

Résolution d'un modèle macroéconomique avec anticipations rationnelles

Jean-Pierre LAFFARGUE *

RÉSUMÉ. — La simulation d'un modèle à anticipations rationnelles revient à résoudre un système d'équations aux différences finies, à horizon illimité et avec contraintes initiales et terminales. L'article examine d'abord dans le cas linéaire les erreurs commises en substituant une échéance bornée à celle infinie. Il est ainsi en mesure d'évaluer différentes procédures de choix de cet horizon et des conditions finales qui s'y rapportent, pour les modèles non linéaires. Il donne ensuite une brève revue des principales méthodes de simulation utilisées en macroéconomie. Puis il présente une procédure de relaxation, non employée encore dans cette discipline, qui repose sur l'algorithme de Newton-Raphson et la triangulation d'une grosse matrice par l'élimination de Gauss.

Solution of a macroeconomic model with rational expectations

ABSTRACT. — The simulation of a model with rational expectations requires the solution of a system of difference equations with initial and terminal conditions over an infinite time period. This paper first considers the linear case and investigates the kind of errors which result from the substitution of a finite horizon to the infinite one. The results which are found are applied to the evaluation of the various methods of choice of this horizon and the terminal conditions which are related to it, when the model is nonlinear. Then the paper gives a short review of the methods of simulation which are currently used in macroeconomics. Finally it presents a method of relaxation which has not been used yet in economics: this method rests upon the algorithm of Newton-Raphson and the triangulation of a large matrix by Gauss' elimination.

* J. P. LAFFARGUE : Université de Paris-I et CEPREMAP. Cette recherche a été effectuée dans le cadre d'un projet qui associe MM. Malgrange, Pujol et moi-même et qui est financé par le Commissariat Général du Plan. J'ai bénéficié de discussions très stimulantes avec Malgrange et Pujol. Des critiques et suggestions de MM. Gouriéroux et Laroque ont été particulièrement utiles et ont permis des améliorations notables de la première version. Mes remerciements vont aussi à deux lecteurs anonymes des *Annales*. Les erreurs et insuffisances sont miennes.

1 Introduction

L'introduction d'anticipations rationnelles des agents dans un modèle macroéconométrique introduit des difficultés nouvelles pour la simulation prévisionnelle. Celle-ci pouvait être réursive, d'une date initiale à une finale, quand l'état courant de l'économie ne dépendait que de celui passé et des valeurs exogènes. Maintenant que le présent est influencé en plus par le futur que prévoit le modèle, la trajectoire recherchée ne peut être obtenue que simultanément pour toutes les périodes et cela jusqu'à l'infini.

La difficulté de ce problème conduit à l'approximer par un autre dont l'horizon est borné. Nous sommes alors confrontés à la résolution d'un système d'équations aux différences finies avec conditions initiales et terminales (« à deux bornes »).

Les analystes numériques ont étudié cette question et les économistes se sont inspirés de leurs développements. Actuellement nous pouvons distinguer deux types d'algorithmes. Le premier rassemble les méthodes du tir. Elles consistent à poser un certain nombre de contraintes initiales supplémentaires, à calculer par simulation réursive leurs implications finales, à comparer celles-ci aux conditions terminales imposées et à réviser le choix de début de période jusqu'à ce qu'il ne conduise plus à de contradiction significative à la date d'échéance. Cette démarche ne s'est pas jusqu'à présent révélée adaptée aux résolutions de gros modèles, à la différence de la seconde. Celle-ci regroupe les méthodes de relaxation. Le gros système d'équations est résolu simultanément pour toutes les périodes. La structure dynamique du modèle n'est pas directement exploitée, mais ses implications qui donnent une structure attrayante à la matrice d'incidence, sont utilisées.

Les macroéconomistes ont fondé la résolution précédente sur l'algorithme de Gauss-Seidel et ses variantes. Nous introduisons dans cet article une méthode de relaxation qui repose sur la procédure de Newton-Raphson, avec triangulation d'une grosse matrice par élimination de Gauss. Son efficacité peut-être améliorée si nous isolons des variables de bouclage. Cette démarche apparaîtra classique à l'analyste numérique, mais elle nous semble nouvelle en économie. ¹

La seconde section examine le cas du modèle linéaire autonome général. Celui-ci peut-être écrit sous une forme canonique particulièrement commode. Après élimination ou transformation de certaines variable, cette expression

1. Pour résoudre un modèle certains économistes préfèrent Gauss-Seidel, et d'autres Newton-Raphson. Un aspect important du choix est la capacité de chacune de ces méthodes à tirer parti du nombre important de zéros de la matrice d'incidence. Un intéressant article d'HUGHES HALLET et FISHER [1987] donne un net avantage à Gauss-Seidel. Mais s'ils appliquent cette méthode avec les adaptations les plus judicieuses, nous n'avons pas été convaincu qu'ils agissaient de même avec l'algorithme de Newton-Raphson.

peut être changée en une autre récursive du passé vers le futur. Les conditions de Blanchard et Khan d'existence et d'unicité des trajectoires prévisionnelles sont rappellées et discutées. Puis nous analysons les conséquences d'une troncature de la période de simulation en présence d'une erreur dans le choix de la nouvelle condition finale, ainsi que l'amplitude probable de cette erreur. La troisième section discute de façon pragmatique des implications du développement précédent au cas non linéaire et non autonome. Une revue des principales méthodes de simulation utilisées en macroéconomie est donnée dans la quatrième section. La cinquième expose la procédure de relaxation que nous proposons. Une annexe informatique, non incluse dans cet article mais disponible, contient le programme FORTRAN de notre algorithme avec toutes les explications nécessaires et une application au modèle de LAFFARGUE et MALGRANGE [1987].

2 Le cas linéaire autonome

2.1. Le problème

La forme générale d'un modèle à anticipations rationnelles linéaire autonome est :

$$(1) \quad \sum_{k=0}^K \sum_{h=0}^H B_{kh} Z_{t-k} Z_{t+h-k} = L_t$$

${}_{t-k}Z_{t+h-k}$ représente l'espérance de la valeur que prendra le vecteur des endogènes à la date $(t+h-k)$ conditionnellement à l'information disponible à l'instant $(t-k)$. Celui-ci comprend l'observation des valeurs passées et courante des variables économiques. B_{kh} est une matrice de paramètres fixes, et L_t un vecteur d'exogènes, convenablement dimensionné et suivant un processus stochastique. Pour que le modèle soit une description cohérente et achevée de l'économie, il convient qu'il définisse sans ambiguïté l'état courant de celle-ci si on lui fournit les valeurs passées et anticipées des endogènes et celle des exogènes. Aussi nous imposons la contrainte que B_{00} soit régulière.

BROZE, GOURIÉROUX et SZAFARZ [1989] montrent dans le chapitre 5 qu'une adjonction de variables artificielles permet de réécrire le modèle sous une forme canonique particulièrement commode :

$$(2) \quad C_1 y_{t-1}^1 + C_0 y_t + C_{-1} y_{t+1}^2 = U_t, \quad C_0 \text{ inversible.}$$

Leur procédure est rappelée dans l'annexe 1.

