et la demande g est nulle. En résumé la contrainte : $p'S=0$, est satisfaite.

3. En revanche la condition de symétrie n'est généralement pas satisfaite au niveau du système représentatif.

Propriété 10 : Le système de demande représentatif ne peut généralement pas être considéré comme provenant de la maximisation d'une fonction d'utilité, même si cette propriété est satisfaite au niveau désagrégé.

3.1.3. *Cas de fonctions d'utilité fournissant des courbes d'Engel linéaires*

Des résultats plus précis peuvent être obtenus pour des systèmes de demande particuliers. Supposons par exemple que les fonctions d'utilité au niveau désagrégé conduisent à des courbes d'Engel linéaires. De telles fonctions correspondent à la famille de Bergson (voir Pollak [1971]). Dans ce cas, on a :

$$g_k(p, R, \theta)=a_k(p, \theta)R+b_k(p, \theta), \qquad \frac{\partial g_h}{\partial R}(p, R, \theta)=a_h(p, \theta).$$

Supposons de plus que le terme constant ne dépende pas du facteur d'hétérogénéité : $b_k(p, \theta)=b_k(p)$ (cette hypothèse est symétrique de celle $a_k(p, \theta)=a_k(p)$ imposée habituellement pour avoir l'agrégation parfaite). On a alors :

$$S=Es(p, R, \theta)-RVa(p, \theta),$$

où $Va(p, \theta)$ désigne la variance des propensions marginales. Dans ce cas la matrice S est symétrique. De plus comme le revenu est positif, que $Va(p, \theta)$ est non négative et que $s(p, R, \theta)$ est semi-définie négative, on en déduit que la matrice S est semi-définie négative.

Propriété 11 : Lorsque les courbes d'Engel désagrégées sont du type : $g(p, R, \theta)=a(p, \theta)R+b(p)$, le système de demande représentatif satisfait les conditions d'intégrabilité. De plus la matrice de Slutsky calculée à partir du système représentatif est inférieure à la moyenne des substitutions désagrégées.

Le modèle désagrégé :

$$y=a(p, \theta)R+b(p)+u,$$

est ici remplacé par le modèle représentatif :

$$y=Ea(p, \theta)R+b(p)+u+R(a(p, \theta)-Ea(p, \theta)).$$

Pour évaluer de façon non biaisée les coefficients de substitution moyens, il faut ajouter aux coefficients calculés à partir de la partie déterministe (c'est-à-dire S), une partie de la substitution $RV[a(p, \theta)]$ désormais cachée dans le terme d'erreur. Ainsi l'étude des corrélations des résidus dans un système complet de demande peut apporter de l'information sur les phénomènes de substitution. De plus on voit que l'oubli de cette composante de la substitution, c'est-à-dire l'emploi de la seule matrice S, conduit à une surévaluation des phénomènes de substitution.

3.2. Élasticités de substitution pour des fonctions de production homogènes de degré un

Nous avons vu (propriété 6) que les taux de rendements d'échelle constants sont conservés par examen de la fonction de production représentative. On peut donc employer aux niveaux désagrégés et représentatif la définition de l'élasticité de substitution entre les facteurs k et l :

$$\varphi_{kl}(\theta)=\frac{(\partial g/\partial X_k)(X,\theta)(\partial g/\partial X_l)(X,\theta)}{(\partial^2 g/\partial X_k\,\partial X_l)(X,\theta)\,g(X,\theta)},$$

$$\Phi_{kl}=\frac{(\partial G/\partial X_k)(X)(\partial G/\partial X_l)(X)}{(\partial^2 G/\partial X_k\,\partial X_l)(X)\,G(X)}.$$

On déduit de ces définitions que :

$$\frac{1}{\Phi_{kl}}=\frac{E[(\partial^2 g/\partial X_k\,\partial X_l)(X,\theta)]\,E\,g(X,\theta)}{E[(\partial g/\partial X_k)(X,\theta)]\,E[(\partial g/\partial X_l)(X,\theta)]},$$

$$\frac{1}{\Phi_{kl}}=\frac{E[(1/\varphi_{kl}(\theta))(1/g(X,\theta))(\partial g/\partial X_k)(X,\theta)(\partial g/\partial X_l)(X,\theta)]\,E\,g(X,\theta)}{E[(\partial g/\partial X_k)(X,\theta)]\,E[(\partial g/\partial X_l)(X,\theta)]}.$$

