ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 17 — 1990

Identification des modèles à fonction de transfert : la méthode Padé-transformée en *z*

Pierre CLAVERIE, Daniel SZPIRO, Richard TOPOL *

RÉSUMÉ. – La méthode Padé-transformée en z est destinée à identifier un modèle à fonction de transfert, dont un cas particulier est une structure de retards géométriques équivalente à un processus autorégressif.

La première étape consiste à calculer la transformée en z du développement de Taylor (au point z_0) de la fonction de transfert. Les méthodes de Box et Jenkins, du Coin, et de Lii reposent implicitement sur le choix $z_0 = 0$; alors qu'ici le choix de ce paramètre introduit la possibilité d'une meilleure précision des résultats.

La seconde étape consiste à analyser cette transformée en z par la technique des approximants de Padé. Si la fonction de transfert est rationnelle, il est possible de trouver un bloc d'approximants de Padé stables qui fournit alors les degrés et coefficients des polynômes, de l'opérateur retard, du numérateur et du dénominateur de la fraction. Dans le cas particulier d'une structure de retards composée de plusieurs structures géométriques élémentaires (AR), la méthode fournit le nombre d'éléments, les raisons, et les coefficients : la forme fonctionnelle de la distribution de retards est alors identifiée et estimée.

Des expériences de Monte Carlo montrent pour les cas étudiés qu'une meilleure identification résulte d'un choix du paramètre z_0 différent de zéro.

Transfer Function Identification: the Padé Z-Transform Method

ABSTRACT. – We present and discuss the Padé z-transform method for the identification of a transfer function model; an application is given with the geometric lag model, the ratios of which can be real and/or complex numbers.

The method consists first in considering the z-transform of the transfer function model, which is numerically calculated by a Taylor expansion about a point z_0, which can be equal to, or different from, zero. By contrast, the Box and Jenkins, Corner, and Lii methods rely on the implicit $z_0 = 0$ choice; their set of equations is obtained if the Taylor expansion is made about $z_0 = 0$. An advantage of the method is this new degree of freedom which may improve the accuracy of the results.

Second, to identify and estimate the model, this z-transform is analyzed by the use of the Padé approximant technique: namely the search of a bloc of stable Padé approximants. If the transfer function is rational, then the degrees and the coefficients of the polynomials are obtained. In the case of a lag distribution which is a linear combination of elementary geometric distributions, the method gives estimates of the number of elementary distributions, of the corresponding ratios and coefficients: the functional form of the lag distribution is fully identified and estimated.

Monte Carlo simulations are run to check the limits and qualities of the method: satisfactory results are obtained, with a better accuracy for the choice z_0 different from zero.

* P. CLAVERIE : Dynamique des Interactions Moléculaires, CNRS, ER n° 271, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour n° 22, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05; D. SZPIRO : Banque de France, Centrale de Bilans, BP n° 140-1, 75049 Paris cedex 01; R. TOPOL : Centre National de la Recherche Scientifique et Observatoire Français des Conjonctures Économiques, 69, quai d'Orsay, 75007 Paris. Nous remercions sincèrement C. Gouriéroux et les deux rapporteurs anonymes pour leurs critiques d'une version préalable de cet article. Les erreurs qui peuvent subsister sont de notre responsabilité.

1 Introduction

La forme fonctionnelle la plus générale d'une équation dynamique en temps discret (continu) est une relation entre une combinaison linéaire de différences (dérivées) d'ordre un, deux, . . . de la variable endogène et des variables exogènes. C'est le **modèle à fonction de transfert rationnelle**. Si le polynôme de l'opérateur retard qui s'applique à la variable endogène est inversible, alors la variable endogène est fonction des exogènes auxquelles s'appliquent des fractions rationnelles de l'opérateur retard.

Les économistes ont admis l'importance de relations entre variables économiques faisant intervenir leurs valeurs à des instants (périodes) différent(e)s. Ceci consiste à postuler que la valeur courante d'une variable endogène dépend, tout au moins après un certain délai, des valeurs passées des variables exogènes. C'est **le modèle à retards échelonnés** (GRILICHES [1967], DHRYMES [1971], MADDALA [1977]). Si la **structure de retard est géométrique**, alors le polynôme de retard s'écrit comme une fraction rationnelle; c'est un processus autorégressif. L'identification et l'estimation de ces deux types de modèles sont donc celles des modèles à fonction de transfert rationnelle.

L'objectif du travail empirique est d'identifier et d'estimer les différents paramètres (degrés et coefficients des polynômes, forme fonctionnelle de la structure de retards) intervenant dans les deux types de modèles.

BOX et JENKINS [1976] proposent une méthode d'identification qui repose sur une appréciation séparée des fonctions d'autocorrélation et de corrélation croisée du processus considéré. La méthode du Coin (BEGUIN, GOURIÉROUX et MONFORT [1980]) fournit une procédure d'identification plus cohérente à partir des estimateurs de la fonction d'autocorrélation. LII [1985], [1980] identifie les modèles à fonction de transfert en utilisant la méthode du Coin, à partir des estimateurs de la fonction de transfert, obtenus par analyse spectrale; les coefficients des polynômes de celle-ci sont estimés par la technique des approximants de Padé.

La **caractéristique essentielle de ces méthodes** est qu'elles consistent toutes en la résolution d'un système d'équations dont le **déterminant**, dit de **Hankel**, est **construit avec les estimateurs** de la fonction de transfert. Dans le cas de l'identification et de l'estimation d'une structure de retards combinaison linéaire de retards géométriques (fonction de transfert rationnelle), elles identifient mais n'estiment pas directement les raisons et les coefficients des retards élémentaires.