Les nouvelles variables endogènes sont de trois types exclusifs les uns les autres. n_1 d'entre elles apparaissent sous forme retardée et éventuellement

contemporaine; elles sont dites prédéterminées. n_2 autres figurent sous forme avancée, avec la possibilité d'être présentes aussi sans décalage temporel; elles sont appelées anticipées. Les n_3 dernières grandeurs ne paraissent que pour leurs valeurs courantes et sont nommées statiques. Les trois catégories de variables constituent à la date t les vecteurs y_t^1 , y_t^2 et y_t^3 . L'empilement de ceux-ci dans l'ordre : y_t^2 , y_t^3 et y_t^1 , définit le vecteur des endogènes y_t , de dimension : $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Nous nous intéressons dans cet article à la détermination de prévisions effectuées à la date 0 que permet le système (2). Elles vérifient :

$$(3) \quad C_{10} y_{t-1}^1 + C_{00} y_t + C_{-10} y_{t+1}^2 = {}_0U_t, \quad t \geq 1$$

Il n'y aura pas d'ambiguïté à omettre par la suite le préindice 0. Désignons par C_0^2 , C_0^3 et C_0^1 les trois matrices de respectivement n_2 , n_3 et n_1 colonnes, dont la concaténation forme C_0 . Effectuons le changement de variables : $x_t^1 = y_t^1$, $x_t^2 = y_{t+1}^2$, $x_t^3 = y_t^3$, et représentons l'empilement de ces vecteurs dans l'ordre : x_t^3 , x_t^1 , x_t^2 , par x_t . Le modèle s'écrit alors :

$$(4) \quad C_1 x_{t-1}^1 + C_0^2 x_{t-1}^2 + (C_0^3 C_0^1 C_{-1}) x_t = U_t$$

En général, pour x_{t-1}^1 et x_{t-1}^2 donnés, (4) ne détermine pas x_t de façon unique : il suffit pour qu'il n'en soit pas ainsi que certaines variables anticipées n'apparaissent sous forme avancée que par une même combinaison linéaire. Il est cependant possible, comme le montre l'annexe 2, de procéder à des éliminations et transformations de variables anticipées pour ramener le modèle au cas où l'unicité de x_t est assurée. Il n'est pas alors restrictif de considérer dans la suite de la section le système qui paraîtrait *a priori* plus particulier :

$$(5) \quad x_t = A x_{t-1} + h_t, \quad t \geq 1$$

Nous supposons que toutes les variables statiques ont été éliminées; alors la dimension des vecteurs x_t et h_t est $(n_1 + n_2)$, et A est une matrice carrée de même taille.

(5) peut être résolu séquentiellement vers le futur, c'est-à-dire x_t peut être calculé pour tout $t \geq 1$, si les valeurs initiales x_0^1 et x_0^2 sont données. Il est raisonnable de considérer que cette dernière condition est remplie pour : $x_0^1 = y_0^1$, c'est à dire que les variables prédéterminées ont leur valeurs fixées à la date précédant la première période de simulation. Il n'en est évidemment pas de même pour : $x_0^2 = y_1^2$. En revanche il semble justifié d'exiger que dans un environnement dont les caractéristiques seraient bornées, les endogènes du modèle le soient aussi.² Cela nous conduit à introduire l'exigence, qui comme nous le verrons définit implicitement x_0^2 , qu'il n'existe qu'une solution bornée de (5) et que c'est celle-ci que nous retenons.

2. Cette condition requiert que les variables figurant dans le modèle aient été définies de façon à n'avoir pas de croissance naturellement soutenue. Cela peut nécessiter l'écriture de certaines équations en taux de variations et non pas en niveau, ou la « réduction » de certaines grandeurs en les déflatant par une tendance temporelle, etc.

Pour simplifier le développement qui suit nous précisons cette contrainte d'une façon plus stricte qu'il n'est nécessaire : h_t tend vers une limite non nulle h_∞ quand t augmente indéfiniment.

2.2. Existence et unicité d'une trajectoire bornée

Pour aborder cette question nous admettons que A a toutes ses valeurs propres distinctes. ³ Nous avons Λ_1 la matrice diagonale des n'_1 valeurs propres de module inférieur ou égal à 1, et W_1 la matrice de dimension $n'_1 \times (n_1 + n_2)$ des vecteurs propres à gauche associés. W_{11} regroupe les n'_1 premières colonnes de W_1 et W_{12} les $(n_1 + n_2 - n'_1)$ dernières. Nous déduisons de (5) :

$$(6) \quad W_1 x_t = \Lambda_1^t W_1 x_0 + \sum_{j=1}^t \Lambda_1^{t-j} W_1 h_j.$$

Nous faisons l'hypothèse H_1 que h_∞ n'est orthogonal à aucune des lignes de W_1 . Alors, pour que $W_1 x_t$ soit borné, il faut qu'il n'y ait pas de valeur propre de module égal à 1. ⁴ Nous définissons Λ_2 et W_2 de façon similaire pour les valeurs propres de module supérieur à 1, en nombre n'_2 . Nous posons l'hypothèse H_2 que W_{22} , la matrice constituée des n'_2 dernières colonnes de W_2 , est régulière, et notons W_{21} le tableau regroupant les autres colonnes. Nous déduisons de (5) :

$$(7) \quad W_2 x_t = \Lambda_2^t \left(W_2 x_0 + \sum_{j=1}^t \Lambda_2^{-j} W_2 h_j \right).$$

Pour que $W_2 x_t$ soit borné il faut que le terme entre parenthèses tende vers zéro quand t augmente indéfiniment, soit :

$$(8) \quad W_2 x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_2^{-j} W_2 h_j.$$

-
3. Au prix de quelques lourdeurs d'exposition que nous avons préféré éviter, cette hypothèse peut être levée (voir l'article de Blanchard et Khan).
 4. Nous pourrions faire l'hypothèse plus générale H_1 , qu'il peut exister des valeurs propres de module unité, à condition que h_∞ soit orthogonal aux vecteurs propres qui leur sont associés. Comme cette propriété résulte le plus souvent de relations d'exclusion dans la forme structurelle, on peut exiger qu'elle soit satisfaite pour tous les h_j économiquement concevables, sans guère restreindre H_1 . La proposition 1 reste alors valide à condition de considérer que n_1 représente le nombre de valeurs propres de module inférieur ou égal à 1. Séparons dans Λ_1 et W_1 une partie supérieure Λ_1^* et W_1^* , et une autre inférieure Λ_1^{**} et W_1^{**} , associées respectivement aux valeurs propres de module égal ou supérieur à 1. Alors $W_1^{**} x_t$ et $W_2 x_t$ continuent à tendre vers $W_1^{**} x_\infty$ et $W_2 x_\infty$ quand t augmente indéfiniment. Mais il n'en est pas de même de : $W_1^* x_t = \Lambda_1^{*t} W_1^* x_0$. Cette dépendance éternelle de la trajectoire par rapport à ses conditions initiales est appelée hystérésis et semble caractériser certains phénomènes macroéconomiques contemporains. S'il n'y a pas de valeur propre égale à 1, x_∞ est fixé de façon unique. Sinon seuls sont définis $(n_1 + n_2 - 1)$ produits des vecteurs propres non associés à cette valeur avec x_∞ , dont la détermination a un degré de liberté. Ces problèmes sont abordés par GIAVAZZI et WYPLOSZ [1986].

Cette condition est aussi suffisante, puisque $W_2 x_t$ peut alors s'écrire :

$$(9) \quad W_2 x_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_2^{-i} W_2 h_{t+i}.$$

La donnée de x_0^1 et la relation (8) contraignent l'état initial de l'économie x_0 . Pour une valeur de celui-ci, satisfaisant ces restrictions, les équations (6) et (7) déterminent une trajectoire unique et bornée [la matrice carrée obtenue en empilant W_1 et W_2 est régulière et on vérifie aisément que (5) est satisfait]. Pour que x_0 existe et soit unique il faut et il suffit que : $n_2 = n_2'$.

PROPOSITION 1 (BLANCHARD et KHAN [1980]) : Sous les hypothèses H_1 et H_2 , la condition nécessaire et suffisante pour que (5) définisse une trajectoire unique et bornée est que la matrice A ait autant de valeurs propres de module inférieur à 1 qu'il existe d'endogènes prédéterminées, et de valeurs propres de module supérieur à l'unité qu'il y ait de variables anticipées. La trajectoire tend alors vers : $x_{\infty} = (I - A)^{-1} h_{\infty}$.