Introduisons alors les deux mesures :

$$\Pi^*(X,\theta)=\Pi(\theta)\frac{1}{g(X,\theta)}$$

$$\times\frac{\partial g}{\partial X_k}(X,\theta)\frac{\partial g}{\partial X_l}(X,\theta)/E\left[\frac{1}{g(X,\theta)}\frac{\partial g}{\partial X_k}(X,\theta)\frac{\partial g}{\partial X_l}(X,\theta)\right]$$

$$\tilde{\tilde{\Pi}}(X,\theta)=\Pi(\theta)\,g(X,\theta)/E[g(X,\theta)].$$

On peut écrire :

$$\frac{1}{\Phi_{kl}}=E^*\left(\frac{1}{\varphi_{kl}}\right)\frac{\tilde{\tilde{E}}[(\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_k)(\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_l)]}{\tilde{\tilde{E}}[\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_k]\,\tilde{\tilde{E}}[\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_l]},$$

$$\frac{1}{\Phi_{kl}}=E^*\left(\frac{1}{\varphi_{kl}}\right)+E^*\left(\frac{1}{\varphi_{kl}}\right)\frac{\tilde{\tilde{\mathrm{Cov}}}[(\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_k),(\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_l)]}{\tilde{\tilde{E}}[\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_k]\,\tilde{\tilde{E}}[\partial\,\mathrm{Log}\,g(X,\theta)/\partial X_l]}.$$

Il y a en général un biais de représentativité. Le sens de ce biais peut être déterminé dans un cas particulier important.

PROPRIÉTÉ 12 : Lorsque toutes les fonctions désagrégées sont à élasticités de substitution constantes σ indépendante du facteur d'hétérogénéité, l'élasticité de substitution calculée à partir de la fonction représentative est toujours supérieure à σ.

Ainsi, comme dans le cas de la consommation, l'hétérogénéité oubliée tend à accroître l'impression de substitution.

Preuve : Nous vérifions ce résultat en prenant pour simplifier le cas de deux inputs. Les fonctions de production désagrégées ont des formes CES :

$$g(X, \theta) = [a_1(\theta) X_1^r + a_2(\theta) X_2^r]^{1/r}, \qquad r \geqslant 0,$$

avec une élasticité de substitution égale à $\sigma = 1/(1-r)$.
On a alors :

$$\frac{\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)}{\partial X_1} = \frac{a_1(\theta) X_1^{r-1}}{a_1(\theta) X_1^r + a_2(\theta) X_2^r} = \frac{X_1^{r-1}}{X_1^r + (a_2(\theta)/a_1(\theta)) X_2^r},$$

$$\frac{\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)}{\partial X_1} = \frac{(a_2(\theta)/a_1(\theta)) X_2^{r-1}}{X_1^r + (a_2(\theta)/a_1(\theta)) X_2^r}.$$

Les quantités d'inputs X_1 et X_2 sont positives. Les deux dérivées apparaissent alors comme des fonctions respectivement décroissante et croissante de la fonction $a_2(\theta)/a_1(\theta)$ du facteur d'hétérogénéité. Il en résulte

$$\overset{\approx}{\operatorname{Cov}}\left[\frac{\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)}{\partial X_1}, \frac{\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)}{\partial X_2}\right] \leqslant 0.$$

On déduit alors de la formule donnant $\dfrac{1}{\Phi_{12}}$ que :

$$\frac{1}{\Phi_{12}} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\,\frac{\overset{\approx}{\operatorname{Cov}}[(\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)/\partial X_2), (\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)/\partial X_1)]}{\overset{\approx}{E}[\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)/\partial X_2]\,\overset{\approx}{E}[\partial \operatorname{Log} g(X, \theta)/\partial X_l]} \leqslant \frac{1}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{12} \geqslant \sigma. \quad \square$$

En général le résumé Φ_{12} dépend de la valeur de X de sorte que la fonction représentative n'est pas à élasticité de substitution constante.

