ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. - N° 13 — 1989

Gestion de portefeuille dans un modèle binomial

Isabelle BAJEUX *

RÉSUMÉ. – Ce papier présente un modèle en temps discret de choix de portefeuille et de consommation en environnement incertain. Ce modèle est une application de l'approche binomiale de Cox, Ross et Rubinstein [1979] au problème traité par Merton [1973].

On trouve alors une résolution explicite du comportement optimal d'un consommateur qui permet d'obtenir des résultats de statique comparative. Puis, on en déduit un modèle d'évaluation des titres financiers de type I.C.C.A.P.M. (Intertemporal Consumption based Capital Asset Pricing Model) dans un cadre d'équilibre, analogue au modèle en temps continu de Duffie-Zame (1987).

Portfolio Selection in a Binomial Model

ABSTRACT. – This paper develops a discrete-time model of consumption and portfolio selection under uncertainty in the spirit of Merton [1973] and Cox, Ross and Rubinstein [1979].

We obtain explicit solutions for general utility functions as well as comparative static results. Finally, we derive an Intertemporal Consumption based Capital Asset Pricing Model à la Duffie-Zame [1987].

---

* I. Bajeux : Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, 5, rue Descartes, 75230 Paris Cedex 05. Je tiens à remercier Jean-Charles Rochet pour son aide et ses conseils à tous les stades de ce travail ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs remarques. Toute erreur ou imprécision m'est entièrement imputable.

1 Introduction

MERTON [1969], [1973], dans un modèle dynamique de choix de portefeuille en temps continu obtient une justification a posteriori du « Capital Asset Pricing Model » : la stratégie optimale des agents se résume par une combinaison linéaire de certains portefeuilles, appelés aussi « fonds communs de placement ». Il s'ensuit, à l'équilibre, des relations « multi-bêtas » entre les rendements espérés nets des actifs et le rendement espéré net du portefeuille de marché. Ces relations se réduisent aux équations bien connues « à bêta unique » dans le cas où l'incertitude est unidimensionnelle.

L'idée fondamentale de la célèbre équation de BLACK et SCHOLES [1973] est celle de « spanning » par répétition : du fait que les transactions sont ici permises à chaque date en temps continu, que le marché à chaque instant est complet vis-à-vis des aléas susceptibles de l'affecter à l'instant suivant, chaque agent peut modifier son portefeuille de façon continue et, finalement, obtenir une couverture complète des risques financiers comme s'il existait effectivement un système complet de marchés contingents.

Cette idée a été reprise récemment par KARATZAS *et al.* [1986] pour résoudre le problème de Merton dans le cas de fonctions d'utilité de Von Neumann-Morgenstern quelconques. Les techniques mathématiques qui sont utilisées par ces auteurs reposent essentiellement sur des théorèmes de représentation de martingales. COX, ROSS et RUBINSTEIN [1979] ont eux aussi repris cette idée pour la détermination du prix d'une option, dans le cadre économique très simple d'un modèle en temps discret et à deux actifs financiers avec une incertitude binomiale.

Notre but ici est d'utiliser cette idée de « spanning » par répétition pour la résolution d'un modèle de choix de portefeuille et de consommation en environnement incertain et en temps discret. On obtient alors une résolution explicite du comportement optimal d'un agent ayant une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern quelconque (ainsi qu'une fonction d'héritage quelconque, dans le cas du modèle à horizon fini), les processus de rendement des actifs risqués étant exogènes et quelconques. Cette résolution permet d'obtenir des résultats de statique comparative donnant les variations des fonctions de consommation et d'épargne en fonction des différents paramètres du modèle.

On résoud ensuite le problème de valorisation d'actifs, ceux-ci étant définis par leurs dividendes donnés de façon exogène. On trouve ici des conditions nécessaires et suffisantes sur ces dividendes pour que les actifs génèrent un système complet de biens contingents. Enfin, on en déduit des relations de type ICCAPM (Intertemporal Consumption based Capital Asset Pricing Model) entre les rendements moyens des actifs financiers.

Cet article s'articule de la manière suivante : la partie 2 est consacrée à la modélisation, et en particulier à la description de la structure informationnelle et au programme d'optimisation des agents. La partie 3 présente la résolution explicite de ce modèle et la partie 4 les résultats de statique comparative qui en découlent. La partie 5 est consacrée au modèle d'équilibre général sous-jacent et donne les relations de type ICCAPM entre les rendements moyens des actifs financiers. Enfin, la partie 6 présente quelques généralisations de tous ces résultats.

2 Modèle à horizon fini. Le cas de deux actifs financiers avec marché complet

2.1. Le modèle

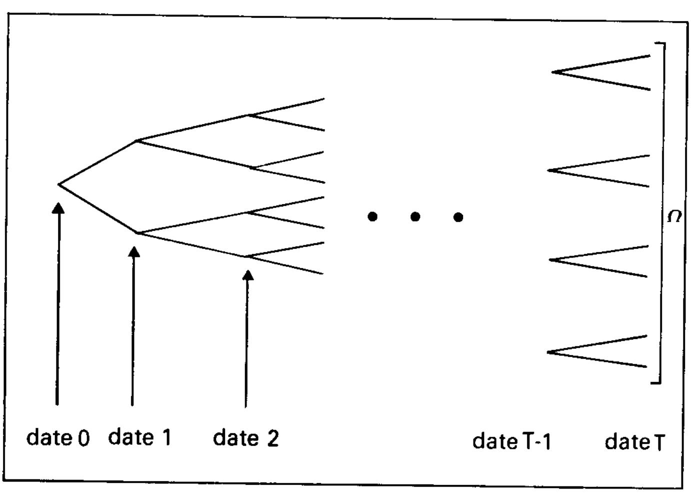
Le modèle économique étudié ici possède la structure suivante :

(i) Ensemble fini d'états du monde, indicé par $\omega \in \Omega$.

(ii) Ensemble fini de dates auxquelles les marchés financiers sont ouverts, indicé par $t = 0, \ldots, T$.

(iii) La structure d'information est décrite par une filtration $(F_t, t = 0, \ldots, T)$, composée d'une suite croissante de σ-algèbres de Ω. F_0 sera ici la σ-algèbre triviale, et F_t la σ-algèbre discrète de Ω : $F_T = \mathscr{P}(\Omega)$.

La structure d'information peut être décrite par un arbre dont chacun des nœuds représente l'information disponible à l'instant considéré :



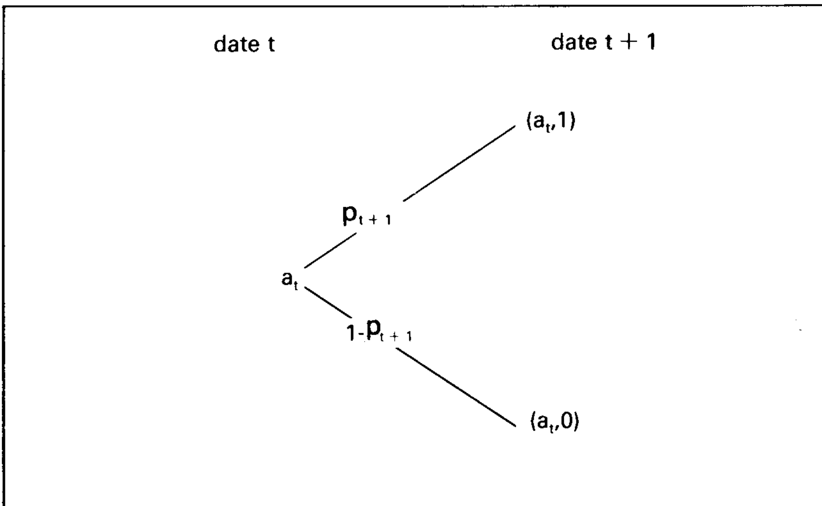
Ω est donc un ensemble à 2^T éléments et on notera a_T, $a_T \in \{0, 1\}^T$, un état du monde à la date T, c'est-à-dire un élément de Ω. La partition F_t de Ω est constituée de 2^t ensembles de Ω, ces ensembles seront notés $a_t \subset \Omega$. a_t

représente donc un événement à la date t et est composé de l'ensemble des états du monde a_T de Ω issus de l'un des nœuds de l'arbre (figuré ci-dessus) à la date t. Un événement a_t sera identifié, par abus, à l'un des sommets de l'arbre à la date t; on aura donc $a_t \in \{0, 1\}^t$.