Une des difficultés du problème de simulation est qu'il soit à échéance infinie. Elle peut être surmontée par l'emploi de la relation (8), mais à condition de calculer préalablement les valeurs et vecteurs propres de A . Cette démarche ne pourra donc pas être étendue aux cas non linéaire ou non autonome. Nous verrons que les méthodes de résolution d'une approximation à horizon finie ne souffrent pas de ce défaut. Elles conduisent en revanche à une erreur dans le calcul du sentier économique, qui peut être précisément évaluée dans le cas du modèle examiné dans cette section.

2.3. Approximation à échéance finie

Notre problème est équivalent à celui à horizon fini :

$$(10) \quad x_t = A x_{t-1} + h_t, \quad 1 \leq t \leq T, \quad x_0^1 \text{ donné},$$

$$W_2 x_T = - \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_2^{-i} W_2 h_{T+i}$$

c'est-à-dire que tous deux déterminent la même trajectoire sur leur intervalle commun de définition (1, T). En effet (7) reste valide pour le second problème et s'écrit à la date T :

$$W_2 x_T = \Lambda_2^T \left(W_2 x_0 + \sum_{j=1}^T \Lambda_2^{-j} W_2 h_j \right).$$

En substituant dans cette relation la valeur de $W_2 x_T$ que donne la condition terminale de (10), nous retrouvons pour $W_2 x_0$ l'expression (8). Les trajectoires que définissent les deux modèles peuvent alors être calculées récursivement en appliquant la relation (5), à partir d'un même état initial x_0 . Les méthodes de résolution que nous considérons dans cet article ne traitent que du cas où l'horizon est borné. Mais quand nous substituons un tel problème à celui à horizon infini qui nous est originellement posé, la condition terminale que nous choisissons a peu de chances d'être celle qui assure l'équivalence. Pour examiner les

conséquences et l'ampleur de cette erreur dans le cas linéaire, nous allons procéder en trois étapes.

1. Supposons que la condition finale que nous posons revienne à l'attribution d'une valeur incorrecte w pour $W_2 x_T$: w diffère du niveau assurant l'équivalence, donné par (10), par une erreur e_1 . L'application de (7) aux dates t et T nous montre les conséquences de ce mauvais choix pour $W_2 x_t$:

$$(11) \quad W_2 x_t = \Lambda_2^{-(T-t)} w - \sum_{i=1}^{T-t} \Lambda_2^{-i} W_2 h_{t+i}.$$

L'utilisation de cette formule à la date 0 et la connaissance de x_0^1 nous permettent de calculer x_0 . La substitution de son expression dans (6) nous donne les effets sur $W_1 x_t$, de notre erreur :

$$(12) \quad W_1 x_t = \Lambda_1^t (W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{21}) x_0^1 + \Lambda_1^t W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-t} \left(\Lambda_2^{-(T-t)} w - \sum_{i=1}^T \Lambda_2^{-(i-t)} W_2 h_i \right) + \sum_{j=1}^t \Lambda_1^{t-j} W_1 h_j.$$

2. Notre condition terminale est en fait : $C x_T = c$, où C est une matrice de dimension $n_2 \times (n_1 + n_2)$ et de rang n_2 . Notons $V = (V_1, V_2)$ le tableau des vecteurs propres à droite de A , V_i étant celui associé à Λ_i , avec : $i = 1, 2$. Nous avons : $VW = V_1 W_1 + V_2 W_2 = WV = I$. Plaçons nous à l'instant T , multiplions l'équation (12) par CV_1 , celle (11) par CV_2 et sommons le tout. Nous obtenons l'expression de $C x_T$ qui résulte du choix de la condition finale : $W_2 x_T = w$:

$$(13) \quad C x_T = CV_1 \left[\Lambda_1^T (W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{21}) x_0^1 - \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} \sum_{j=0}^{T-1} \Lambda_2^j W_2 h_{T-j} + \sum_{i=0}^{T-1} \Lambda_1^i W_1 h_{T-i} \right] + C (V_1 \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} + V_2) w.$$

En particulier quand w est fixé au niveau impliquant l'équivalence, cette relation donne la bonne valeur de $C x_T$: \hat{c} . Réciproquement, si nous remplaçons dans (13) $C x_T$ par c et w par $W_2 x_T$, l'équation obtenue détermine la valeur de $W_2 x_T$ qui résulte du choix de la condition terminale $C x_T = c$.⁵ Notons par e_2 l'écart de c à \hat{c} . (13) établit la relation entre les erreurs

5. L'existence et l'unicité de w requiert que $C(V_1 \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} + V_2)$ soit de rang n_2 . Cette condition est assurée pour : $C = W_2$, l'expression étant alors égale à la matrice unité. Comme le rang de W_2 est n_2 , et que le rang d'un produit de matrices est inférieur ou égal à celui de chaque matrice du produit, il apparaît que : $V_1 \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} + V_2$, est de rang n_2 . Nous avons supposé qu'il en est de même de C . Si T est grand w est déterminé sans ambiguïté si, et seulement si CV_2 est de rang n_2 .

portant sur les valeurs attribuées aux deux types de conditions finales :

$$(14) \quad e_2 = C(V_1 \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} + V_2) e_1.$$

Les équations (11) et (12) montrent que les conséquences de e_1 sur $W_1 x_T$ et $W_2 x_T$, ont pour amplitudes respectives : $(\Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T}) \Lambda_2^{-(T-t)} e_1$, et : $\Lambda_2^{-(T-t)} e_1$. Ce résultat et (14) établissent la proposition :

PROPOSITION 2 : Si la condition terminale est du type : $Cx_T = c$, où c est fixé indépendamment de T à un niveau n'assurant pas l'équivalence, l'erreur sur la trajectoire à l'instant : $t \leq T$, est, quand l'horizon T varie, majorée par une progression géométrique dont l'exposant est $(T-t)$ et la raison l'inverse du plus petit module des valeurs propres de norme supérieure à 1.

Nous remarquons que si ce plus petit module dépasse nettement l'unité et si nous désirons obtenir une trajectoire proche de celle du modèle à horizon infini pour les t_1 premières périodes, l'horizon de simulation n'a pas besoin de dépasser t_1 de beaucoup, même en présence d'une erreur appréciable sur la condition terminale.

3. Un choix particulier mais raisonnable de la condition terminale est : $Cx_t = Cx_\infty$. En remplaçant dans (13) x_0^1 par x_∞^1 , h_i par h_∞ , et w par : $-\sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_2^{-i} W_2 h_\infty$, nous obtenons une expression de Cx_∞ et donc de c . Nous pouvons alors calculer l'écart e_2 de c à \hat{c} :

$$(15) \quad e_2 = c - \hat{c} = CV_1 \Lambda_1^T \left[(W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{21})(x_\infty^1 - x_0^1) \right. \\ \left. - W_{12} W_{22}^{-1} \sum_{i=1}^T \Lambda_2^{-i} W_2 (h_\infty - h_i) + \sum_{j=1}^T \Lambda_1^{-j} W_1 (h_\infty - h_j) \right] \\ - C(V_1 \Lambda_1^T W_{12} W_{22}^{-1} \Lambda_2^{-T} + V_2) \Lambda_2^T \sum_{j=T+1}^{\infty} \Lambda_2^{-j} W_2 (h_\infty - h_j).$$

Faisons l'hypothèse qu'il existe une date θ au-delà de laquelle l'environnement a atteint son niveau limite : $h_t = h_\infty$ pour : $t > \theta$, et telle que l'horizon de simulation soit au moins aussi éloigné : $T \geq \theta$. Alors l'erreur e_2 sur la condition terminale devient :

$$(16) \quad e_2 = CV_1 \Lambda_1^T [(W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{21})(x_\infty^1 - x_0^1) \\ - W_{12} W_{22}^{-1} \sum_{i=1}^{\theta} \Lambda_2^{-i} W_2 (h_\infty - h_i) + \sum_{j=1}^{\theta} \Lambda_1^{-j} W_1 (h_\infty - h_j)].$$

Ce résultat établit la proposition :

PROPOSITION 3 : Si l'environnement h_t se fixe à sa valeur limite à partir de la date $(\theta + 1)$, et si la condition terminale est de la forme : $Cx_T = Cx_\infty$, l'erreur e_2 sur cette condition quand l'horizon T varie (au-delà de l'instant θ) est majorée par une progression géométrique dont l'exposant est T et la raison le plus grand module des valeurs propres de norme inférieure à 1.