La **méthode Padé-transformée en** z est analogue aux précédentes méthodes au sens où elle repose sur un système d'équations linéaires, mais elle s'en différencie par le fait que le **déterminant de Hankel** est **construit** avec des éléments qui sont **une moyenne des estimateurs** et non directement ceux-ci. L'identification repose sur la recherche de la stabilité des approximants de

Padé. Le choix de la valeur d'un paramètre qui modifie la pondération intervenant dans le calcul de la moyenne facilite nettement la recherche de la stabilité numérique des résultats. Cette possibilité de **balayage empirique des valeurs du paramètre** est un élément caractéristique de la méthode Padé-transformée en z; pour certains cas tout au moins, elle permet d'accéder à une identification et une estimation de meilleure qualité qu'il n'est possible avec les méthodes précédentes qui correspondent au choix d'une valeur particulière – en l'occurence égale à zéro – du paramètre. En ce qui concerne une structure de retards, si celle-ci est une combinaison linéaire de retards géométriques, alors la méthode détermine, en même temps, le nombre de retards géométriques élémentaires, les raisons, et leur coefficient. Si la structure n'est pas géométrique, alors aucune stabilité des approximants de Padé ne peut être obtenue; ceci constitue un diagnostic de mauvaise spécification de la nature géométrique de la structure de retards. On conclut alors à l'absence de processus autorégressif.

L'article pose le problème dans la section 2. La présentation théorique et la mise en œuvre de la méthode Padé-transformée en z sont données dans la section 3. Les qualités et limites de la méthode sont présentées et discutées à l'aide de résultats d'expériences de Monte-Carlo dans la section 4.

2 Position du problème

Le **modèle à fonction de transfert rationnelle** entre deux variables économiques x et y s'écrit :

(1) $$\delta_s(\mathrm{B})\, y_t = \omega_r(\mathrm{B})\, x_t + \eta_t$$

où η est un bruit blanc et r et s sont respectivement les degrés des polynômes $\omega_r(\mathrm{B})$ et $\delta_s(\mathrm{B})$, de l'opérateur de retard B, qui s'écrivent :

(2) $$\omega_r(\mathrm{B}) = \sum_{j=0}^{r} \omega_j\, \mathrm{B}^j$$

(3) $$\delta_s(\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{s} \delta_k\, \mathrm{B}^k$$

avec $\delta_0 = 1$ (condition de normalisation de Baker [1973]); on suppose que ces polynômes n'ont pas de facteur commun, et que leurs racines sont situées à l'extérieur du cercle unitaire. Si $\delta_s(\mathrm{B})$ est inversible alors le modèle (1) devient :

(4) $$y_t = [\omega_r(\mathrm{B})/\delta_s(\mathrm{B})]\, x_t + \varepsilon_t \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_t = \eta_t/\delta_s(\mathrm{B})$$

soit

(5) $$y_t = \mathrm{V}(\mathrm{B})\, x_t + u_t$$

avec

$$V(B) = \omega_r(B)/\delta_s(B) \tag{6}$$

les degrés r et s des polynômes de la fraction rationnelle étant reliés par la relation suivante :

$$r = s + a. \tag{7}$$

Le **modèle à structure de retards** est spécifié par la convolution suivante :

$$y_t = \sum_{l=0}^{K} v_l x_{t-b-l} + u_t \tag{8}$$

où u_t est le résidu, K peut prendre une valeur infinie, et $b(\geqslant 0)$ représente l'intervalle de temps à partir duquel la structure de retards opère. L'équation (8) se réécrit comme l'équation (5) où V(B) est un polynôme de retards :

$$V(B) = \sum_{l=0}^{K} v_l B^{l+b} \tag{9}$$

Une forme fonctionnelle qui sera particulièrement étudiée consiste en une combinaison linéaire de N retards géométriques élémentaires, ce qui correspond à un AR(N) :

$$v_l = \sum_{n=l}^{N} c_n \lambda_n^l, \qquad l = 1 \text{ à } K \tag{10}$$

où $\{\lambda_n\}$ est l'ensemble des raisons constituant la structure de retards; ces raisons sont soit réelles soit complexes (le cas complexe correspond à une structure oscillante).

3 Identification et estimation par la méthode « Padé-transformée en z »

Les modèles à fonction de transfert rationnelle et de retards échelonnés s'expriment par la même forme fonctionnelle, *i.e.* l'équation (5); cette équation est donc le point de départ de la méthode. En ce qui concerne le modèle à retards échelonnés, rappelons qu'avec les méthodes conventionnelles, il est directement difficile d'identifier le nombre de retards élémentaires N, d'estimer les raisons $\{\lambda_n\}$ et les coefficients $\{c_n\}$ à cause du caractère hautement non linéaire du problème. La méthode Padé-transformée en z consiste à changer la nature du problème.

La **procédure complète** consiste en deux étapes.

La **première étape** est une estimation préalable de la séquence des coefficients $\{v_l\}$ du polynôme V (B); elle est analogue aux méthodes de Box et Jenkins, et de Lii.

La **seconde étape** est la méthode Padé-transformée en z elle-même; [1] elle consiste en l'utilisation conjointe d'une transformation intégrale et de la technique des approximants de Padé. La première utilisation de l'esprit de la méthode a été faite dans une description en temps continu pour laquelle la transformation intégrale adéquate est la transformée de Laplace (AUBARD *et al.* [1987], CLAVERIE et DENIS [1984], YERAMIAN [1981], et, YERAMIAN et CLAVERIE [1987]). Le présent article concerne la description en temps discret de séries temporelles. C'est donc la transformée en z qui est pertinente (pour des remarques préliminaires consulter CLAVERIE et DENIS [1984] section 5, et JOUVENT [1984]), puisque la transformée en z de la forme géométrique (10) est une fraction rationnelle en z qui s'écrit :

$$v(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n/(1 - z\lambda_n) \tag{11}$$

et qui sera identifiée et estimée par l'utilisation de la technique des approximants de Padé.

Une troisième étape, qui ne sera pas traitée dans le cadre de cet article, pourrait être l'utilisation de techniques d'estimation plus efficaces, une fois l'identification faite par la méthode Padé-transformée en z, en utilisant ses résultats comme conditions initiales.

3.1. Présentation théorique

Cette sous-section concerne principalement la seconde étape de la procédure complète (dans la première, des techniques conventionnelles sont utilisées).