(iv) L'ensemble Ω est muni d'une loi de probabilité notée P. On peut donc en déduire des lois de probabilité induites P_t aux instants t, que l'on notera également P par abus de langage, définies sur les partitions F_t et vérifiant :

$$P(a_t) = \sum_{a_T \text{ « issus » de } a_t} P(a_T)$$

Les probabilités de « sauts » à chacun des nœuds de l'arbre se déduisent alors de la loi de probabilité P : en considérant a_t, un événement à la date t, on a :



(L'état «haut» issu de a_t est noté $(a_t,1)$ et l'état «bas» est noté $(a_t,0)$)

On a alors :

$$p(a_t) = P[(a_t, 1)/a_t] = \frac{P(a_t, 1)}{P(a_t)}$$

et

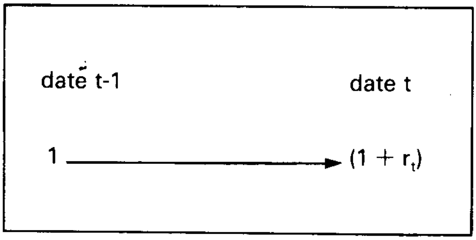
$$1 - p(a_t) = P[(a_t, 0)/a_t].$$

On peut vérifier que ces notations sont cohérentes :

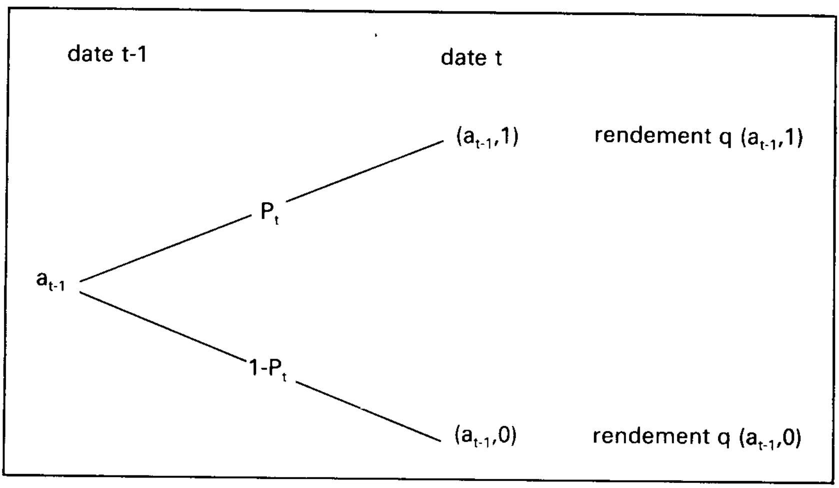
$$P[(a_t, 1)/a_t] + P[(a_t, 0)/a_t] = 1.$$

(v) On suppose qu'il existe un bien de consommation unique (pris comme numéraire) et deux actifs financiers qui peuvent être échangés à chaque date. Les marchés seront supposés parfaits (possibilité de vente à découvert, pas de coûts de transaction...).

Le premier actif est non risqué, et a pour rendement à la date $t : r_t$. r_t représente donc le taux d'intérêt à la période t :



Le second actif est un actif risqué et est défini par ses rendements en chacun des nœuds de l'arbre :



Cet actif est donc défini par $2^T + 2^{T-1} + \ldots + 2 = 2^{T+1} - 2$ nombres [soit les $[q(a_1), \ldots, q(a_T)]$ représentant les rendements de l'actif en chacun des nœuds de l'arbre par rapport au nœud précédent sur l'arbre. On considère ici des rendements globaux, qui peuvent se décomposer en dividendes ou en plus-values suivant les cas.

(vi) La loi de probabilité P, les rendements des actifs financiers sont des données exogènes. On étudie ici le comportement optimal d'un consommateur concurrentiel (qui considère donc le prix des actifs comme des données). Cet agent a une fonction d'utilité à l'instant t notée u_t et une fonction d'héritage à l'instant T notée h. Les fonctions u_t et h sont supposées croissantes et strictement concaves. L'utilité intertemporelle de l'agent est séparable dans le temps. A l'instant t, l'agent a un taux d'actualisation psychologique noté b_t. Sa fonction objectif à l'instant 0 s'écrit donc :

$$E\left[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{u_t(C_t)}{\prod_{j=1}^{t}(1+b_j)} + \frac{h(X_T)}{\prod_{j=1}^{T}(1+b_j)}\right]$$

Remarque : On différencie ici les taux d'actualisation psychologiques b_t des fonctions d'utilité des agents u_t à chaque période afin d'étudier séparément l'effet « préférence pour le présent » de l'agent (cf. partie 4 – Résultats de statique comparative). Le fait que l'utilité de l'agent puisse être modifiée à chaque date représente, par exemple, les changements de l'aversion vis-à-vis du risque de l'agent au cours du temps. Par souci de cohérence, on peut normaliser les fonctions u_t, en posant :

$$u_t(0)=0; \qquad u_t(1)=1, \quad \forall t \in \{0, \ldots, T-1\}$$

Le coefficient b_t représente alors la préférence de l'agent pour le présent, cette notion étant comparable d'un agent à l'autre grâce à cette convention de normalisation.

C_t est la consommation totale de l'agent à l'instant t; X_t est la richesse totale de l'agent à l'instant t; π_t est la somme totale investie en actif risqué par l'agent à la date t. On supposera de plus que l'agent reçoit à la date 0 un héritage noté x ainsi qu'un salaire à toute date $t \geqslant 1$, noté $\alpha_t(a_t)$, avec $\alpha_t(a_t) \geqslant 0 \, \forall a_t \in \{0, 1\}^t$. Cet héritage x est égal à la valeur en numéraire de toutes les dotations initiales de l'agent en actifs et en biens de consommation.

Notations

$$B_t = \prod_{j=1}^{t}(1+b_j); \qquad R_t = \prod_{j=1}^{t}(1+r_j), \quad \forall t = 1, \ldots, T.$$

Contraintes budgétaires

– à l'instant 1 :

$$(A_1)\, X_1(a_1) = (x - C_0)(1+r_1) + \pi(a_1)(q(a_1) - r_1) + \alpha_1(a_1)$$

– à l'instant $t+1$:

$$\begin{aligned}(A_{t+1})\, X_{t+1}(a_{t+1}) = {} & (X_t(a_t) - C(a_t)(1+r_{t+1}) \\ & + \pi(a_t)(q(a_{t+1}) - r_{t+1}) + \alpha_{t+1}(a_{t+1}) \\ & T-1 \geqslant t \geqslant 1.\end{aligned}$$

Remarque : Ces contraintes peuvent s'interpréter comme une définition comptable de la richesse de l'agent à chaque instant.