Nous remarquons que si ce plus grand module est nettement en deçà de l'unité, l'horizon du modèle n'a pas à dépasser de beaucoup la date à partir

de laquelle l'environnement est proche de sa valeur de long terme, pour que l'erreur sur la condition terminale soit faible.

3 Extensions au cas non linéaire et non autonome

Une forme très générale d'un modèle à anticipations rationnelles est :

$$(17) \quad G[\dots, {}_{t-k}E G_k(\dots, Z_{t+h-k}, \dots, t, M_{kt}), \dots, t, M_t] = 0.$$

A l'intérieur de la fonction G_k l'indice k est fixe et celui h varie de 0 à H . Dans la fonction G , k évolue de 0 à K . ${}_{t-k}E$ représente l'espérance conditionnelle à l'information disponible à la date $(t-k)$. M_{kt} et M_t désignent des vecteurs d'exogènes. Si ces derniers ont une évolution déterministe connue, (17) se réduit à un modèle à anticipations parfaites pour lequel nous pouvons remplacer ${}_{t-k}E G_k(\dots, Z_{t+h-k}, \dots, t, M_{kt})$, par $G_k(\dots, {}_{t-k}Z_{t+h-k}, \dots, t, {}_{t-k}M_{kt})$. Le modèle prend alors la forme :

$$(18) \quad g(\dots, {}_{t-k}Z_{t+h-k}, \dots, t, L_t) = 0, \quad 0 \leq h \leq H, \quad 0 \leq k \leq K.$$

Comme dans le paragraphe 1.1, l'adjonction de variables artificielles permet d'obtenir l'expression canonique :

$$(19) \quad f(y_{t-1}^1, y_t, y_{t+1}^2, t, L_t) = 0$$

Dans le cas général, nous ne pouvons qu'espérer que si les aléas exogènes sont de faible amplitude, et si les fonctions G_k et G sont proches de formes linéaires, alors (19) constituera une approximation acceptable de (17), et les prévisions optimales de la date 0 pourront être approchées par la trajectoire ${}_0y_t^*$ qui satisfait :

$$(20) \quad f({}_0y_{t-1}^{1*}, {}_0y_t^*, {}_0y_{t+1}^{2*}, t, {}_0L_t) = 0, \quad t \geq 1$$

Par la suite nous considérons la forme (20) dont nous aurons omis le pré-indice 0 et l'exposant *, et ce que nous appellerons endogènes, seront en fait les prévisions à l'instant 0 de ces variables. La valeur initiale y_0^1 est toujours donnée et nous supposons que quand t augmente indéfiniment, L_t tend vers L_∞ , et (20) a un état stationnaire raisonnable unique :

$$(21) \quad f(y_\infty^1, y_\infty, y_\infty^2, \infty, L_\infty) = 0,$$

vers lequel nous exigeons que y_t converge.

Les méthodes de résolution que nous exposons plus bas nécessitent que nous approximons le problème à horizon infini par un autre à échéance T , dont la condition terminale peut-être choisie telle que : $C(y_T^3, y_T^1, y_{T+1}^2) = C(x_T) = C(x_\infty)$; C étant un vecteur de n_2 fonctions. Cette

contrainte finale peut fixer à leurs valeurs de long terme des variables anticipées, mais aussi des expressions telles le déficit des paiements courants, le taux de change réel, etc. Le choix d'un horizon est délicat. FAIR [1984] propose que le modélisateur augmente progressivement T jusqu'à ce que les résultats obtenus pour la période qui l'intéresse ($1, t_1$) cessent de changer. WALLIS *et al.* [1986] montrent que cette procédure conduit à retenir un horizon relativement court pour les modèles britanniques. Si on continue à allonger au-delà la durée de la simulation, la trajectoire calculée ne change guère pour les premières périodes, mais pas pour les autres. Les modèles seraient ainsi résolus avec des conditions terminales fort inexactes, mais cela n'aurait guère de conséquences sur la période d'intérêt pour des raisons qui doivent être de l'ordre de celles données après la proposition 2 pour le cas linéaire. Une stratégie plus exigeante que celle de Fair nécessiterait que l'environnement du modèle soit quasiment constant au-delà d'un instant θ . L'horizon serait alors fixé à une date : $T^* > \theta$, de façon à ce que toute simulation d'une durée supérieure ou égale à T^* , détermine une trajectoire qui a atteint sensiblement son niveau stationnaire à partir de l'instant T^{**} fixe compris entre θ et T^* . Certains modèles britanniques (*voir* par ex. HALL et HERBERT [1986]) préfèrent poser une condition terminale ne nécessitant pas le calcul de x_∞ , du type : $D(x_{T+1} - x_T) = 0$, où D est une matrice de dimension $n_2 \times n$. Dans le cas linéaire et sous les hypothèses de la proposition 3, cette condition équivaut à la nôtre si : $C = D(A - I)$. Elle nous semble cependant dangereuse. Pour le problème à horizon infini, en suivant la démarche qui a permis d'établir (13) et (16), nous obtenons : $x_T - x_\infty = V_1 \Lambda_1^T E$, où E est le terme entre crochets du membre de droite de (16). En conséquence nous avons : $x_{T+1} - x_T = V_1 (\Lambda_1 - I) \Lambda_1^T E$. Si ρ_1 est le plus grand module des valeurs propres de norme inférieure à 1 et si T est élevé, l'écart entre x_{T+1} et x_T est d'une amplitude $(1 - \rho_1)$ fois égale à celle de la différence entre x_{T+1} et x_∞ . Si ρ_1 est proche de l'unité, $(x_{T+1} - x_T)$ peut être négligeable, c'est-à-dire x_T peut ne changer qu'imperceptiblement avec T au delà d'une certaine date, alors même que x_T diffère encore nettement de x_∞ . Si dans le problème à horizon fini, nous fixons celui-ci de façon à ce que les variations de x_t soient négligeables dans les périodes qui le précèdent, nous risquons de commettre une erreur appréciable⁶ sur la condition terminale. WALLIS [1986, p. 52] remarque que les modélisateurs britanniques retiennent des horizons plus courts quand leur condition finale est en différence première, que quand elle égalise les valeurs de certaines variables à leur niveau de long terme.

6. Ce point est illustré dans l'annexe informatique par des simulations du modèle de LAFFARGUE et MALGRANGE [1987] dans le cas où C_1 est proche de l'unité. Comme le plus petit module des valeurs propres de norme supérieure à 1 est voisin de l'unité, le choix d'un horizon insuffisamment éloigné a des conséquences graves dès les premières périodes de la simulation. Il apparaît aussi qu'en repoussant progressivement cet horizon nous ne modifions que lentement les valeurs des premières périodes de la trajectoire, alors qu'elles sont passablement inexactes. Ce résultat doit inciter à la prudence dans l'application du critère de Fair de choix d'un horizon.