4 Fonction de coût

On peut aussi étudier l'effet de l'intégration de l'hétérogénéité sur les résumés déduits du problème d'optimisation dual. Une telle étude est évidemment plus difficile, car elle implique un examen attentif de ce problème dual. Des résultats utilisables assez généraux ne peuvent en fait être obtenus qu'en supposant l'hétérogénéité assez faible.

Dans la suite, nous supposons que le facteur d'hétérogénéité θ peut s'écrire : $\theta = \theta_0 + av$, où θ_0 est constant, v est un vecteur aléatoire centré, de matrice de variance-covariance Σ donnée et où a est un réel proche de zéro. On peut alors mener une étude complète au voisinage de $a = 0$.

Notons $g(x, \theta)$ la fonction de production au niveau désagrégé. Les demandes de facteurs sont obtenues en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \operatorname*{Min}_{x} p' x, \\ \text{sous} : g(x, \theta) = y. \end{cases}$$

Nous notons : $x(p, y, \theta)$ les demandes de facteur et $c(p, y, \theta) = p' x(p, y, \theta)$ le coût correspondant.

Le calcul similaire effectué à partir de la fonction de production représentative $G(X)$, c'est-à-dire la résolution de :

$$\begin{cases} \operatorname*{Min}_{x} p' X, \\ \text{sous} : G(X) = y, \end{cases}$$

conduit à des demandes $X(p, y)$ et à un coût $C(p, y)$.

On peut alors essayer de relier la fonction de coût $C(p, y)$ aux fonctions de coût désagrégées $c(p, y, \theta)$, tout au moins au voisinage de l'hypothèse d'homogénéité $a = 0$. De façon plus précise, on établit dans l'annexe que :

$$C(p, y) = E\, c(p, y, \theta) + o(a^2),$$

où $o(a^2)$ désigne un infiniment petit par rapport à a^2.

Propriété 13 : La fonction de coût calculée à partir de la fonction de production représentative est localement représentative des fonctions de coût individuelles à l'ordre deux au voisinage de l'hypothèse d'homogénéité.

Ces résultats valables pour les développements à l'ordre deux ne se généralisent cependant pas à un ordre supérieur.

1. Développement limité de la fonction de production

On peut commencer par donner le développement limité à l'ordre deux de la fonction de production au voisinage de $a=0$.

On a :

$$
\begin{aligned}
G(X) &= E\,g(X, \theta) \\
&= E[g(X, \theta_0 + av)] \\
&= E\left[g(X, \theta_0) + a\frac{\partial g}{\partial \theta'}(X, \theta_0)\,v + \frac{a^2}{2}v'\frac{\partial^2 g(X, \theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}v\right] \\
&= g(X, \theta_0) + \frac{a^2}{2}E\left[v'\frac{\partial^2 g(X, \theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}v\right] \\
&= g(X, \theta_0) + \frac{a^2}{2}h(X, \theta_0),
\end{aligned}
$$

où $h(X, \theta) = E\,\mathrm{Tr}\left[\dfrac{\partial^2 g(X, \theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}vv'\right] = \mathrm{Tr}\left[\dfrac{\partial^2 g(X, \theta_0)}{\partial\theta\,\partial\theta'}\Sigma\right]$.

Le terme du premier ordre disparaît du développement à cause du choix de θ_0 comme hétérogénéité moyenne et localement l'hétérogénéité apparaît complètement résumée par la moyenne θ_0 et la matrice de variance-covariance Σ.

2. Développement limité des fonctions de demande de facteur

On peut de façon analogue effectuer des développements limités des fonctions de demande. On aura :

$$X(p, y) \neq \neq x(p, y, \theta_0) + a^2 z(p, y, \theta_0).$$

Il nous faut maintenant relier cette fonction $z(p, y, \theta_0)$ aux fonctions de production.