Soit le modèle général (5) dont les coefficients $\{v_l\}$ du polynôme V(B) ont été estimés lors de la première étape par $\{\hat{v}_l\}$. Sa transformée en z, $\hat{v}(z)$, est numériquement calculée à l'aide d'un développement de Taylor au voisinage d'un point z_0, choisi dans le domaine de convergence de la série. Ce développement de Taylor de $\hat{v}(z)$ s'écrit :

$$\hat{v}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z'^l \tag{12}$$

où $z' = z - z_0$ et où le coefficient c_l du développement est défini par :

$$c_l = \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l \hat{v}(z)}{dz^l} \right|_{z=z_0} \tag{13}$$

1. Les deux étapes peuvent être considérées soit dans le domaine du temps soit dans celui des fréquences. Dans ce dernier cas, la transformation intégrale pertinente est l'intégrale de Cauchy; la théorie est présentée dans CLAVERIE, SZPIRO et TOPOL [1985].

et où la dérivée d'ordre l est numériquement calculé à l'aide des estimateurs $\{\hat{v}_i\}$:

$$(14) \qquad \left.\frac{d^l \hat{v}(z)}{dz^l}\right|_{z=z_0} = \sum_{i=l}^{\infty} i(i-1)\ldots(i-l+1) z_0^{i-l} \hat{v}_i$$

Par cette procédure, les coefficients du développement $\{c_l\}$ sont donc des moyennes des estimateurs $\{\hat{v}_i\}$. Excepté pour une structure de retards non géométrique, la fonction de transfert attendue est une fonction rationnelle en z. Donc, la technique des approximants de Padé, particulièrement adaptée à l'étude de ce type de fonction, va permettre l'identification et l'estimation des polynômes de la fraction rationnelle.

Les approximants de Padé permettent de déterminer des résultats quantitatifs pour des fonctions dont les propriétés analytiques sont qualitativement connues par un développement de Taylor (Chisholm [1973], Baker [1973], Gilewicz [1978], et, Baker et Graves-Morris [1981]). Un approximant de Padé est une fraction rationnelle, notée [P/Q], de deux polynômes $\omega_P(z)$ et $\delta_Q(z)$ dont les degrés sont respectivement P et Q; il s'écrit :

$$(15) \qquad [P/Q] = \omega'_P(z')/\delta'_Q(z') = \sum_{j=0}^{P} \omega'_j z'^j / \sum_{k=0}^{Q} \delta'_k z'^k.$$

Pour simplifier la lecture, le symbole «′» sera supprimé des expressions ultérieures. Cette fraction reproduit, jusqu'à l'ordre (P+Q), le développement de Taylor de la fonction analysée [Chisholm [1973] et Baker [1973]). Alors, l'approximant de Padé [P/Q] satisfait l'identité formelle des deux équations (12) et (15) :

$$(16) \qquad \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l = \frac{\sum_{j=0}^{P} \omega_j z^j}{\sum_{k=0}^{Q} \delta_k z^k} + O(z^{P+Q+1})$$

La variation des degrés P et Q permet de construire l'ensemble des approximants de Padé qui forme le **Tableau de Padé,** représenté par le tableau 1.

L'**équation (16) fait apparaître deux caractéristiques principales de la méthode Padé-transformée en** z :

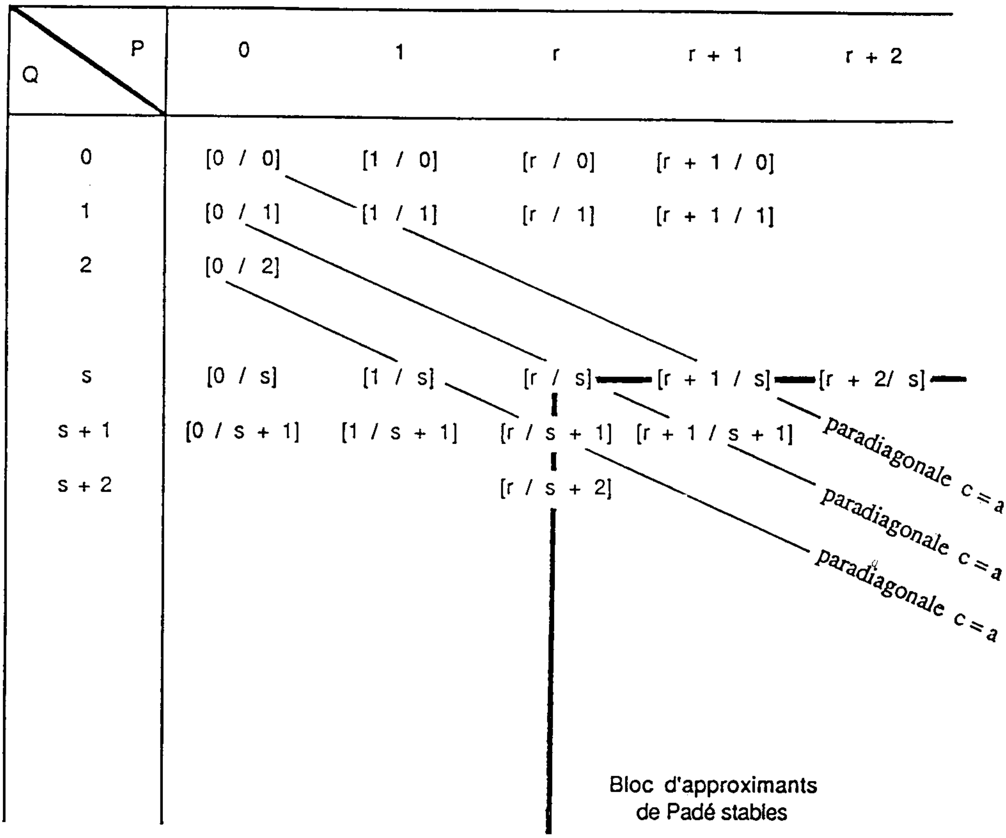
Premièrement, quand la condition de Baker $\delta_0 = 1$ est retenue, pour chaque couple (P, Q), les coefficients $\{\omega_j\}$ et $\{\delta_k\}$ des polynômes correspondants sont déterminés par un système d'équations linéaires, déduit de l'équation (16), qui s'écrit :

$$(17a) \qquad \hat{\omega}_j = \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}\{j,Q\}} \hat{\delta}_k \hat{v}_{j-k} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant P$$

$$(17b) \qquad 0 = \sum_{k=0}^{\mathrm{Min}\{j,Q\}} \hat{\delta}_k \hat{v}_{j-k} \qquad \text{si} \quad j \geqslant P+1.$$