4 Revue des principales méthodes de résolution

Simuler le modèle dans un but prévisionnel revient à résoudre le système aux différences finies à deux bornes :

$$(22) \quad \begin{aligned} f(y_{t-1}^1, y_t^2, y_{t+1}^2, t, L_t) &= 0, & 1 \leq t \leq T, \\ y_0^1 \text{ donné, } C(y_T^3, y_T^1, y_{T+1}^2) &= C. \end{aligned}$$

Ce problème est classique pour les analystes numériques qui distinguent deux catégories principales de méthodes (PRESS *et al.* [1986, chapitre 16]).⁷

4.1. Les méthodes séquentielles du tir

En effectuant le changement de variable de y en x , (22) peut être réécrit (avec un léger abus dans la notation) :

$$(23) \quad f(x_{t-1}^1, x_t^2, x_t, t, L_t) = 0, \quad 1 \leq t \leq T, x_0^1 \text{ donné, } C(x_T) = c.$$

Faisons l'hypothèse qu'après une éventuelle élimination ou transformation de variables, (23) détermine x_t de façon unique si x_{t-1}^1 et x_{t-1}^2 sont donnés. Pour x_0^2 fixé, une résolution séquentielle du modèle des dates 1 à T permet de calculer x_T et en conséquence $C[x_T(x_0^2)]$. Le gradient de C en x_0^2 peut être obtenu de n_2 résolutions récursives supplémentaires, partant du voisinage de ce point. La condition finale, qui est de la forme : $C[x_T(x_0^2)] = c$, apparaît comme un système de n_2 équations à autant d'inconnues. En lui appliquant l'algorithme de Newton-Raphson nous obtenons la bonne valeur initiale de x_0^2 .

La méthode du tir est la plus intuitive d'un point de vue économique. Les modèles théoriques à anticipations parfaites sont habituellement amenés à la forme (23) avec un horizon infini. Leurs trajectoires solutions, paramétrisées par x_0^2 sont alors calculées récursivement vers le futur, et celle qui ne diverge pas est retenue (voir par exemple SARGENT et WALLACE [1973], ou DORNBUSCH [1980, ch. 13]). Cette méthode a cependant de gros inconvénients que nous allons examiner dans le cas linéaire (5), avec h_t égal à h constant, x_0^1 fixé à x_∞^1 , et la condition terminale : $C(x_T - x_\infty) = 0$, où C est une matrice de dimension $n_2 \times n$. La solution pour x_0^2 , est alors x_∞^2 . Notons par λ_k , v_k et w_k les valeurs propres de A rangées par normes décroissantes et les vecteurs propres à droite et à gauche associés. Le tir à partir d'une

7. HOLLY et ZARROP [1983] introduisent une procédure originale recourant à un algorithme de contrôle optimal, qui n'entre pas dans cette classification.

valeur x_0^2 quelconque donne le résultat :

$$C(x_T - x_\infty) = CA^T(x_0 - x_\infty) = G_T(x_0^2 - x_\infty^2),$$

avec : $G_T = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \lambda^T C v_k w_k^2$, où w_k^2 représente le vecteur ligne constitué des n_2 derniers éléments de w_k . G_T est le gradient qui doit être inversé dans l'algorithme de Newton-Raphson. L'ordinateur ayant une précision limitée, il ne pourra stocker quand T devient élevé, qu'une approximation \hat{G}_T limitée aux n' premiers termes de la somme qui définit G_T , les autres termes étant devenus numériquement négligeables. n' diminue quand T augmente jusqu'à une borne inférieure n' , égale au nombre de valeurs propres de plus grand module. Comme le rang de \hat{G}_T est au plus de n' , cette matrice devient singulière quand T croît (si : $n_2 > n'$, bien sûr). Plus précisément l'équation qui devrait permettre de calculer x_0^2 : $\hat{G}_T(x_0^2 - x_\infty^2) = 0$, a pour racines tous les éléments du sous-ensemble X de \mathbb{R}^{n_2} , obtenu en ajoutant à x_∞^2 le noyau de \hat{G}_T . Ce n'est pas le seul inconvénient de la méthode. Fixons x_0^2 à $(x^2 + \varepsilon)$, où x^2 est un élément de X, et où ε n'appartient pas au noyau de \hat{G}_T mais est très petit. Alors : $\hat{G}_T(x_0^2 - x_\infty^2) = \hat{G}_T \varepsilon$, et ce vecteur a au moins une composante qui tend vers l'infini avec T. Si $x^2 = x_\infty^2$, nous remarquons que la trajectoire obtenue par résolution séquentielle du modèle diverge, alors même que l'erreur commise sur la condition initiale est d'une ampleur à peine perceptible par l'ordinateur.

Ces défauts sont sérieux parce qu'il y a beaucoup de chances qu'un modèle macro-économique ait des valeurs propres de modules très supérieurs à 1,⁸ ce qui implique que \hat{G}_T devient rapidement singulier quand T augmente, alors que d'autres valeurs propres aient leurs normes proches de l'unité, ce qui oblige à retenir un horizon T éloigné.

Pour remédier à ces inconvénients les analystes numériques (voir KELLER [1976]) ont développé la méthode du tir multiple, qui a été introduite en économie par LIPTON *et al.* [1982]. La durée de simulation est divisée en $(s+1)$ intervalles par les dates : $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s < T$. Pour chacune d'entre elles, sauf la dernière, nous choisissons des valeurs de début d'intervalle x_{ij}^1 , $i=1, 2, j=0, \dots, s$. (en fait x_0^1 nous est imposé). Une résolution séquentielle adéquate du modèle sur T périodes au total, permet de calculer les valeurs associées de fin d'intervalle : $x_{i(j+1)}^1(x_{ij}^1, x_{ij}^2)$, pour : $j \leq s-1$, et $x_T(x_{ts}^1, x_{ts}^2)$. La solution de (23) doit vérifier :

$$(24) \quad \begin{cases} x_{i(j+1)}^1(x_{ij}^1, x_{ij}^2) = x_{i(j+1)}^1, & \text{pour } i=1, 2; j=0, \dots, s-1 \\ C[x_T(x_{ts}^1, x_{ts}^2)] = c. \end{cases}$$

C'est un système de : $(n_1 + n_2) s + n_2$ équations à autant d'inconnues, auquel nous pouvons encore appliquer Newton-Raphson. L'obtention des valeurs finales et des gradients requiert cette fois : $n_1 + n_2 + 1$ résolutions séquentielles du modèle (en fait n_1 d'entre elles ne commencent qu'à la date t_1) à

8. Elles reflètent l'existence d'événements futurs qui, même s'ils sont prévus depuis longtemps, n'ont d'influence sur l'économie que quand on est proche de leur échéance.

chaque pas de l'algorithme. Le nombre de prédéterminées, n_1 , pouvant être élevé, ce calcul risque d'être lourd, comme celui de l'inversion du gradient (bien que sa structure particulière contribue à la faciliter). Cela, ajouté au tâtonnement nécessaire pour déterminer des intervalles adéquats, semble avoir découragé les constructeurs des gros modèles à anticipations rationnelles d'utiliser cette méthode.

4.2. Les méthodes globales de relaxation

Celles-ci considèrent (22) comme un système de $(nT + n_2)$ équations à autant d'inconnues. Elles ne tirent pas directement profit du caractère dynamique du modèle, en effectuant des résolutions séquentielles de celui-ci par exemple. Mais elles cherchent à bénéficier de l'implication de ce trait sur la structure de la matrice d'incidence. Le principe de ces méthodes est de partir d'un choix initial raisonnable d'une trajectoire $y_t^{(0)} (0 \leq t \leq T)$, qui très probablement ne satisfait pas les équations du modèle. Ce choix est ensuite amélioré au cours d'une succession d'étapes j , jusqu'à ce que soit « relaxé » un sentier de l'économie $y_t^{(j)}$ qui vérifie (22) avec un degré d'approximation suffisant. Les économistes ont recouru pour cela à l'algorithme de Gauss-Seidel et à ses variantes (Jacobi, sur relaxation, etc.). Notre exposition sera plus claire si nous prenons la condition finale un peu moins générale que y_{T+1}^2 est donné.