Hypothèses sur les rendements des actifs

(i) $q(a_{t-1}, 0) < r_t < q(a_{t-1}, 1)$

(hypothèse de non-dominance stochastique du premier ordre)

Justification : Si (i) n'était pas vérifiée, l'un des deux actifs serait dominé stochastiquement par l'autre et aucun investisseur ayant une fonction de Von Neumann-Morgernstern strictement *croissante* ne voudrait en détenir.

(ii) Le rendement espéré de l'actif risqué est strictement supérieur au rendement de l'actif non risqué :
(hypothèse de non-dominance stochastique du second ordre)

$$p(a_{t-1})\,q(a_{t-1}, 1)+(1-p(a_{t-1}))\,q(a_{t-1}, 0)>r_t$$
$$\Leftrightarrow \quad p(a_{t-1})>s(a_{t-1}) \text{ où } p \text{ est la « probabilité de saut »}$$

et par définition :

$$s(a_{t-1})=\frac{r_t-q(a_{t-1}, 0)}{q(a_{t-1}, 1)-q(a_{t-1}, 0)}$$

Justification : Si (ii) n'était pas vérifiée, aucun investisseur ayant une fonction d'utilité *strictement concave* ne voudrait détenir l'un des deux actifs.

2.2. Prix des biens contingents

L'argument d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage signifie que tout portefeuille de rendement strictement positif dans les deux états du monde à l'instant suivant est de prix strictement positif, ce qui s'écrit :

$$\forall (x, y)\in \mathbb{R}^2,$$
$$(\forall s\in\{0, 1\},\ x(1+q(a_t, s))+y(1+r_{t+1})>0)\Rightarrow (x+y)>0))$$

D'après le lemme de Farkas, on en déduit alors l'existence de deux nombres strictement positifs $d_t(a_t, 0)$ et $d_t(a_t, 1)$, qui s'interprètent comme des prix contingents « implicites », vérifiant :

$$\begin{cases} d_t(a_t, 0)(1+r_{t+1})+d_t(a_t, 1)(1+r_{t+1})=1 \\ d_t(a_t, 0)(1+q(a_t, 0))+d_t(a_t, 1)(1+q(a_t, 1))=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} d_t(a_t, 0)&=\frac{1-s(a_t)}{1+r_{t+1}} \\ d_t(a_t, 0)&=\frac{s(a_t)}{1+r_{t+1}} \end{aligned}$$

$s(a_t)$ s'interprète donc comme le prix « non actualisé » à l'instant t du bien contingent qui donne un franc à l'instant $t+1$ si le rendement de l'actif entre t et $t+1$ est maximal.

On en déduit alors le prix à l'instant 0 du bien contingent à l'événement a_t; ce prix étant le produit des prix contingents définis ci-dessus entre deux dates successives en suivant le chemin dans l'arbre permettant de passer de la date 0 à la date t dans l'événement a_t :

$$d_0(a_t)=\prod_{j=0}^{t-1} d_j(a_{j+1})$$

PROPRIÉTÉ : On vérifie aisément la propriété suivante :

$$\forall a_t \in \{0, 1\}^t \, s(a_t)\, q(a_t, 1) + (1 - s(a_t))\, q(a_t, 0) = r_{t+1}.$$

Notations :

$- d_0$ sera noté d;

$-$ a_t^j, pour $j \leqslant t$, représente le chemin suivi dans l'arbre pour passer de la date j dans l'état a_j à la date t dans l'état a_t; on a donc : $a_t^j \in \{0, 1\}^{t-j+1}$.

Remarque : On peut trouver une définition très claire des prix implicites de biens contingents ainsi qu'un exposé détaillé sur la signification de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'article de VARIAN [1987].

2.3. Agrégation des contraintes budgétaires

Par sommation des contraintes budgétaires de (A_1) à (A_T), on obtient :

$$(\bigstar) \qquad \frac{X_T(a_T)}{R_T} + \sum_{j=0}^{T-1} \frac{C_j(a_j)}{R_j} = \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j(a_j) \frac{q(a_{j+1}) - r_{j+1}}{R_{j+1}} + \sum_{j=1}^{T} \frac{\alpha_j(a_j)}{R_j} + x$$

ceci pour tout état du monde $a_T \in \{0, 1\}^T$.

2.4. Programme d'optimisation de l'agent

Le programme d'optimisation de l'agent à l'instant 0 s'écrit :

$$\underset{(c,\, \pi,\, X_T)}{\text{Max}}\, E\left[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{u_t(C_t)}{B_t} + \frac{h(X_T)}{B_T}\right]$$

sous les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{l} (\bigstar) \quad \dfrac{X_T(a_T)}{R_T} + \displaystyle\sum_{j=0}^{T-1} \frac{C_j(a_j)}{R_j} = \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j(a_j) \frac{q(a_{j+1}) - r_{j+1}}{R_{j+1}} + \sum_{j=1}^{T} \frac{\alpha_j(a_j)}{R_j} + x \\ \forall a_T \in \{0, 1\}^T \\ \text{et} \\ X_T(a_T) \geqslant 0, \qquad \forall a_T \in \{0, 1\}^T; \qquad X_0 = x \\ C_t(a_t) \geqslant 0, \qquad \forall a_t \in \{0, 1\}^t \end{array}\right.$$

L'agent doit alors prendre une décision de consommation C_0 et d'investissement en actif risqué π_0.

Remarque : La contrainte $X_T(a_T) \geqslant 0$, $\forall a_T \in \{0, 1\}^T$ s'interprète ici comme une contrainte de non banqueroute à la date terminale.

3 Résolution du modèle

3.1. Intuition de la méthode de résolution

On a à chaque instant un marché complet vis-à-vis des aléas à l'instant suivant (deux actifs, deux états du monde).

Du fait que toutes les transactions sont permises à chaque date, et que l'agent considéré est présent sur tous les marchés à chaque date, il peut réviser ses stratégies d'investissement à chaque instant et donc avoir un comportement identique à celui qu'il aurait s'il existait effectivement un système de marchés intertemporels complet. Cette propriété est la propriété de « *spanning par répétition* ». Elle permet, comme on l'a vu précédemment, de définir des prix « implicites » des biens contingents aux différents états du monde.

On prouve alors que le programme d'optimisation de l'agent est équivalent à un programme d'optimisation, ayant la même fonction objectif et une contrainte linéaire unique obtenue par combinaison linéaire [avec comme coefficients de pondération les $d(a_T)$] des 2^T contraintes précédentes. Cette transformation du programme d'optimisation permet une résolution immédiate de celui-ci par application du théorème de Lagrange.

Par la suite, on considèrera des processus de consommation, progressivement mesurables ($\forall t$, C_t est F_t-mesurable) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$; des processus de portefeuille, progressivement mesurables et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et satisfaisant : X_T est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (contrainte de non banqueroute).