Écrivons les conditions du premier ordre associées au problème d'optimisation local :

$$\begin{cases} \min\limits_{x} p'x, \\ \text{sous : } g(X, \theta_0) + \dfrac{a^2}{2}h(X, \theta_0) = y. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} g(\mathrm{X}, \theta) + \dfrac{a^2}{2} h(\mathrm{X}, \theta_0) = y \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial \mathrm{X}}(\mathrm{X}, \theta_0) + \dfrac{a^2}{2} \dfrac{\partial h}{\partial \mathrm{X}}(\mathrm{X}, \theta_0) - \lambda p = 0, \end{cases}$$

où : $\mathrm{X} = \mathrm{X}(p, y) \# x(p, y, \theta_0) + a^2 z(p, y, \theta_0)$,
et où : $\lambda = \lambda(p, y) \# \lambda(p, y, \theta_0) + a^2 \mu(p, y, \theta_0)$, désigne l'inverse du multiplicateur de Lagrange.

Développant ces relations au voisinage de $a = 0$ et identifiant les termes en a^2, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \mathrm{X}'}(x_0, \theta_0) z(p, y, \theta_0) + \dfrac{1}{2} h(x_0, \theta_0) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 g}{\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}'}(x_0, \theta_0) z(p, y, \theta_0) + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial h}{\partial \mathrm{X}}(x_0, \theta_0) - \mu(p, y, \theta_0) p = 0, \end{cases}$$

avec : $x_0 = x(p, y, \theta_0)$.

Ce système fournit les expressions des termes correctifs affectant le multiplicateur et les demandes de facteur :

$$\mu = \frac{(1/2)(\partial g/\partial \mathrm{X}')(\partial^2 g/\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}')^{-1}(\partial h/\partial \mathrm{X}) - (1/2) h}{\partial g/\partial \mathrm{X}' (\partial^2 g/\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}')^{-1} p},$$

$$z = -\frac{1}{2}(\partial^2 g/\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}')^{-1} \frac{\partial h}{\partial \mathrm{X}} + \frac{(1/2)(\partial g/\partial \mathrm{X}')(\partial^2 g/\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}')^{-1}(\partial h/\partial \mathrm{X}) - (1/2) h}{\partial g/\partial \mathrm{X}' (\partial^2 g/\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}')^{-1} p} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \mathrm{X}\, \partial \mathrm{X}'} \right)^{-1} p,$$

où les diverses fonctions sont évaluées en y, p, θ_0, x_0.

On peut alors noter que les demandes de facteur étant supposées optimales au niveau désagrégé, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathrm{X}}(\mathrm{X}_0, \theta_0) = \lambda_0 p \qquad \text{avec} \quad \lambda_0 = \lambda(p, y, \theta_0).$$

3. Approximation du coût

On en déduit que le coût calculé à partir de la fonction représentative est :

$$\mathrm{C}(p, y) \# c(p, y, \theta_0) + a p' z(p, y, \theta_0),$$

avec :

$$p' z(p, y, \theta_0) = -\frac{1}{2} p' \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial X'} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial X}$$

$$+ \frac{(1/2) \lambda_0 p (\partial^2 g / \partial X \partial X')^{-1} \partial h / \partial X - (1/2) h}{\lambda_0 p' (\partial^2 g / \partial X \partial X')^{-1} p} p' \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial X'} \right)^{-1} p$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_0} h.$$

Le coût associé à la fonction de production représentative admet donc le développement :

$$C(p, y) \# c(p, y, \theta_0) - \frac{a^2}{2\lambda_0} E \left[v' \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (x, \theta_0) v \right].$$

Une démarche similaire peut être suivie pour trouver l'approximation de la fonction de coût associée au paramètre d'hétérogénéité :

$$\theta = \theta_0 + av.$$

On a :

$$c(p, y, \theta) = c(p, y, \theta_0 + av) \# c(p, y, \theta_0) - \frac{a^2}{2\lambda_0} v' \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial \theta'} (X, \theta_0) v.$$

On voit alors immédiatement que la fonction $C(p, y)$ est la moyenne des fonctions de coût individuelles jusqu'à l'ordre deux.