Il est habituellement facile, après un changement éventuel de l'ordre des équations, de réécrire (22) sous la forme :

$$(25) \quad \begin{cases} y_{i,t} = h_i(y_{t-1}^1, \bar{y}_{i,t}, \bar{y}_{i,t}, y_{t+1}^2, t); \\ i = 1, \dots, n; \quad 1 \leq t \leq T; \quad y_0^1 \text{ et } y_{T+1}^2 \text{ donnés.} \end{cases}$$

$\bar{y}_{i,t}$ et $\bar{y}_{i,t}$ désignent respectivement les $(i-1)$ premières et les $(n-i)$ dernières composantes de y_t , le i -ième terme de ce vecteur étant $y_{i,t}$. HALL [1985] propose d'appliquer directement Gauss-Seidel à l'ensemble des nT relations qui constituent le système (25). Si $y_t^{(j-1)}$ désigne la trajectoire retenue à l'étape $(j-1)$, nous déterminons $y_t^{(j)}$ par :

$$(26) \quad y_{i,t}^{(j)} = h_i(y_{t-1}^{1(j)}, \bar{y}_{i,t}^{(j)}, \bar{y}_{i,t}^{(j-1)}, y_{t+1}^{2(j-1)}, t)$$

Dans un modèle où il n'y aurait pas de variables rationnellement anticipées cette méthode ne dégénère pas en la procédure usuelle : celle-ci applique Gauss-Seidel séquentiellement pour chaque période et ne passe à la suivante que lorsque l'algorithme a convergé à celle en cours. Hall a comparé les deux algorithmes dans cette situation (en utilisant une version du modèle du National Institute) et a conclu que le sien nécessitait deux fois plus d'itérations.

La méthode qu'introduit FAIR [1984] a la propriété de dégénérescence qui manque à celle de Hall. Au pas d'itération j le modèle est résolu récursivement de la première à la dernière période : à la t -ième, $y_t^{(j)}$ est calculé comme solution de : $f(y_{t-1}^{1(j)}, y_t^{(j)}, y_{t+1}^{2(j-1)}) = 0$. Dans cette équation $y_{t-1}^{1(j)}$ figure à sa valeur obtenue lors de la résolution du modèle à la même étape mais à la date antérieure (y_0^1 est donné), et $y_{t+1}^{2(j-1)}$ est un résultat obtenu au pas

précédent (ou est le choix initial si : $j=1$; y_{T+1}^2 est donné). Nous poursuivons les itérations jusqu'à ce que les valeurs calculées pour les variables anticipées soient stabilisées : $y_t^{2(j)} \simeq y_t^{2(j-1)}$ ($1 \leq t \leq T$). La procédure de Fair n'est pas sans rapport avec celle du tir multiple. Supposons que pour celle-ci nous fixions la durée de l'intervalle à une période élémentaire et que nous remplacions Newton-Raphson par Gauss-Seidel. Pour toute étape et chaque date t , le modèle doit être résolu dans les deux méthodes. Mais pour la première cette résolution revient à calculer y_t pour y_{t-1}^1 et y_{t+1}^2 donnés, alors que pour la seconde nous cherchons à obtenir x_t pour x_{t-1}^1 et x_{t-1}^2 fixés (c'est-à-dire : y_t^3 , y_t^1 , y_{t+1}^2 en fonction de y_{t-1}^1 et y_t^2). Laquelle de ces procédures est la plus simple dépend évidemment du modèle considéré.

A l'étape j , Fair applique à chaque période l'algorithme de Gauss-Seidel aux équations du modèle. Il ne passe à la date suivante que quand la convergence a été obtenue. Mais est-il raisonnable de résoudre le modèle à l'instant donné avec une grande précision, alors que les valeurs futures des variables anticipées ont été fixées à des niveaux qui pourront être fortement révisés dans les étapes ultérieures? Hall péchait par l'excès contraire puisqu'il n'effectuait qu'une itération par période. Un bon compromis semble être d'itérer Gauss-Seidel plusieurs fois à chaque date, mais pas jusqu'à la convergence, du moins tant que les valeurs des variables anticipées varient notablement d'une étape à la suivante. ⁹

5 Une méthode de relaxation utilisant l'algorithme de Newton-Raphson

Appelons \bar{x}_t le vecteur à $(n_1 + n_2)$ dimensions obtenu en empilant x_t^1 et x_t^2 , et S_0 le tableau de format $n_1 \times (n_1 + n_2)$, tel que ses n_1 premières colonnes constituent la matrice unité et que les n_2 dernières soient nulles. Ces nouvelles notations nous permettent de réécrire (23) sous une forme un peu moins lourde :

$$(27) \quad f(\bar{x}_{t-1}, x_t, t, L_t) = 0, \quad 1 \leq t \leq T, \quad S_0 \bar{x}_0 = x_0^1, \quad C(x_T) = c$$

f et C sont des vecteurs de fonctions de dimensions respectives n et n_2 . x_0^1 et c sont des vecteurs de paramètres de formats n_1 et n_2 . Simuler le

9. Cette idée est développée de façon pertinente par FISHER, HOLLY et HUGUES HALLET [1986] ainsi que par FISHER et HUGUES HALLET [1988]. Ces auteurs comparent aussi les efficacités des diverses variantes de Gauss-Seidel, et illustrent leurs considérations théoriques d'applications à des modèles britanniques.

5.2. Résolution d'un modèle linéaire non autonome à anticipations rationnelles ¹⁰

Nous devons maintenant résoudre le système (23). Celui-ci peut s'écrire sous une forme plus concise : $\hat{S}\widehat{\Delta x} = \hat{s}$, où \hat{S} , $\widehat{\Delta x}$ et \hat{s} , sont une matrice carrée et deux vecteurs de dimension $(nT + n_1 + n_2)$. La structure de \hat{S} est très particulière. Pour mieux la comprendre nous avons représenté (23) sur la figure 1 dans le cas où il y a 5 variables endogènes, dont 2 sont prédéterminées, 1 statique et 2 anticipées et pour un horizon T de 3. Les Z, D et A du membre de gauche représentent les coefficients $S_{i,j,t}$, les V sont les inconnues, et les blancs des 0. Les éléments du membre de droite sont représentés par des S et des A. Les deux premières lignes concernent les conditions initiales et les deux dernières les finales. Les 3 blocs de 5 lignes figurent le modèle aux dates : $t = 1, 2, 3$.

La méthode de résolution utilisée repose sur une forme de l'élimination de Gauss qui triangule \hat{S} . Le système qui est obtenu est représenté sur la figure 2. Les $n_2 n T$ éléments de la matrice qui ne seront ni nuls, ni égaux à 1, ainsi que les $(nT + n_1 + n_2)$ membres de droite, sont stockés dans la mémoire de l'ordinateur. La trajectoire est alors calculée récursivement, en commençant par la dernière équation.

L'élimination procède de haut en bas en $(T + 1)$ étapes.

Première étape

Nous considérons les conditions initiales et le modèle à la date : $t = 1$ et nous nous rapportons à la figure 1. Dans celle-ci Z représente les termes qui vont être éliminés et A ceux qui seront altérés. D sont les éléments d'une matrice carrée que nous allons diagonaliser. Les coefficients qui doivent être stockés en mémoire sont représentés par des S, dans les schémas 1 et 2. Dans ce dernier, les lignes pour lesquelles t égale 0 ou 1, montrent comment le système a été modifié au terme de l'étape. Celle-ci se divise en deux parties.

1. En ajoutant aux équations de la période 1 des multiples convenables des conditions initiales, nous éliminons tous les Z. Les S et les A des membres de gauche ne sont pas modifiés.