3.2. Transformation du programme d'optimisation [1]

PROPOSITION 1 : Les contraintes budgétaires (★) sont équivalentes aux contraintes suivantes :

$$(\bigstar\bigstar)\begin{cases} \displaystyle\sum_{a_T\in\{0,\,1\}^T} X_T(a_T)\,d(a_T)+\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{a_j\in\{0,\,1\}^j} C_j(a_j)\,d(a_j) \\ \displaystyle\quad = x+\sum_{j=1}^{T}\sum_{a_j\in\{0,\,1\}^j}\alpha_j(a_j)\,d(a_j) \\ X_T\geqslant 0;\qquad C_t\geqslant 0,\quad \forall t=0,\ldots,T-1, \end{cases}$$

le processus de richesse étant donné par :

$$\begin{aligned} X_t(a_t) &= \sum_{a_T^{t+1}\in\{0,\,1\}^{T-t}} X_T(a_t,\, a_T^{t+1})\,d_t(a_T) \\ &\quad +\sum_{j=t}^{T-1}\sum_{a_j^{t+1}\in\{0,\,1\}^{j-t}} (C_j(a_t,\, a_j^{t+1})-\alpha_j(a_t,\, a_j^{t+1}))\,d_t(a_j), \end{aligned}$$

et le processus de portefeuille par :

$$\pi_t(a_t)=\frac{X_{t+1}(a_t,\,1)-X_{t+1}(a_t,\,0)}{q(a_t,\,1)-q(a_t,\,0)}.$$

Notations :

$$I_t=(u_t')^{-1};\qquad J=(h')^{-1}$$

$$\mathscr{H}(k)=\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{a_j\in\{0,\,1\}^j} d(a_j)\,I_j\left[k\,B_j\frac{d(a_j)}{P(a_j)}\right]+\sum_{a_T\in\{0,\,1\}^T} d(a_T)\,J\left[k\,B_T\frac{d(a_T)}{P(a_T)}\right];$$

$K=(\mathscr{H})^{-1}$ (on vérifie aisément que la fonction $\mathscr{H}$ est strictement décroissante au vu des hypothèses faites sur les fonctions d'utilité et d'héritage; elle est donc inversible);

$$x^*=x+\sum_{j=1}^{T}\sum_{a_j\in\{0,\,1\}^j}\alpha_j(a_j)\,d(a_j)$$

---

1. Cette transformation du programme d'optimisation en un programme « statique » est une méthode déjà connue dans la littérature dans le cas d'un modèle en temps continu et a été exploitée par KARATZAS et alii [1986]. Un rapporteur nous a signalé que dans ce même contexte cette méthode a été utilisée dans deux autres papiers :

– COX et HUANG [1987] : « On a variational problem arising in financial economics »;

– COX et HUANG [1987] : « Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process ».

Ce rapporteur a signalé de plus que ce résultat avait été obtenu à l'origine dans un cadre binomial dans un article non publié : COX et LELAND [1982] : « Note on intertemporal investment policies ».

PROPOSITION 2 : On obtient alors les formules explicites suivantes, donnant la consommation C_0 et l'investissement optimal en actif risqué π_0 à la date 0 :

$$(1) \qquad C_0 = I_0 [K(x^*)]$$

$$(2) \qquad \pi_0 = \frac{X_1(1) - X_1(0)}{q(1) - q(0)}$$

où

$$(3) \quad X_1(a_1) = \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{a_j^2 \in \{0,1\}^{j-1}} I_j \left[K(x^*) B_j \frac{d(a_1, a_j^2)}{P(a_1, a_j^2)} \right] d_1(a_1, a_j^2)$$
$$+ \sum_{a_T^2 \in \{0,1\}^{T-1}} J \left[K(x^*) B_T \frac{d(a_1, a_T^2)}{P(a_1, a_T^2)} \right] d_1(a_1, a_T^2)$$
$$- \sum_{j=2}^{T} \sum_{a_j^2 \in \{0,1\}^{j-2}} \alpha_j(a_1, a_j^2) d_1(a_1, a_j^2).$$

Preuve : en annexe.

Interprétation de la formule donnant le processus de richesse optimal :

$X_t(a_t)$ = [(somme des consommations optimales contingentes futures) +(somme des richesses optimales contingentes terminales) − (somme des salaires contingents futurs) (pondérées par les prix des biens contingents)].

4 Résultats de statique comparative

PROPOSITION 3 : (*a*) C_0 est une fonction strictement croissante des salaires contingents $\alpha_t(a_t)(t = 1, \ldots, T)$ de la richesse initiale x ainsi que des taux d'escompte psychologiques b_t.

(*b*) Si l'indice relatif d'aversion vis-à-vis du risque est à chaque date inférieur à 1, alors :

− C_0 est une fonction strictement croissante des prix des biens contingents $d(a_t)$;

− Si les taux de rendements à une date t positive quelconque de tous les actifs augmentent de la même quantité, C_0 diminue.

Démonstration : (*a*) − En fonction de $\alpha_t(a_t)$ et de x : ce résultat découle immédiatement de (1) et de la décroissance de I_0 et de K.

− En fonction de b_t : $\mathscr{H}$ est strictement décroissante en b_t (car les fonctions I_t et J sont strictement décroissantes). Donc, K, inverse de $\mathscr{H}$ est strictement décroissante en b_t et C_0 est strictement croissante en b_t.

(b) On prouve tout d'abord le résultat suivant :

LEMME 4 : Si $\left[-\frac{xu_t''}{u_t'}\right]<1$, alors la fonction $f(x)=x\,\mathrm{I}_t(\lambda x)$, où $\lambda>0$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$

Démonstration : On a ici $\mathrm{I}_t=(u_t')^{-1}$. La fonction u_t' étant strictement décroissante et positive, $f(x)$ a un sens de variation inverse à celui de la fonction

$$g(y)=yu_t'(y)$$

et

$$g'(y)=yu_t''(y)+u_t'(y)>0$$

car par hypothèse

$$\left[-\frac{yu_t''}{t_t'}\right]<1.$$

On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

– C_0 est strictement croissante en fonction des prix des biens contingents à la date 0, $d(a_t)$:

On cherche à trouver le sens de variation de la fonction C_0 en fonction du paramètre $d(a_t)$. Au lieu de prendre pour paramètres les rendements des actifs, on prend donc ici pour paramètres les prix des biens contingents qui suffisent seuls à déterminer la consommation optimale C_0 [ce qui se voit aisément d'après la formule (1) de la proposition 2].

On considère donc la fonction : $k(d(a_t))=\mathrm{K}(x^*)$ et l'on cherche son sens de variation :

– x^* est une fonction strictement croissante de $d(a_t)$, du fait que les salaires $\alpha_j(a_j)$ sont tous positifs;

– la fonction $\mathscr{H}$ est considérée ici comme une fonction de $d(a_t)$ et de k.

On a donc :

$$\begin{aligned}&k(d(a_t))=\mathrm{K}(x^*(d(a_t)))\\ \Leftrightarrow\quad &x^*(d(a_t))=\mathscr{H}(k(d(a_t)),\ d(a_t))\quad \text{(par définition de K)}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}&(x^*)'(d(a_t))=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial k}k'(d(a_t))+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial d(a_t)}\\ \Leftrightarrow\quad &k'(d(a_t))=\left[(x^*)'(d(a_t))-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial d(a_t)}\right]\ \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbb{K}}.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4, on en déduit que $\mathscr{H}$ est une fonction strictement décroissante de $d(a_t)$: $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial d(a_t)} < 0$. On voit aisément, de plus, que $\mathscr{H}$ est une fonction strictement décroissante de k, les fonctions I_j pour $0 \leqslant j \leqslant T$ et J étant strictement décroissantes, d'où :

$k'(d(a_t)) < 0$ et $K(x^*(d(a_t)))$ est strictement décroissante. Sachant que I_0 est strictement décroissante, on en déduit que C_0 est strictement croissante en $d(a_t)$.