• Références bibliographiques

CHAMBERLAIN, G. (1984). – « Panel Data », dans *Handbook of Econometrics*, vol. II, Griliches-Intriligator éd., 1247/1318, Amsterdam, North Holland.

FISHER, F. (1969). – « The Existence of Aggregate Production Functions », *Econometrica*, 37, p. 553-577.

FORTIN, N. (1987). – *In Search of Aggregation Biases*, D.P., Univ. of British Columbia.

FORTIN, N. (1989). – *A Unified Theory of Aggregation: Similarity and Separability Reconsidered*, Montréal Univ. D.P.

GONCALVÈS, E. et GOURIÉROUX, C. (1988). – « Agrégation de processus autorégressifs d'ordre 1 », *Annales d'Économie et de Statistiques*, 12, p. 127-149.

GOURIÉROUX, C. et PEAUCELLE, I. (1988). – « Fonctions Représentatives de Fonctions de Production à Complémentarité Stricte », *L'Actualité économique, Revue d'Analyse Économique*, vol. 64, N2, p. 209-225.

GOURIÉROUX, C. et PEAUCELLE, I. (1990). – « The Expectations of Demand by Firms and their Effect on Disequilibrium », *Optimal Decisions in Markets and Planned Economics*, Ed. R. Quandt et D. Triska, Westview Press.

GRANGER, C. (1980). – « Long memory relationships and the aggregation of dynamic models », *Journal of Econometrics* 14, p. 227-238.

GREEN, H. (1964). – *Aggregation in Economic Analysis: An Introductory Survey*, Princeton Univ. Press.

GRILICHES, Z. et MAIRESSE, J. (1988). – « Hétérogénéité et panels : y a-t-il des fonctions de production stables? », *Mélanges en l'honneur d'E. Malinvaud*, p. 1014-1054.

GRUNFELD, Y. et GRILICHES, Z. (1960). – « Is Aggregation Necessarily Bad? », *Review of Economics and Statistics*, p. 1-13.

HAUSMAN, J. A. et TAYLOR, W. E. (1981). – « Panel Data and Unobservable Individual Effects », *Econometrica*, 49, p. 1377-1398.

HSIAO, C. (1986). – *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press.

HOUTHAKKER, H. (1955). – « The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production-Function in Activity Analysis », *Review of Economic Studies*, 23, p. 27-31.

JORGENSEN, D. (1986). – « Econometric Methods for Modeling Producer Behavior », dans *Handbook of Econometrics*, vol. III, Elsevier Sciences.

KLEIN, L. (1946). – « Remarks on the Theory of Aggregation », *Econometrica*, 14, p. 303-312.

MAIRESSE, J. (1987). – « Les Lois de la Production ne sont plus ce qu'elles étaient : une Introduction à l'Économétrie des Panels », *La Revue Économique*, 39, p. 225-272

NATAF, A. (1948). – « Sur la Possibilité de Construction de certains Macromodèles », *Econometrica*, 16, p. 232-244.

POLLAK, P. (1971). – « Additive Utility Functions and Linear Engel Curves », *The Review of Economic Studies*, 38, p. 401-414.

SATO, K. (1975). – *Production Functions and Aggregation*, North Holland.

SWAMY, P. A. (1971). – *Statistical Inference in Random Coefficient Regression Models*, Berlin, Springer-Verlag.

THEIL, H. (1954). – *Linear Aggregation of Economic Relations*, North Holland.

VAN DAAL, J. et MERKIES, A. (1984). – *Aggregation in Economic Research: from Individual to Macro Relations*, Dordrecht, Reidel.

VARIAN, M. (1984). – *Microeconomic Analysis*, Norton, 2e édition

ZELLNER, A. (1969). – « On the Aggregation problem: A New Approach to a Trouble some Problem », dans *Economic Models, Estimation and risk programming, Essays in Honor of Gerhard Tintner*, Fox *et al.* éd., Springer-Verlag.