2. Nous diagonalisons ensuite le bloc des D. Pour cela : (a) Nous divisons la première relation par le premier terme diagonal; ce coefficient est remplacé par 1. (b) Chacun des autres coefficients différent de zéro de la première colonne de D est annulé, en ajoutant à la relation dans laquelle il intervient un multiple convenable de la première. (c) Nous recommençons avec la seconde équation et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

Cette procédure ne peut fonctionner que si la diagonale du tableau des D ne contient pas de zéros, ni de termes numériquement négligeables. Pour être assuré que cette condition est satisfaite il suffit d'effectuer un pivotage

10. Ce paragraphe est pour l'essentiel une adaptation de PRESS *et al.* [1986, p. 591-594].

<u>Relations</u>	<u>Variables</u>	<u>Membres de droite</u>
<u>Conditions initiales</u>	V	S
1	V	S
t = 1	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
	V	A
t = 2	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
Z Z D D D D D D A A	V	A
	V	A
t = 3	V	A
Z Z D D D D D D A A V	V	A
Z Z D D D D D D A A V	V	A
Z Z D D D D D D A A V	V	A
Z Z D D D D D D A A V	V	A
Z Z D D D D D D A A V	V	A
	V	A
<u>Conditions finales</u>	Z Z Z D D V	A
	Z Z Z D D V	A

FIGURE 1

Le système avant sa triangulation

t = 0	1			V	S	
	1			V	S	
	1	SS		V	S	
t = 1		1	SS	V	S	
		1	SS	V	S	
		1	SS	V	S	
		1	SS	V	S	
		1	SS	V	S	
t = 2			1	SS	S	
			1	SS	S	
			1	SS	S	
			1	SS	S	
			1	SS	S	
t = 3				1	SS	S
				1	SS	S
				1	SS	S
				1	SS	S
t = 4					1	V
					1	V

FIGURE 2

Le système après sa triangulation

partiel implicite, qui compare les coefficients D divisés par le plus grand élément de leurs lignes respectives, et change l'ordre de celles-ci.

Deuxième étape

Nous considérons le modèle pour la deuxième période (il est représenté sur le schéma 1) et pour la première après la transformation précédente, tel qu'il apparaît dans la figure 2. Les lignes de celle-ci pour lesquelles : $t=2$, montrent le résultat obtenu au terme de cette étape. Elle diffère peu de la précédente. Simplement dans sa première partie, quand les n_1 dernières équations du modèle à la date 1 sont ajoutées, après multiplication par des valeurs convenables, aux n équations du modèle à la date 2 afin d'éliminer les Z, alors les n_2 premières colonnes de la matrice D sont aussi altérées. Les $(T-2)$ étapes qui suivent sont identiques à celle-ci.

Dernière étape

Au début de celle-ci nous considérons les conditions finales (fig. 1) et le modèle pour la T-ième période après l'altération de l'étape précédente (fig. 2). Les $(n_1 + n_3)$ dernières lignes de celui-ci permettent d'éliminer les variables Z. La matrice des D, qui est maintenant de format $n_2 \times n_2$, est ensuite réduite à celle unité.

La procédure symétrique de celle que nous venons d'exposer revient sensiblement à celle proposée par CHOW [1985, chapitre 15]. Elle consiste à donner à la matrice \hat{S} une forme triangulaire *inférieure*, puis à calculer la trajectoire récursivement en commençant par la première équation. Dans notre méthode la matrice triangulaire que nous devons stocker comporte $n(n_2 + 1)$ coefficients par période. Une étape usuelle requiert un nombre d'altérations de coefficients qui est de : $n \left[\sum_{i=1}^{n_1} i + n_1(n_2 + 1) \right]$ dans sa première partie et de : $n \left[\sum_{i=1}^n i + n(n_2 + 1) \right]$ dans sa seconde. Les performances de la procédure de Chow s'obtiennent à partir de celles-ci, en permutant n_1 et n_2 . Le plus souvent le nombre de variables prédéterminées est très supérieur à celui d'anticipées ($n_1 > n_2$). Nous constatons alors que notre méthode requiert pour chaque période un stockage plus faible [de $n(n_1 - n_2)$ éléments] et un volume d'altérations moindre [de $n(n_1 - n_2)(n_1 + n_3 - 3)/2$].

5.3. Amélioration des performances de la diagonalisation des matrices de D

Nous considérons une étape t , autre que la dernière. La matrice des D a n colonnes. Les n_2 premières sont associées au vecteur y_t^2 et ont été modifiées dans la première partie de l'étape. Les n_3 suivantes et les n_1 dernières, qui correspondent respectivement à y_t^3 et y_t^1 , n'ont pas été altérées : leur tableau d'incidence est donc le même que pour le modèle à la date t . Préalablement à la simulation nous classons les variables qui composent chacun de ces deux derniers vecteurs, de la façon suivante. Notons D_{ij} l'élément générique

de la matrice des D. Pour tout j vérifiant : $n_2 + 1 \leq j_1 \leq j \leq j_2 \leq n$, où j_1 et j_2 sont deux bornes fixes, nous avons : (a) D_{jj} ni nul, ni numériquement négligeable; (b) $D_{jk} = 0$, pour tout k vérifiant : $j < k \leq j_2$. Les conditions reviennent à considérer que les variables indicées j peuvent être calculées récursivement si nous connaissons les valeurs passées des prédéterminées et futures des anticipées, ainsi que celles de : $(j_1 - 1) + (n - j_2)$ variables de bouclage. Cette classification est plus contraignante que celle fréquemment utilisée pour résoudre les modèles sans anticipations rationnelles (ARTUS, DELEAU, MALGRANGE [1986, p. 213-215]). Ici toutes les grandeurs anticipées doivent être de bouclage, et l'ordre de la récursivité doit d'abord concerner des variables statiques, celles prédéterminées ne venant qu'ensuite.

La diagonalisation du bloc des D procède d'abord par rang croissant de colonne, de j_1 à j_2 (sans pivotage). Pour j supérieur à j_1 , il n'y a pas lieu de combiner la ligne j avec celles de rang i inférieur : en effet l'élément D_{ij} est déjà nul. La diagonalisation se poursuit ensuite pour les $(n - j_2 + j_1 - 1)$ colonnes restantes, comme indiqué dans le paragraphe précédent.

6 Conclusion

Cet article présente une revue des différents problèmes soulevés par la simulation d'un modèle macroéconomique avec anticipations rationnelles, et des méthodes développées pour surmonter ces difficultés. Il introduit aussi une procédure de résolution qui nous semble nouvelle en économie. Nous l'avons appliquée à une maquette de petite taille. Mais nous espérons qu'elle peut l'être à des modèles d'une dimension plus importante, atteignant jusqu'à la centaine d'équations quand ils sont écrits sous la forme (19). Nous travaillons actuellement au développement d'un tel modèle pour la France.

Nous considérons le modèle sous la forme (1) et procédons en trois étapes.

1. Nous introduisons les vecteurs :

$$Z_t^1 = \begin{bmatrix} Z_t \\ {}_t Z_{t+1} \\ \vdots \\ {}_t Z_{t+h} \end{bmatrix}, \quad L_t^1 = \begin{bmatrix} L_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

et les matrices :

$$B_0^1 = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0h} \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & I \end{bmatrix}, \quad B_k^1 = \begin{bmatrix} B_{k0} & B_{k1} & \dots & B_{kh} \\ & & 0 & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad k=1, \dots, K$$

$$B_{-1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -I & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{bmatrix},$$

où I et 0 désignent les matrices unités et nulles convenablement dimensionnées.

(1) se réécrit :

$$(29) \quad B_0^1 Z_t^1 + B_1^1 Z_{t-1}^1 + \dots + B_K^1 Z_{t-K}^1 + B_{-1}^1 Z_{t+1}^1 = L_t^1$$

où ${}_t Z_{t+1}^1$ est l'espérance à la date t du vecteur Z_{t+1}^1 .

2. Nous définissons les vecteurs :

$$Z_t^2 = \begin{bmatrix} Z_t^1 \\ Z_{t-1}^1 \\ \vdots \\ Z_{t-K+1}^1 \end{bmatrix}, \quad L_t^2 = \begin{bmatrix} L_t^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

et les matrices :

$$B_0^2 = \begin{bmatrix} B_0^1 & B_1^1 & \dots & B_{K-1}^1 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix},$$

$$B_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_K^1 \\ -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -I & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{-1}^2 = \begin{bmatrix} B_{-1}^1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & \end{bmatrix}. \quad (29) \text{ se réécrit :}$$

$$(30) \quad B_0^2 Z_t^2 + B_1^2 Z_{t-1}^2 + B_{-1}^2 Z_{t+1}^2 = L_t^2$$

où ${}_t Z_{t+1}^2$ est l'espérance à la date t du vecteur Z_{t+1}^2 .