— Variation de C_0 en fonction des taux d'intérêt à la date t :

Le prix non actualisé du bien contingent à l'état du monde a_t, soit $s(a_t)$ reste inchangé par une telle transformation. Or $d(a_j)$, pour $j \geqslant t$ est une fonction strictement décroissante des taux d'intérêt à la date t. D'après le lemme 4, on en déduit comme précédemment que C_0 est strictement décroissante en fonction des taux d'intérêt à la date t. □

Pour étudier l'effet des salaires et de la richesse initiale sur la consommation et l'épargne nous allons avoir besoin de deux hypothèses supplémentaires :

Hypothèse (H1) : La loi de probabilité P est telle que les probabilités de sauts induites sont indépendantes de l'état du monde a_t :

$$\forall t = 1, \ldots, T, \qquad \exists p_t \in [0,1] / \forall a_t \in \{0, 1\}^t,$$
$$p(a_t) = p_t.$$

Cette hypothèse signifie que les variables aléatoires représentant les aléas aux différentes dates sont deux à deux indépendantes.

Hypothèse (H2) : Les rendements $q(a_t)$ de l'actif risqué à la date t sont indépendants de l'état du monde à la date $t-1$:

$$\forall t = 1, \ldots, T, \quad \exists q_t^0, q_t^1 \in \mathbb{R}^+ / \forall a_{t-1} \in \{0, 1\}^{t-1},$$
$$q(a_{t-1}, 1) = q_t^1 \qquad \text{et} \qquad q(a_{t-1}, 0) = q_t^0.$$

Remarque : Si l'une de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée, l'état a_t apporte alors de l'information sur les probabilités futures (et donc sur les rendements futurs). Cet effet informationnel peut renverser l'effet total et donc le sens de variation de l'investissement optimal en actif risqué, soit π_0, fonction des salaires $\alpha_t(a_t)$ et de la richesse initiale x.

Proposition 6 : Avec les hypothèses (H1) et (H2) et en supposant de plus que $\left[-\frac{u_t''}{u_t'}\right]$ est strictement décroissante, $\forall t = 0, \ldots, T-1$ et que $\left[-\frac{h''}{h'}\right]$ est strictement décroissante.

Alors π_0 est une fonction strictement croissante des salaires $\alpha_t(a_t)\,(t = 1, \ldots, T)$ et de la richesse initiale x.

Démonstration : On prouve tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 7 : Si $\left[-\frac{u''}{u'}\right]$ est une fonction strictement décroissante, alors la fonction

$$f(x)=(u')^{-1}(x\beta)-(u')^{-1}(x) \text{ où } \beta<1$$

est strictement décroissante.

Démonstration :

$$f'(x)=\frac{\beta}{u''((u')^{-1}(x\beta))}-\frac{1}{u''((u')^{-1}(x))}$$

On pose alors :

$$y_1=(u')^{-1}(x\beta) \qquad \text{et} \qquad y_2=(u')^{-1}(x).$$

Or $\beta<1 \Rightarrow x\beta<x$ et $y_1>y_2$ car $(u')^{-1}$ est strictement décroissante.

Or par hypothèse $\left[-\frac{u''}{u'}\right]$ est strictement décroissante, d'où :

$$\left[-\frac{u''(y_1)}{u'(y_1)}\right]<\left[-\frac{u''(y_2)}{u'(y_2)}\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{u'(y_1)}{u''(y_1)}<\frac{u'(y_2)}{u''(y_2)}$$
$$\Leftrightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}\left[\frac{u'(y_1)}{u''(y_1)}-\frac{u'(y_2)}{u''(y_2)}\right]<0. \quad \square$$

En appliquant le lemme 7, on obtient :

$$\mathrm{I}_t\left[\mathrm{K}(x^*)\,\mathrm{B}_t\frac{d(1,\,a_t^2)}{\mathrm{P}(1,\,a_t^2)}\right]-\mathrm{I}_t\left[\mathrm{K}(x^*)\,\mathrm{B}_t\frac{d(0,\,a_t^2)}{\mathrm{P}(0,\,a_t^2)}\right]$$

est strictement décroissante en fonction de $\alpha_i(a_i)$ et de x, ceci $\forall t=1$, $\forall a_i \in \{0,\,1\}^i$ et $\forall a_t^2 \in \{0,\,1\}^{t-1}$ (car K est strictement décroissante), sachant que

$$x^*=x+\sum_{i=1}^{\mathrm{T}}\ \sum_{a_i\in\{0,\,1\}^i}\alpha_i(a_i)\,d(a_i).$$

On obtient les mêmes résultats de monotonicité pour la fonction :

$$\mathrm{J}\left[\mathrm{K}(x^*)\,\mathrm{B}_t\frac{d(1,\,a_\mathrm{T}^2)}{\mathrm{P}(1,\,a_\mathrm{T}^2)}\right]-\mathrm{J}\left[\mathrm{K}(x^*)\,B_t\frac{d(0,\,a_\mathrm{T}^2)}{\mathrm{P}(0,\,a_T^2)}\right]$$

ceci du fait que :

- $\mathrm{P}(1,\,a_t^2)=\mathrm{P}(1)\,\mathrm{P}(a_t^2)=p_1\,p(a_t^2)$ [hypothèse (H1)]
- $d_1(a_t)=d_1(a_t^2)$ [hypothèse (H2)]

et

$-\frac{d(1)}{p_1} < \frac{d(0)}{1-p_1}$, car le rendement espéré de l'actif risqué est supposé strictement supérieur au rendement de l'actif non risqué $\left[p_1 > s_1 = \frac{r_1 - q_1^0}{q_1^1 - q_1^0}\right]$ (hypothèse $\beta < 1$ du lemme 2).

π_0, comme somme de fonctions positives et strictement décroissantes, est donc strictement décroissante en α_j et en x. □

Ce résultat (proposition 6) peut aussi s'énoncer en disant que sous les hypothèses (H1) et (H2), lorsque l'aversion absolue vis-à-vis du risque du consommateur est décroissante à tout instant t, l'actif risqué n'est pas un bien inférieur. Soit l'investissement total de l'agent en actif risqué est une fonction strictement croissante de sa richesse à l'instant considéré.

Cette propriété est classique et a déjà été obtenue dans un cadre économique plus simple par ARROW [1965] qui étudiait le comportement d'optimisation d'un agent ne vivant qu'une période et ayant une fonction d'héritage nulle.

Remarque : L'hypothèse que le coefficient absolu vis-à-vis du risque est une fonction décroissante est une hypothèse classique dans la littérature. Elle correspond intuitivement à supposer que toute loterie acceptée à un certain niveau de richesse par l'agent, le serait également à tout niveau supérieur de richesse. L'article de DYBVIG et LIPPMAN [1983] prouve l'équivalence de la définition analytique et de celle, intuitive, formulée ci-dessus.

PROPOSITION 8 : Sous les hypothèses de la proposition 6, l'investissement optimal en actif non risqué est une fonction strictement décroissante des salaires futurs de l'agent.

Démonstration : Cette propriété découle immédiatement des propositions 3 et 6, l'investissement optimal en actif non risqué s'écrivant : $x - C_0 - \pi_0$.