TABLEAU 1

Tableau de Padé



Ce système a la même structure que celui impliqué dans les méthodes de BOX et JENKINS [1976], du Coin (BEGUIN, GOURIÉROUX et MONFORT [1980]), . . . ; la différence essentielle est que dans notre méthode les coefficients $\{\omega'_j\}$ et $\{\delta'_k\}$ des polynômes sont déterminés à partir des **coefficients** $\{c_l\}$, déterminés par les équations (13) et (14), et qui **sont des moyennes pondérées des estimateurs** $\{\hat{v}_l\}$. C'est le choix de la valeur de z_0 qui rend variables les poids de ces moyennes; en conséquence, le **déterminant de Hankel du système (17) est construit avec ces moyennes.** Si le développement de Taylor est effectué au voisinage du point $z_0 = 0$, appelé choix de PRONY [1795] discuté par WEISS et MCDONOUGH [1963]), les dérivées (14) sont égales aux estimateurs $\{\hat{v}_l\}$:

$$\frac{d^l\,\hat{v}(z)}{dz^l} = \hat{v}_l$$

et les déterminants de Hankel sont directement calculés à l'aide des estimateurs $\{\hat{v}_l\}$ (et non des moyennes). C'est le choix implicite des méthodes de Box et Jenkins, du Coin, et, de Lii. Il n'y a aucune raison particulière pour que le point $z_0=0$ conduise à une meilleure identification et estimation que n'importe quelle autre valeur de z_0 (des expériences de Monte-Carlo montrent que tel n'est pas n'cessairement le cas). Au stade actuel de la méthode, il n'est pas possible de proposer une détermination théorique de la valeur optimale de z_0. C'est la recherche de la meilleure stabilité des approximants de Padé, pour les ordres les plus faibles possibles dans le Tableau de Padé, qui fournit un guide pour définir un intervalle de valeurs optimales.

Deuxièmement, le caractère variable des degrés P et Q des polynômes permet un balayage du Tableau de Padé (tableau 1).

Un théorème (Baker [1973] et Gilewicz [1978]) stipule qu'**une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction** $\hat{v}(z)$, équation (12), **soit le développement de Taylor d'une fraction rationnelle** est que **tous les approximants** [P/Q] **avec** $P>r$ **et** $Q>s$ **doivent être égaux à l'approximant** $[r/s]$ (où r et s représentent soit les degrés des polynômes de la fonction rationnelle du modèle à fonction de transfert (1), soit les degrés des polynômes de la fonction rationnelle correspondant à la structure de retards géométriques (10)). Il existe donc, dans le Tableau de Padé, un bloc de taille infinie d'approximants stables (bloc dont l'entrée – supérieure gauche – est l'approximant $[r/s]$). En d'autres termes, les approximants de ce bloc ont des pôles et des racines stables. Inversement, si ce bloc d'approximants stables n'est pas trouvé, c'est que la fonction $\hat{v}(z)$, équation (12), ainsi que le polynôme V(B), ne sont pas des fractions rationnelles; ceci signifie que la méthode Padé-transformée en z n'identifiera pas (et n'estimera pas) une structure de retards non géométriques.

En résumé, l'identification et l'estimation par la méthode Padé-transformée en z **repose sur la recherche d'un bloc infini d'approximants stables** dans le Tableau de Padé. Dans les méthodes du Coin (Béguin, Gouriéroux et Monfort [1980]) et de Lii [1985], [1980] il s'agit d'un coin infini de zéros (déterminants nuls) dans le tableau C de déterminants de Hankel. Les deux critères, stabilité dans le Tableau de Padé et zéros dans le Tableau C ont des structures analogues (Claverie et Denis [1984]). La méthode Padé-transformée en z **fournit,** en **une même étape, l'identification et l'estimation des modèles à fonction de transfert rationnelle et des structures de retards composées de retards élémentaires géométriques.**

3.2. Mise en œuvre

La mise en évidence, dans le Tableau de Padé, d'un bloc infini d'approximants stables se fait par la recherche de pôles et de racines stables. Examinons le principe du balayage du Tableau de Padé puis la recherche du bloc infini d'approximants stables ainsi que la discussion relative aux pôles et racines instables, appelés doublets de Froissard.

(a) Principe du balayage du Tableau de Padé

Comme les degrés r et s des polynômes ω_r et δ_s du modèle (5, 6) ne sont pas connus et qu'ils vérifient l'équation (7), une méthode de balayage du Tableau de Padé est d'examiner successivement toutes les paradiagonales; une paradiagonale est constituée par les approximants de Padé qui ont une différence constante c entre les degrés du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire que $P=Q+c$, et c est relié à a par:

$$(18) \qquad c=a+c'$$

c est l'indice (variable, $c=1,2,\ldots$) des paradiagonales, comme indiqué sur le tableau 1; en pratique, seulement quelques-unes d'entre elles sont explorées.

Dans le cas d'une structure de retards (10), qui est une combinaison linéaire de retards géométriques, la méthode précédente est appliquée avec $a=b-1$, soit:

$$(19) \qquad b=c-c'+1$$

(b) Recherche de la stabilité

Si le modèle à fonction de transfert était connu, r et s le seraient; le bloc infini aurait comme entrée supérieure gauche l'approximant $[r/s]$, c'est-à-dire avec l'équation (7) l'approximant suivant:

$$(20) \qquad [(s+a)/s]=\frac{\omega_{s+a}\prod_{j=1}^{s+a}(z-\gamma_j)}{\delta_s\prod_{k=1}^{s}(z-\beta_k)}$$

où $\{\beta_k\}$ sont les pôles et $\{\gamma_j\}$ sont les racines.