3. Il nous suffit de poser :

$$y_t^1 = y_t^2 = Z_t^2, \quad C_1 = \begin{pmatrix} B_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_t = \begin{pmatrix} y_t^2 \\ y_t^1 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} B_0^2 & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} B_{-1}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} L_t^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour obtenir une forme (2), qui est particulière au sens où il n'apparaît pas de variables statiques, c'est-à-dire de vecteur y_t^3 .

Si B_{00} est inversible, il en découle immédiatement que B_0^1 , B_0^2 et C_0 le sont aussi.

4. La démarche proposée dans cette annexe pour obtenir une forme canonique de (1) ne recherche pas l'économie dans la dimension des matrices et des vecteurs qu'elle fait intervenir. Il sera souvent aisé de l'alléger en tirant partie des structures des matrices B_{kh} , et d'obtenir une forme canonique moins lourde où certaines variables n'apparaîtront que sous forme contemporaine (seront statiques).

ANNEXE 2

Après multiplication des deux membres par C_0^{-1} et élimination des variables statiques, le modèle (3) peut être écrit sous la forme :

$$(31) \quad \begin{cases} T_0 D_0 y_{t+1}^2 + y_t^2 + T_0 F y_{t-1}^1 = T_0 u_t^2 \\ E_0 y_{t+1}^2 + y_t^1 + G y_{t-1}^1 = u_t^1 \end{cases}$$

y_t^1 et u_t^1 d'une part, y_t^2 et u_t^2 d'autre part, sont des vecteurs de dimensions n_1 et n_2 . D_0 , E_0 , F et G sont des matrices. Nous définissons : $r_0 = n_2$, et : $T_0 = I_{r_0}$, I_q étant la notation générique de la matrice unité de taille q .

Supposons que $T_0 D_0$ ne soit pas inversible. Alors $\begin{pmatrix} T_0 D_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$ est de rang : $r_1 < r_0$. Il est possible de calculer trois matrices D_1 , E_1 , T_1 , de dimensions respectives $r_0 \times r_1$, $n_1 \times r_1$, $r_1 \times r_0$, telles que $\begin{pmatrix} D_1 \\ E_1 \end{pmatrix}$ et T_1 soient de rang r_1 , et avec : $T_0 D_0 = D_1 T_1$, $E_0 = E_1 T_1$. Posons : $y_t^{*1} = T_1 y_t^2$, et multiplions la première équation de (31) par T_1 . Le modèle se réécrit :

$$(32) \quad \begin{cases} T_1 D_1 y_{t+1}^{*1} + y_t^{*1} + T_1 T_0 F y_{t-1}^1 = T_1 T_0 u_t^2 \\ E_1 y_{t+1}^{*1} + y_t^1 + G y_{t-1}^1 = u_t^1 \end{cases}$$

Si $T_1 D_1$ n'est pas régulière nous procédons de la même façon, et cela s fois au total, jusqu'à ce que nous disposions du système :

$$(33) \quad \begin{cases} T_s D_s y_{t+1}^{*s} + y_t^{*s} + T_s \dots T_0 F y_{t-1}^1 = T_s \dots T_0 u_t^2 \\ E_s y_{t+1}^{*s} + y_t^1 + G y_{t-1}^1 = u_t^1 \end{cases}$$

tel que $T_s D_s$ soit inversible. Alors :

$$(34) \quad \begin{pmatrix} y_{t+1}^{*s} \\ y_t^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_s & D_s & | & 0 \\ \hline E_s & & & I_{n_1} \end{pmatrix}^{-1} \times \left[- \begin{pmatrix} I_{r_s} & | & T_s & \dots & T_0 & F \\ \hline 0 & & & & & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1}^{*s} \\ y_{t-1}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_s \dots T_0 u_t^2 \\ u_t^1 \end{pmatrix} \right]$$

Cette écriture est du même type que celle de l'équation (5). Si en suivant par exemple la démarche du paragraphe 1.2, nous déterminons une trajectoire pour y_t^1 et y_t^{*s} , nous pouvons calculer de façon récursive celle de y_t^2 à partir des premières relations de (31), (32), etc. :

$$(35) \quad \begin{cases} y_t^2 = T_0 (u_t^2 - F y_{t-1}^1) - D_1 y_{t+1}^{*1} \\ y_{t+1}^{*1} = T_1 T_0 (u_{t+1}^2 - F y_t^1) - D_2 y_{t+2}^{*2} \\ \hline y_{t+s-1}^{*s-1} = T_{s-1} \dots T_0 (u_{t+s-1}^2 - F y_{t+s-2}^1) - D_s y_{t+s}^{*s} \end{cases}$$

● Références bibliographiques

- ARTUS, P., DELEAU, M. et MALGRANGE, P. (1986). — *Modélisation macroéconomique*, Economica, Paris.
- BLANCHARD, O. J. et KAHN C. M. (1980). — « The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations », *Econometrica*, vol. 48, p. 1305-1311.
- BROZE, L., GOURIÉROUX, C. et SZAFARZ, A. (1989). — *Reduced Forms of Rational Expectations Models*, Fundamentals of Pure and Applied Economics, Harwood Academic Publishers, Chur.
- CHOW, G. C. (1981). — *Econometric Analysis by Control Methods*, John Wiley, New York.
- DORNBUSCH, R. (1980). — *Open Economy Macroeconomics*, Basic Books, New York.
- FAIR, R. C. (1984). — *Specification, Estimation and Analysis of Macroeconomic Models*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- FISHER, P. G., HOLLY, S. et HUGUES-HALLET, A. J. (1986). — « Efficient Solution Techniques for Dynamic Nonlinear Rational Expectations Models », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 10, p. 139-143.
- FISHER, P. G. et HUGUES HALLET, A. J. (1988). — « Efficient Solution Techniques for Linear and Non-Linear Rational Expectation Models », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, p. 635-657.
- GIAVAZZI, F. et WYPLOSZ C. (1985). — « The Zero Root Problem: a Note on the Dynamic Determination of the Stationary Equilibrium in Linear Models », *Review of Economic Studies*, vol. 52, p. 353-357.
- HALL, S. G. (1985). — « On the Solution of Large Economic Models with Consistent Expectations », *Bulletin of Economic Research*, vol. 37, 2.
- HALL, S. G. et HERBERT, R. (1986). — « Consistent Simulations and the National Institute Model 8 », *National Institute Economic Review*, n° 115, p. 64-73.
- HOLLY, S. et ZARROP, M. B. (1983). — « On Optimality and Time Consistency when Expectations are Rational », *European Economic Review*, 20, p. 23-40.
- HUGHES HALLET, A. J. et FISHER P. G. (1987). — « Should Econometrician Use Newton Methods for Model Solution? », ESRC Macroeconomic Modelling Bureau, *Discussion Paper*, n° 10, août, University of Warwick.
- KELLER, H. B. (1976). — *Numerical Solution of Two Points Boundary Value problems*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- LAFFARGUE, J. P. et MALGRANGE, P. (1987). — « Rationalité des comportements et des anticipations dans les blocs réels des modèles macroéconomiques », *Recherches Économiques de Louvain*, vol. 53, 3, p. 203-222.
- LIPTON, D., POTERBA, J., SACHS, J. et SUMMERS, L. (1982). — « Multiple Shooting in Rational Expectations Models », *Econometrica*, vol. 50, p. 1329-1333.
- PRESS, W. H., FLANNERY, P., TEUKOLSKY, S. A. et VETTERLING, W. T. (1986). — *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- SARGENT, T. J. et WALLACE, N. (1973). — « The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight », *Econometrica*, 41, p. 1043-1048.
- WALLIS, K. F., ANDREWS, M. J., FISHER, P. G., LONGBOTTOM, J. A. et WHITLEY, S. D. (1986). — *Models of the UK Economy. A Third Review by the ESRC Macroeconomic Modelling Bureau*, Oxford University Press, Oxford.