5 Modèle d'équilibre général : relations de type ICCAPM (Intertemporal Consumption based Capital Asset Pricing Model)

5.1. Le modèle

Le cadre de ce modèle est le suivant :

– nombre fini de dates de transactions : $t = 0, \ldots, T$;

– m consommateurs agissant sur le marché de fonction d'héritage nulle à la date terminale ($h \equiv 0$) et de fonctions d'utilité u_t^i, $i = 1, \ldots, m$ et

$t=0, \ldots, \mathrm{T}$. Par rapport au modèle précédent, on suppose ici que toute la richesse à l'instant terminal T est consommée. On a donc $X_T = C_T$. De plus, chaque agent a ici une utilité de consommation à la date T : u^i_T, mais n'accorde pas d'utilité à conserver de la richesse après la date $\mathrm{T}(h \equiv 0)$;

– un seul bien de consommation à chaque date que l'on choisit comme numéraire et qui est supposé non stockable;

– à chaque date, il existe au moins N actifs financiers, $N \geqslant 2$, qui peuvent être échangés. Le prix de l'actif j à la date t sera noté S^j_t. Ceux-ci sont caractérisés par une suite de flux financiers, correspondant aux versements de ces actifs aux différentes dates de transactions. Ces flux financiers seront appelés, par commodité, dividendes, soit pour l'actif j : $(D^j_t)_{t=0, \ldots, T}$.

D^j_t étant une variable aléatoire F_t-mesurable où F_t est la tribu à la date t représentant la structure d'information disponible pour tous les agents à la date t (celle-ci étant identique à la structure d'information présentée dans les paragraphes précédents).

A la date t, l'actif j est alors caractérisé par le processus des dividendes versés jusqu'à la date T : $(D^j_{t+1}, \ldots, D^j_T)$.

Chacun des consommateurs $i (i=1, \ldots, m)$ reçoit à la date t et dans l'événement a_t :

– un salaire $\alpha_i(a_t)$;

– une dotation en chacun des actifs j notée $e^j_i(a_t)$.

On peut alors exprimer l'offre totale en bien de consommation, notée $x(a_t)$ (à la date t dans l'événement a_t) :

$$x(a_t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(a_t) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} (D^j_t(a_t)\, e^j_i(a_t))$$

A la date 0, cette offre totale en bien de consommation est notée x.

On supposera ici que les paramètres B^i_t (qui représentent les préférences des agents pour le présent) sont identiques (voir note 1).

$$\forall i=1, \ldots, m; \qquad \forall t=1, \ldots, T$$
$$B^i_t = B_t$$

5.2. Equilibres

La littérature a retenu deux notions différentes d'équilibres :

– *L'équilibre de Radner* : celui-ci est défini par l'égalité de l'offre et de la demande sur tous les marchés d'actifs financiers et sur le marché du bien de consommation.

Dans le cas où l'on est en présence d'un système complet de marchés contingents, on a le concept familier suivant :

– *L'équilibre d'Arrow-Debreu* : celui-ci est défini par l'égalité de l'offre et de la demande sur tous les marchés des biens contingents.

La partie suivante s'intéresse à la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'à l'équilibre de Radner on ait implicitement un système complet de marchés contingents. En supposant ces conditions réalisées, on voit alors que tout équilibre de Radner est aussi un équilibre d'Arrow-Debreu. L'équilibre « naturel » dans le cadre économique où l'on se place ici est l'équilibre de Radner. Or, on obtient par la suite une caractérisation de l'équilibre d'Arrow-Debreu. Celle-ci peut donc s'interpréter comme des conditions nécessaires que doit satisfaire l'équilibre de Radner, si celui-ci existe.

5.3. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'à l'équilibre de Radner on ait un système complet de marchés contingents

On recherche des conditions nécessaires et suffisantes sur les caractéristiques de l'économie spécifiée ci-dessus pour que les actifs financiers (caractérisés par leurs structures de dividendes) génèrent un système de marchés complets intertemporels.

Ces conditions se déduisent aisément par un raisonnement récursif de la date $T-1$ à la date 0 :

– Supposons que l'on se trouve à la date $T-1$ dans l'état du monde a_{T-1}.

Une condition nécessaire et suffisante pour que les actifs génèrent un système complet de marchés contingents vis-à-vis des aléas susceptibles de l'affecter à la date T, est que, pour deux actifs au moins (notés j' et j'') la matrice des rendements soit inversible.

En notant ρ_T^j le rendement net aléatoire à la date T de l'actif j, on a :

$$\rho_T^j = \frac{D_T^j}{S_{T-1}^j} - 1.$$

Dire que la matrice

$$[1 + \rho_T^j(a_{T-1}, u_T)]_{j=j',\ j'',\ u_T=0,\ 1}$$

est inversible est alors équivalent au fait que la matrice des dividendes à la date T des actifs j' et j'' soit inversible.

Sous l'hypothèse que pour deux actifs financiers au moins, la matrice des dividendes à la date T est inversible, l'économie considérée est donc équivalente à une économie de type Arrow-Debreu classique avec un système complet de marchés contingents.

Les contraintes budgétaires de chacun des agents se réduisent alors à une contrainte budgétaire unique où interviennent les prix à la date $T-1$ des biens contingents à la date T.

On note $d_{T-1}(a_{T-1}, a_T^{T-1})$ le prix d'équilibre à la date $T-1$ du bien contingent (a_{T-1}, a_T^{T-1}).

On a alors pour tout actif j, en utilisant le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$S^j_{T-1}(a_{T-1}) = \sum_{a_T^{T-1} \in \{0,1\}} D^j_T(a_{T-1}, a_T^{T-1})\, d_{T-1}(a_{T-1}, a_T^{T-1})$$

– Supposons à présent que l'on se trouve à la date T−2 dans l'état du monde a_{T-2}.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les actifs génèrent un système complet de marchés contingents vis-à-vis de la date terminale T sont les suivantes :

– la matrice des rendements bruts des actifs à la date T−1 est de rang 2 (ou encore, pour deux actifs, la matrice des rendements bruts à T−1 est inversible);

– les matrices des rendements bruts des actifs à la date T (pour tous les aléas possibles à la date T−1, a_{T-1}^{T-2}, connaissant l'état du monde a_{T-2}) sont inversibles.

Or, on a ici :

$$\rho^j_{T-1} = \frac{D^j_{T-1} + S^j_{T-1}}{S^j_{T-2}} - 1$$

avec

$$S^j_{T-1}(a_{T-1}) = \sum_{a_T^{T-1} \in \{0,\, 1\}} D^j_T(a_{T-1}, a_T^{T-1})\, d_{T-1}(a_{T-1}, a_T^{T-1})$$

Ces conditions sont donc équivalentes aux conditions suivantes :

1. Les matrices des dividendes des actifs à la date T connaissant a_{T-2} et pour tout aléa a_{T-1}^{T-2} à la date T−1 sont de rang 2.

2. La matrice

$$((D^j_{T-1}(a_{T-1}) + \sum_{a_T^{T-1} \in \{0,\, 1\}} D^j_T(a_{T-1}, a_T^{T-1})\, d_{T-1}(a_{T-1}, a_T^{T-1}))$$

pour $a_{T-1}^{T-2} \in \{0,\ 1\}$ et j variant est de rang 2.