Les pôles stables $\{\beta_k\}$ doivent donc être recherchés. On procède de la façon suivante :

(i) Si on suppose a connu dans un premier temps, seule la paradiagonale $c=a$ est à examiner, et les approximants $[(Q+a)/Q]$ successifs sont considérés. Pour $Q \leqslant s$ il y a un nombre croissant de pôles et de racines stables qui apparaissent au fur et à mesure que Q croît. Dès que $Q>s$, les approximants de Padé $[(Q+a)/Q]$ diffèrent de $[(s+a)/s]$, et deux ensembles comportant respectivement $(Q-s)$ pôles $\{\beta_{k'}\}$ et racines $\{\gamma_{j'}\}$ apparaissent. L'approximant $[(Q+a)/Q]$ s'écrit:

$$(21) \qquad [(Q+a)/Q]=\frac{\omega_{Q+a}\prod_{j=1}^{s+a}(z-\gamma_j)}{\delta_Q\prod_{k=1}^{s}(z-\beta_k)}\ \boxed{\frac{\prod_{j'=s+a+1}(z-\gamma_{j'})}{\prod_{k'=s+1}^{Q}(z-\beta_{k'})}}$$

où les pôles et racines supplémentaires, regroupés dans le cadre de l'équation (21), sont artificiels et devraient théoriquement disparaître (BAKER [1973]).

Néanmoins dans la mise en œuvre (et ceci est un point essentiel) des erreurs numériques inévitables apparaissent de trois sources principales :

1. erreurs dans les valeurs de la fonction $\hat{v}(z)$ à analyser;

2. erreurs dues aux procédures numériques, par exemple dans le calcul des dérivées;

3. erreurs dues à la précision limitée des ordinateurs.

En conséquence, les racines excédentaires des polynômes du numérateur et du dénominateur cessent d'être exactement égales et on obtient des termes qui sont des fractions rationnelles de monômes ayant la forme suivante :

$$\frac{z-(\alpha+\varepsilon_1)}{z-(\alpha+\varepsilon_2)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

De telles paires de racines ($\alpha_1=\alpha+\varepsilon_1$; $\alpha_2=\alpha+\varepsilon_2$), sont appelés **doublets de Froissard,** par reconnaissance du travail fondateur de Froissard ainsi qu'il est rapporté par Basdevant [1972] et Gilewicz [1978], section 6.4.

Malgré l'existence des doublets de Froissard dans toute mise en œuvre de la méthode, les déterminants de Hankel (du système (17)) prendront très probablement la valeur zéro dans le bloc infini de zéros du Tableau C. Ainsi, pour déterminer un tel bloc de zéros, les pôles et racines de l'approximant [P/Q] dans le Tableau de Padé doivent être recherchés de manière à différencier les « véritables » pôles et racines des doublets de Froissard.

(ii) En fait, a est inconnu, et la paradiagonale caractérisée par c (c donné) est examinée. Soit $c=a+c'$, les approximants de Padé de la paradiagonale sont $[(Q+a+c')/Q]$. Si $Q>s$ alors, les approximants s'écrivent pour $c'>0$:

$$(22) \quad [(Q+a+c')/Q] = \underbrace{\frac{\omega_{Q+a+c'} \prod_{j=1}^{s+a}(z-\gamma_j)}{\delta_Q \prod_{k=1}^{s}(z-\beta_k)}}_{[(s+a)/s]} \; \underbrace{\frac{\prod_{j'=s+a+1}^{Q+a}(z-\gamma_{j'})}{\prod_{k'=s+1}^{Q}(z-\beta_{k'})}}_{\text{Doublets de Froissard}} \; \underbrace{\prod_{j''=Q+a+1}^{Q+a+c'}(z-\gamma_{j''})}_{\text{Termes supplémentaires}}$$

Si $c'<0$, des termes supplémentaires existent au dénominateur. Néanmoins, comme ces termes ne correspondent pas à des pôles et racines du modèle, c'est-à-dire à des pôles et racines de l'approximant $[(s+a)/s]$, ils doivent s'annuler et leurs coefficients doivent être très faibles.

Ainsi, le nombre de coefficients très faibles fournit le nombre de termes supplémentaires et donc la valeur du paramètre c'; ils indiquent aussi dans lequel des polynômes (numérateur ou dénominateur) ils apparaissent.

La détermination directe de c', et donc de b, peut être en pratique difficile. Une confirmation de cette détermination réside dans la stabilité des pôles et les racines de l'approximant de Padé. En effet, le tableau 1 indique que pour une paradiagonale qui n'est pas la « bonne », la stabilité apparaît pour un approximant d'ordre supérieur soit pour le numérateur soit pour le dénominateur.

Pour résumer, **la mise en œuvre complète de la méthode comprend quatre étapes**:

(i) Choisir une valeur pour z_0, $0 \leqslant z_0 < 1$, pour être sûr de la convergence des sommes dans le calcul des dérivées [14].

(ii) Choisir une valeur pour c afin d'examiner la paradiagonale correspondante; les approximants de Padé $[(Q+c)/Q]$ sont construits par l'algorithme récursif de LONGMAN [1971], qui fournit une estimation directe des coefficients $\{\omega_j\}$ et $\{\delta_k\}$, séparément pour chaque approximant (cette procédure récursive ne nécessite pas le calcul de tous les approximants). Rappelons que les estimateurs $\{\hat{\omega}_j\}$ et $\{\hat{\delta}_j\}$ font référence à la variable $z'=z-z_0$. Les estimateurs $\{\hat{\omega}_j\}$ et $\{\hat{\delta}_k\}$ relatifs à la variable originelle z sont aisément déduits.

(iii) Soit, compter les coefficients très faibles pour déterminer c', alors, la valeur de a est déduite par l'équation (18); soit repérer l'ordre minimum pour lequel les approximants de Padé deviennent stables.

(iv) Des estimateurs $\{\hat{\omega}_{j'}\}$ et $\{\hat{\delta}_{k'}\}$ des coefficients, les racines $(\gamma_j, j=1,2,\ldots Q+c)$ et les pôles $(\hat{\beta}_k, k=1,2,\ldots Q)$ sont calculés. **Le nombre de pôles stables détermine le degré s du dénominateur de la fonction de transfert rationnelle. Le degré r du numérateur est alors déduit de r et de a** à l'aide de l'équation (7) et **le modèle à fonction de transfert rationnel est ainsi identifié et estimé.**

La méthode Padé-transformée en z est un développement de la méthode de LII [1985], [1980] puisqu'elle fournit en même temps l'identification et l'estimation; cependant, dans son développement actuel, la méthode ne fournit pas les écarts types des paramètres estimés. La recherche de telles statistiques associées pourrait être faite dans l'esprit du travail de LII [1985], mais cette voie n'a pas été explorée pour l'instant.