Ce raisonnement se poursuit aisément par une récurrence rétrograde, et permet de trouver des *conditions nécessaires et suffisantes pour que les actifs financiers génèrent à la date* 0 *un système complet de biens contingents à la date T :*

(C_t) $\quad \forall t = 0, \ldots, T, \qquad \forall a_{t-1} \in \{0,\ 1\}^{t-1}$

les matrices

$$\left[D^j_t + \sum_{h=t+1}^{T} \sum_{a_h^{t+1} \in \{0,\, 1\}^{h-t}} D^j_h(a_t, a_h^{t+1})\, d_t\,(a_t, a_h^{t+1}) \right]_{(a_t^{t-1} \in \{0,\ 1\};\ j)} \quad \text{sont de rang 2.}$$

Les prix contingents $d_t(a_t, a_h^{t+1})$ sont ici obtenus par une récurrence rétrograde comme décrit précédemment.

5.4. Prix d'équilibre des actifs financiers

On suppose ici que les conditions (C_t) sont réalisées : l'économie considérée est donc équivalente à une économie de type Arrow-Debreu classique avec un système complet de marchés contingents.

D'après le théorème d'Arrow-Debreu (nombre fini d'agents, nombre fini de biens), on en déduit l'existence d'un équilibre général dans cette économie d'échange. De plus, cet équilibre est alors Pareto-optimal. Du fait que l'on se trouve dans une économie convexe avec des fonctions d'utilité séparables, tout optimum de Pareto peut être représenté par un agent représentatif dont les fonctions d'utilité aux dates $t=0, \ldots, T$ seront notées $\bar{u}_t$, telles que :

$$\bar{u}_t(C_t) = \sup_{\sum_{i=1}^{m} C_t^i \leq C_t} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_t^i(C_t^i), \qquad \forall t=0, \ldots, T.$$

Grâce à ces fonctions d'utilité d'un agent représentatif, on peut alors calculer les prix des biens contingents en utilisant la résolution du programme d'optimisation de la première partie de ce papier (démonstration de la proposition 2) :

Calcul de $d(a_t)$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \bar{u}_0'(C_0) = k \\ \bar{u}_t'(C_t(a_t)) = k\, B_t \dfrac{d(a_t)}{P(a_t)} \\ \forall t=1, \ldots, T \end{cases}$$

d'où

$$d(a_t) = \frac{\bar{u}_t'(C_t(a_t))}{B_t \bar{u}_0'(C_0)} P(a_t)$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent (l'agent représentatif consomme toute la richesse de l'économie à a_t)

$$\begin{cases} C_t(a_t) = x(a_t), \qquad \forall a_t \in \{0, 1\}^t \\ C_0 = x \end{cases}$$

d'où :

$$d(a_t) = \frac{\bar{u}_t'(x(a_t))}{B_t \bar{u}_0'(x)} P(a_t)$$

D'autre part, dans une telle économie avec un système de marchés complets, d'après le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage, on peut valoriser tout actif j à partir de ces prix de biens contingents :

$$S_0^j = \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in \{0,1\}^t} D_t^j(a_t)\, d(a_t)$$

On en déduit alors une équation de valorisation des actifs à la date 0 :

$$S_0^j = \sum_{t=1}^{T} E\left[D_t^j(a_t) \frac{\bar{u}_t'(x(a_t))}{B_t \bar{u}_0'(x)} \right]$$

Cette équation montre que le prix actuel (à la date 0) d'un actif financier est égal à la somme des espérances de ses dividendes futurs actualisés par les taux d'escompte psychologiques et par les taux marginaux de substitution de l'agent représentatif entre ses consommations futures et sa consommation actuelle.

Lucas [1978] a trouvé une relation similaire dans le cadre d'une économie d'échange et de production où les actifs distribuent des dividendes suivant un processus de Markov et où l'équilibre recherché est un équilibre en anticipations rationnelles. On retrouve de même, dans l'article de Duffie-Zame [1987], une équation de valorisation des actifs à l'équilibre en fonction de leurs dividendes futurs qui n'intègre pas ici de coefficient d'actualisation par les taux marginaux de substitution de consommation du fait que les dividendes sont supposés être payés en numéraire.

5.5. Relations entre les rendements moyens des actifs financiers (relations de type ICCAPM)

On supposera dans un premier temps qu'il existe un actif non risqué ($j=1$) (par exemple une obligation court-terme distribuant un dividende 1 en période suivante, et 0 après) et l'on notera r son rendement en période 1.

D'autre part, on supposera que les conditions (C_t) sont réalisées.

On a alors :

Pour tout actif j

$$\rho_j = \frac{D_1^j + S_1^j - S_0^j}{S_0^j} = \frac{D_1^j + S_1^j}{S_0^j} - 1$$

avec

$$S_0^j = \sum_{t=1}^{T} E\left[D_t^j \frac{\bar{u}_t'(x(a_t))}{B_t \bar{u}_0'(x)} \right]$$

et

$$S_1^j = \sum_{t=1}^{T} E\left[D_t^j \frac{B_1 \bar{u}_t'(x(a_t))}{B_t \bar{u}_1'(x(a_1))} \middle| a_1 \right] \cdot$$

On a donc :

$$S_0^j = E\left[\frac{\bar{u}_1'(x(a_1))}{(1+b_1)\bar{u}_0'(x)}(D_1^j + S_1^j)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 1+\rho_j = \frac{D_1^j + S_1^j}{E[(\bar{u}_1'(x(a_1))/((1+b_1)\bar{u}_0'(x)))(D_1^j + S_1^j)]}$$

et

$$1+r = \frac{1}{E[\bar{u}_1'(x(a_1))/(1+b_1)\bar{u}_0'(x)]}$$

On a donc :

$$\frac{1}{1+E(\rho_j)} = E\left[\frac{\bar{u}_1'(x(a_1))}{(1+b_1)\bar{u}_0'(x)}\right] + \frac{\mathrm{Cov}[\bar{u}_1'(x(a_1))/((1+b_1)\bar{u}_0'(x)),\ D_1^j + S_1^j]}{E[D_1^j + S_1^j]}$$

$$= \frac{1}{1+r} + \frac{\mathrm{Cov}[\bar{u}_1'(x(a_1))/((1+b_1)\bar{u}_0'(x)),\ 1+\rho_j]}{1+E(\rho_j)}$$

$$\Rightarrow \quad E(\rho_j) = r - \mathrm{Cov}\left[\frac{\bar{u}_1'(x(a_1))}{E(\bar{u}_1'(x(a_j))}, \rho_j\right]$$

L'espérance de rendement d'un actif j est donc égale au rendement de l'actif non risqué moins la covariance du rendement de l'actif j avec l'utilité marginale normalisée de la consommation totale.

Cette formule est analogue à la formulation classique du CCAPM en temps continu. En notant M un portefeuille particulier dont le rendement moyen est différent du taux sans risque $r\,(E(\rho_M) \neq r)$, on a alors :

$$E(\rho_M) - r = -\mathrm{Cov}\left[\frac{\bar{u}_1'(x(a_1))}{E(\bar{u}_1'(x(a_1))}, \rho_M\right]$$

et par division :

$$E(\rho_j) - r = \frac{\beta_{jc}}{\beta_{Mc}}(E(\rho_M) - r)$$

où β_{jc} est le « bêta » de consommation de l'actif j et est défini par :

$$\beta_{jc} = \frac{\mathrm{Cov}(\bar{u}_1'(x(a_1)),\ \rho_j)}{\mathrm{Var}(\bar{u}_1'(x(a_1)))}$$

(même définition pour β_{Mc}).