3.3. Le cas particulier des processus autorégressifs

La procédure précédente peut identifier et estimer une structure de retards géométriques qui correspond au cas particulier de processus autorégressif. Une fois connue la « bonne » paradiagonale, c'est-à-dire que la valeur du paramètre b est déterminée, les approximants de Padé $[(Q+b-1)/Q]$ sont construits à partir des pôles $\{\hat{\beta}_k\}$ et des racines $\{\hat{\gamma}_j\}$; ils s'écrivent:

$$(23) \qquad [(Q+b-1)/Q] = \frac{\hat{\omega}_{Q+b-1}(z)}{\hat{\delta}_Q(z)} = \frac{\hat{\omega}_{Q+b-1} \prod_{j=1}^{Q+b-1} (z-\hat{\gamma}_j)}{\hat{\delta}_Q \prod_{k=1}^{Q} (z-\hat{\beta}_k)}$$

où certains monômes peuvent correspondre à des doublets de Froissard.

La fraction rationnelle s'écrit par division polynomiale, si $(Q+b-1)>Q$,

$$\frac{\hat{\omega}_{Q+b-1}(z)}{\hat{\delta}_Q(z)}=\hat{\varphi}_{b-1}(z)+\frac{\hat{\Psi}_{Q-1}(z)}{\hat{\delta}_Q(z)}$$

avec degré de $\Psi_{Q-1}(z)<$degré de $\delta_Q(z)$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle du membre de droite de l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{\hat{\Psi}_{Q-1}(z)}{\hat{\delta}_Q(z)}=\sum_{k=1}^{Q}\hat{A}_k/(z-\hat{\beta}_k) \tag{24}$$

avec

$$\hat{A}_k=\frac{\hat{\omega}_{Q-1}\prod_{j=1}^{Q-1}(\hat{\beta}_k-\hat{\gamma}_j)}{\hat{\delta}_Q\prod_{k\neq j=1}^{Q}(\hat{\beta}_k-\hat{\beta}_j)} \tag{25}$$

Comme cela a été précédemment indiqué, la structure de retard est identifiée et estimée par la recherche de la stabilité des pôles. Celle-ci est plus complètement présentée dans le cas particulier $b=0$, qui est le plus courant en économétrie. Seule la paradiagonale correspondant aux approximants $[(Q-1)/Q]$ est examinée. Leur forme est fournie par l'équation (23) et leur décomposition en éléments simples, dans le cas de pôles simples (pour les pôles multiples voir Badoual et Challut [1985]), s'écrit:

$$[(Q-1)/Q]=\sum_{k=1}^{Q}\hat{A}_k/(z-\hat{\beta}_k) \tag{26}$$

avec

$$\hat{A}_k=\frac{\hat{\omega}_{Q-1}\prod_{j=1}^{Q-1}(\hat{\beta}_k-\hat{\gamma}_j)}{\hat{\delta}_Q\prod_{k\neq j=1}^{Q}(\hat{\beta}_k-\hat{\beta}_j)}. \tag{27}$$

Pour $Q>N$ l'approximant $[(Q-1)/Q]$ se réduit donc à l'approximant $[(N-1)/N]$, puisque les doublets de Froissard s'annulent. Ainsi, l'approximant $[(Q-1)/Q]$ s'écrit:

$$[(Q-1)/Q]=\sum_{k=1}^{N}\frac{\hat{A}_k}{z-\hat{\beta}_k}+\boxed{\sum_{k'N+1}^{Q}\frac{\hat{A}_{k'}}{z-\hat{\beta}_{k'}}} \tag{28}$$

où le terme encadré, dans l'équation (28), doit être nul puisque les coefficients $\{\hat{A}_{k'}\}$ le sont en théorie. En pratique, le calcul fournit des coefficients $\{\hat{A}_{k'}\}$ non nuls; ce sont des doublets de Froissard qui apparaissent. Toutefois, ces termes artificiels se caractérisent par des coefficients $\{\hat{A}_{k'}\}$ très faibles et très instables quand on passe d'un approximant au suivant; leur repérage est facile.

Les raisons $\{\hat{\lambda}_k\}$ des retards géométriques sont déduits des pôles $\{\hat{\beta}_k\}$, relatifs au premier terme du membre de droite de l'équation (28):

$$\hat{\lambda}_k = 1/\hat{\beta}_k, \qquad k = 1 \text{ à N}.$$

La méthode permet l'identification et l'estimation de rapports complexes conjugués $\{\hat{\lambda}_k\}$ caractéristiques de l'existence de cycles dans la structure de retards. Les coefficients associés aux raisons sont déduits:

$$\hat{c}_k = -\hat{A}_k/\hat{\beta}_k, \qquad k = 1 \text{ à N}.$$

Si la structure de retards soumise à l'identification et estimation est bien une combinaison linéaire de **retards géométriques**, la fonction de transfert est rationnelle, et alors, des approximants de Padé successifs stables sont obtenus: **la méthode Padé-transformée en z fournit alors, en même temps, les estimateurs du nombre N de composantes** (déterminé par le nombre de pôles stables), **du paramètre b, des raisons $\{\lambda_n\}$ et des coefficients $\{c_n\}$ de la structure de retards.**

Si la structure de retards n'est pas constituée de retards géométriques, les approximants de Padé sont instables, et donc la forme fonctionnelle originelle de la structure ne peut pas être identifiée. Toutefois, une approximation peut être fournie si l'on choisit un critère d'arrêt à la recherche de la stabilité.

Les qualités et limites de la méthode Padé-transformée en z ont été empiriquement testées par des expériences de Monte-Carlo dont les plus significatives sont présentées dans la prochaine section (voir CLAVERIE, SZPIRO et TOPOL [1985], [1987] pour une discussion plus extensive des simulations effectuées et la présentation d'un cas empirique).

4 Expériences de Monte-Carlo

Des expériences de Monte-Carlo ont été effectuées pour le cas d'une structure de retards géométriques. L'objectif est d'évaluer les qualités et limites de la méthode, de manière empirique puisque des statistiques associées aux estimateurs n'ont pas été proposées.

Un modèle théorique a été construit. Afin de disposer d'un modèle qui soit suffisamment représentatif de ceux que l'économètre rencontre, nous avons choisi comme variable exogène le logarithme des coûts salariaux mensuels dans l'industrie française du textile de 1960 à 1984 (source OCDE). La variable endogène a été construite à partir d'une structure de retards qui est une combinaison linéaire de deux retards géométriques décroissants, respectivement de raisons $\lambda_1 = 0{,}904\,837$ et $\lambda_2 = 0{,}606\,531$ et de coefficients

$c_1=1{,}0$ et $c_2=-2{,}5$, dans l'équation (29). Ces chiffres ont été choisis car ils correspondent à une forme particulièrement difficile à identifier par des méthodes d'ajustement de type moindres carrés non linéaires (DIAZ [1979])

$$(29) \qquad y_t=\sum_{k=0}^{\infty}(c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k)x_{t-k}+\varepsilon_t=\sum_{k=0}^{\infty}v_k x_{t-k}+\varepsilon_t$$

ε_t est un bruit normal qui est simulé de façon à construire 200 séries y_t. Dans une première étape, les poids v_k sont estimés par l'économétrie.

Le bruit a été caractérisé par le rapport « bruit sur signal » défini comme le rapport de la variance du bruit sur celle du signal (c'est la propriété d'additivité des variances qui a justifié ce choix). Trois niveaux de bruit ont été retenus: 5, 10, et 20 % (seuls les résultats correspondants au bruit le plus importants sont reproduits dans le tableau 2).

TABLEAU 2

Expériences de Monte-Carlo, identification et estimation d'une structure de retards théorique d'ordre deux $v_k=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$; bruit de 20 %

	Q	λ_1		c_1		λ_2		c_2	
Valeurs exactes......		0,904 837		1,0		0,606 531		−2,5	
$z_0=0{,}35$..........	2	0,9	(0,05)	1,1	(1)	0,55	(0,17)	−2,4	(0,9)
	3	0,89	(0,14)	0,98	(0,3)	0,59	(0.1)	−2,4	(0,6)
$z_0=0{,}0$...........	2	0,88	(6)	0,26	(1)	0,5	(0,2)	−1,5	(1,2)
	3	0,9	(0,6)	0,65	(1)	0,43	(0,25)	−1,9	(1,4)
	4	0,86	(0,3)	0,81	(1,7)	0,46	(0,24)	−1,9	(1,5)
	5	0,86	(0,3)	0,98	(1)	0,54	(0,17)	−2,2	(1)
	6	0,85	(0,3)	0,9	(1)	0,55	(0,15)	−2,1	(1)
	7	0,86	(0,3)	0,84	(0,9)	0,54	(0,14)	−1,9	(1)
	8	0,8	(0,4)	0,85	(0,7)	0,52	(0,2)	−1,7	(1)
	9	0,8	(0,4)	0,8	(0,5)	0,5	(0,2)	−1,4	(1)
	10	0,78	(0,5)	0,68	(0,5)	0,49	(0,2)	−1,4	(1)
	11	0,79	(0,4)	0,7	(0,5)	0,52	(0,14)	−1,4	(1)
	12	0,75	(0,5)	0,7	(0,5)	0,52	(0,15)	−1,3	(1)
	13	0,68	(0,5)	0,59	(0,5)	0,53	(0,16)	−1,4	(1)
	14	0,75	(0,4)	0,6	(0,5)	0,5	(0,18)	−1,4	(1)

Les chiffres entre parenthèses sont les écarts types empiriques. Les raisons $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ ont une distribution empirique à peu près gaussienne, ce qui n'est pas le cas des coefficients $\hat{c}_1$ et $\hat{c}_2$. Nombre de points: 272. Nombre de tirages: 200.

– Dans le cas d'un bruit de 5 %, pour une valeur de $z_0=0.35$ qui n'est pas le choix de Prony ($z_0=0$), une estimation précise des raisons et des coefficients de la structure de retards apparaît, comme théoriquement attendu, dès l'approximant de Padé d'ordre deux (Q = 2) et sont stables pour les approximants d'ordre supérieurs, pour lesquels la précision n'est pas meilleure: la valeur moyenne n'est pas détériorée mais l'écart-type des rapports est multiplié par dix.

Pour le choix de Prony ($z_0=0$), l'ordre deux n'est pas nécessairement le plus précis. Pour les approximants d'ordres supérieurs les résultats sont toujours imprécis et ils sous-estiment les valeurs des raisons et des coefficients; pour aucun ordre, jusqu'à l'ordre quatorze, des estimateurs satisfaisants des deux raisons n'ont pu être obtenus.

– Pour des niveaux de bruit plus importants, **10 et 20 %**, la supériorité d'un choix non-Prony ($z_0 = 0.35$) se manifeste par une estimation satisfaisante des raisons et des coefficients dès l'ordre deux. Dans le cas du choix de Prony, les mêmes inconvénients qu'avec un bruit de 5 %, apparaissent : résultats instables et biaisés pour tous les ordres.

Ces résultats montrent empiriquement qu'il existe un domaine de valeurs de z_0 pour laquelle la sensibilité des résultats aux perturbations introduite par le bruit n'est pas excessive (mathématiquement cela se traduirait par une matrice des dérivées partielles des résultats aux données – Jacobien – dont la norme serait voisine de un). De telles valeurs de z_0 seraient alors optimales. Bien qu'une définition analytique du domaine optimal ne soit pas donnée, les résultats précédents indiquent qu'il n'y a aucune raison pour que la zone optimale contienne nécessairement le cas de Prony ($z_0 = 0$).

On peut donc penser, à la vue des résultats des expériences de Monte-Carlo, que l'introduction d'un paramètre z_0 ajustable permette, tout au moins dans certains cas, une amélioration de la précision des estimations et de l'identification.

5 Conclusion

L'objet de cet article est de présenter et de discuter la méthode « Padé-transformée en z », qui a été conçue pour l'identification et l'estimation des modèles à fonction de transfert rationnelle ainsi que des modèles à retards échelonnés combinaison linéaire de retards géométriques. Cette méthode se situe dans le prolongement des méthodes de Box et Jenkins, du Coin, et Lii.

La méthode consiste en l'association de la transformation en z, numériquement calculée par un développement de Taylor autour d'un point z_0, et en l'utilisation de la technique des approximants de Padé. L'identification et l'estimation se fait par la recherche d'un bloc d'approximants de Padé stables, qui est équivalent à la recherche d'un coin de zéros dans la méthode du Coin.

Pour un modèle à fonction de transfert, la méthode fournit les degrés et les coefficients des polynômes de la fonction de transfert. Dans le cas d'un processus autorégressif où la structure de retards est une combinaison linéaire de retards géométriques, la méthode fournit le nombre de retards élémentaires, leur raison et leur coefficient : la forme fonctionnelle de la distribution de retards est identifiée et estimée. Si les retards ne sont pas géométriques l'identification n'est pas possible.

Actuellement la méthode ne propose pas de statistique associée aux paramètres estimés. Les qualités et limites de la méthode ont été testées par des expériences de Monte-Carlo. Celles-ci montrent surtout que le degré de liberté donné par le choix de la valeur de z_0 permet dans certains cas une nette amélioration des résultats.

Nous souhaitons rendre hommage à Pierre CLAVERIE, décédé récemment, qui ne s'est jamais départi de son enthousiasme et de sa curiosité d'esprit. Ses qualités humaines restent présentes à la mémoire de ses collègues.

• Références bibliographiques

AUBARD, J., LEVOIR, P., DENIS, A. et CLAVERIE, P. (1987). – « Analysis of Multiexponential Signals by a Method Based on the Combination of Laplace Transform and Padé Approximants », *Computer in Chemistry*, 11, p. 163-175.

BADOUAL, P. et CHALLUT, J. P. (1985). – « Sommes d'exponentielles », *Rapport de séminaire de Mathématiques Appliquées aux Systèmes*. École Centrale des Arts et Manufactures, Chatenay-Malabry.

BAKER, G. Jr. (1973). – « The Existence and Convergence of Subsequence of Padé Approximants », *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 43, p. 498-528.

BAKER, G. A. Jr et GRAVES-MORRIS, P. R. (1981). – *Padé Approximants* (Part I: Basic Theory; Part II: Extensions and Applications), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (Volumes 13 et 14 dans la série « Encyclopedia of Mathematics and its Applications »).

BASDEVANT, J. L. (1972). – « The Padé approximant and its physical application », *Forschritte der Physik* (Berlin), vol. 20, p. 283-331.

BEGUIN, J., GOURIÉROUX, C. et MONFORT, A. (1980). – « Identification of an ARIMA process: the corner method », dans *Times Series*, T. Anderson editor, North Holland, Amsterdam, p. 423-436.

BOX, G. E. P. et JENKINS, G. M. (1976). – *Times Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.

CHISHOLM, J. S. R. (1973). – « Mathematical Theory of Padé Approximants », dans *Padé Approximants*, P. R. Graves-Morris, éditeur, The Institute of Physics, London and Bristol, 1-18.

CLAVERIE, P. et DENIS, A. (1984). – « *The Representation of Functions through the Combined Use of Integral Transforms and Padé Approximants: Padé-Laplace Analysis of Functions as Sums of Exponentials*, Preprint, version abrégée, 1985, soumise à Computer Physics Reports.

CLAVERIE, P., SZPIRO, D. et TOPOL, R. (1985). – « Distributed Lag Analysis: The Padé z-Transform Method », *Document de travail* O.F.C.E., n° 85-01.

CLAVERIE, P., SZPIRO, D. et TOPOL, R. (1987). – « Transfer Function and Distributed Lag Identification and Estimation: The Padé z-Transform Method », *Document de travail* O.F.C.E., n° 87-04.

DHRYMES, P. J. (1971). – *Distributed Lags, Problems of Estimation and Formulation*, North-Holland, Amsterdam.

DIAZ, G. (1979). — *Ajustement de données expérimentales par des sommes d'exponentielles au sens des moindres carrés*, Université de Saint-Étienne, Département de Mathématiques, n° 3, novembre, 76 p.

GILEWICZ, J. (1978). — Approximants de Padé, dans « Lecture Notes in Mathematics », A. Dolb and B. Eckmann, éditeurs, Springer Verlag, n° 667.

GRILICHES, Z. (1967). — « Distributed Lags: a Survey », *Econometrica*, vol. 35, p. 16-49.

JOUVENT, F. M. (1984). — « Sommes d'exponentielles », *Rapport de stage* (sous la direction de P. Claverie), option Mathématiques Appliquées (École Centrale des Arts et Manufactures, Chatenay-Malabry).

LII, K. S. (1985). — « Transfer Function Model Order and Parameter Estimation », *J. of Time Series Analysis*, vol. 6, p. 153-169.

LII, K. S. (1980). — « Estimating the Transfer Function in a Distributed Lag Model », *IMS Bulletin*, 147.

LONGMAN, I. M. (1971). — « Computation of the Padé Table », *Inter. J. Computer Math.* (section B), vol. 3, p. 53-64.

MADDALA, G. S. (1977). — *Econometrics*, McGraw-Hill, New York.

PRONY, R. (1795). — « Essai expérimental et analytique sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur d'eau et de la vapeur de l'alcool à différentes températures », *J. de l'École Polytechnique*, vol. 1, cahier 2, p. 24-76, (voir « Considérations générales », p. 24-27 et « Première partie : Méthode d'interpolation applicable aux phénomènes qui dépendent des fluides élastiques », p. 28-35).

WEISS, L. et MCDONOUGH, R. N. (1963). — « Prony's Method, z-Transform and Padé Approximation », *SIAM Review*, vol. 5, p. 145-149.

YERAMIAN, E. (1981). — « Problèmes de l'indépendance ou du couplage fonctionnel des récepteurs d'acétylcholine — Mise au point d'une nouvelle méthode (transformation intégrale, approximants de Padé) pour l'analyse des fonctions sommes d'exponentielles réelles ou complexes », *Rapport de stage* (sous la direction de P. Claverie et A. Denis), option Mathématiques Appliquées (École Centrale des Arts et Manufactures, Chatenay-Malabry).

YERAMIAN, E. et CLAVERIE, P. (1987). — « Analysis of multiexponential functions without a hypothesis as to the number of components », *Nature*. vol. 326. p. 169-174.