Remarque : Si l'on suppose qu'il existe un portefeuille, que l'on note C, parfaitement corrélé avec la consommation marginale agrégée en période suivante (soit $\beta_{cc} = 1$), on a alors la relation suivante :

$$E(\rho_j) - r = \beta_{jc}(E(\rho_c) - r)$$

Le cas où il n'existe pas d'actif non risqué est traité en note 2.

Ces relations de type ICCAPM ont été introduites par BREEDEN [1979] dans un modèle en temps continu et sous des hypothèses de diffusion markovienne de l'information.

DUFFIE et ZAME [1987] ont alors généralisé ces résultats en prouvant qu'ils pouvaient s'obtenir sous des hypothèses plus faibles que celles de Breeden.

Dans le cas de processus discrets étudiés dans cet article, on retrouve donc une formulation analogue des relations ICCAPM développées par Breeden, puis généralisées par Duffie et Zame.

6 Conclusion

Il est possible de construire un modèle analogue au précédent en horizon infini. Comme précédemment, on a ici deux actifs financiers à chaque date et une structure d'information représentée par un arbre dont chacun des nœuds donne naissance à deux nouvelles branches. On impose une contrainte de non-banqueroute à l'infini pour l'agent considéré. On supposera de plus que le revenu total actualisé à la date 0 de l'agent est borné. Sous des hypothèses supplémentaires, on trouve alors des expressions explicites pour la consommation optimale à la date 0 ainsi que pour le portefeuille optimal.

Ces résultats se généralisent également au cas d'un nombre fini d'actifs financiers d, la structure d'information étant alors représentée par un arbre dont chacun des nœuds se divise en d nouvelles branches. Ces actifs génèrent alors, comme précédemment, un système complet de marchés intertemporels. On obtient de même des formulations explicites des comportements des agents agissant sur ces marchés. Les résultats de statique comparative analogues à ceux obtenus dans le cas précédent se retrouvent alors sur les « fonds communs de placement » sous-jacents à ces marchés, soit sur les portefeuilles les plus corrélés avec chacun des aléas.

On peut également exploiter l'idée de Cox, Ross, Rubinstein pour la valorisation des options, le système d'actifs financiers étudié étant générateur d'un système de marchés complets intertemporel. L'approche adoptée dans ce papier permet de généraliser leurs résultats au cas où la structure informationnelle n'est plus simplement représentée par un processus multinomial à accroissements indépendants mais par un processus quelconque.

1. Démonstration de la proposition 1

On prouve ici l'équivalence des deux systèmes de contraintes suivants :

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \dfrac{X_T(a_T)}{R_T} + \displaystyle\sum_{j=0}^{T-1} \dfrac{C_j(a_j)}{R_j} = \sum_{j=0}^{T-1} \pi_j(a_j) \dfrac{q(a_{j+1}) - r_{j+1}}{R_{j+1}} + x^* \\ X_T(a_T) \geqslant 0 \\ C_t(a_t) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(\mathrm{C}^*) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{{}_T \in \{0,1\}^T} X_T(a_T)\, d(a_T) + \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{a_j \in \{0,1\}^j} C_j(a_j)\, d(a_j) = x^* \\ X_T \geqslant 0; \qquad C_t \geqslant 0 \end{cases}$$

Nous commencerons par établir un lemme qui sera utilisé tout au long de la démonstration :

LEMME 9 : $\forall j \in \{0, \ldots, T-1\}$,

$$\sum_{a_T^{t+1} \in \{0,1\}^{T-j}} d_t(a_t, a_T^{t+1}) = \frac{R_t}{R_T}.$$

Ce résultat s'obtient par récurrence rétrograde d'après les définitions des prix des biens contingents données en 2.2.

Première étape : Pour $(\pi_t, C_t)_{t=0, \ldots, T-1}$ et X_T satisfaisant le système de contraintes (C), on prouve que $(C_t)_{t=0, \ldots, T-1}$ et (X_T) satisfont alors le système de contraintes (C*).

Par combinaison linéaire pondérée par les coefficients $d(a_t)$, on obtient :

$$\sum_{a_T \in \{0,1\}^T} X_T(a_T)\, d(a_T) + \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{a_j \in \{0,1\}^j} C_j(a_j)\, d(a_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{a_j \in \{0,1\}^j} \alpha(a_j)\, d(a_j)$$

$$+ \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{a_{j+1} \in \{0,1\}^{j+1}} \pi_j(a_j)\, d(a_{j+1}) (q(a_{j+1}) - r_{j+1})$$

Or on a :

$$\sum_{a_{j+1}\in\{0,1\}^{j+1}} \pi_j(a_j)\, d(a_{j+1})(q(a_{j+1})-r_{j+1})$$
$$= \sum_{a_j\in\{0,1\}^j} \pi_j(a_j)\, \frac{d(a_j)}{1+r_{j+1}}[s(a_j)\, q(a_j, 1)$$
$$+(1-s(a_j))\, q(a_j, 0)-r_{j+1}]=0$$

par définition même de $s(a_j)$.

On en déduit donc que $(C_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ et (X_T) satisfont le système de contraintes (C^*).

Deuxième étape : Considérons $(C_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ et (X_T) satisfaisant (C^*); soit un processus (C_t), progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et une variable aléatoire X_T, F_T-mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$(\bigstar) \qquad \sum_{a_T\in\{0,1\}^T} X_T(a_T)\, d(a_T)+\sum_{j=0}^{T-1}\ \sum_{a_j\in\{0,1\}^j} C_j(a_j)\, d(a_j)=x^*.$$

On cherche alors un processus de portefeuille $(\pi_t)_{t=0,\ldots,T-1}$ satisfaisant :

$$X_T(a_T)=R_T\left[x^*+\sum_{j=0}^{T-1}\pi_j(a_j)\frac{q(a_{j+1})-r_{j+1}}{R_{j+1}}-\sum_{j=0}^{T-1}\frac{C_j(a_j)}{R_j}\right]$$

On recherche donc 2^T-1 nombres (les $\pi_j(a_j))_{j=0,\ldots,T-1}$, avec par convention $\pi_0(a_0)=\pi_0$ vérifiant les 2^T équations ci-dessus.

Ces équations ne sont pas indépendantes d'après la condition ($\bigstar$) qui s'interprète comme une combinaison linéaire de ces équations.

La résolution de ce système est équivalente à la résolution d'un système de 2^T-1 inconnues à 2^T-1 équations.

Il suffit donc d'établir l'unicité d'une solution pour en déduire également l'existence :
Pour a_{T-1} fixé, on obtient deux équations qui s'écrivent :

$$\sum_{j=0}^{T-2}\pi_j(a_j)\frac{q(a_{j+1})-r_{j+1}}{R_{j+1}}+\pi_{T-1}(a_{T-1})\frac{q(a_{T-1},1)-r_T}{R_T}$$
$$=\sum_{j=0}^{T-1}\frac{C_j(a_j)}{R_j}+\frac{X_T(a_{T-1},1)}{R_T}$$
$$\sum_{j=0}^{T-2}\pi_j(a_j)\frac{q(a_{j+1})-r_{j+1}}{R_{j+1}}+\pi_{T-1}(a_{T-1})\frac{q(a_{T-1},0)-r_T}{R_T}$$
$$=\sum_{j=0}^{T-1}\frac{C_j(a_j)}{R_j}+\frac{X_T(a_{T-1},0)}{R_T}.$$

Par différence entre ces équations, on a alors :

$$\pi_{T-1}(a_{T-1})=\frac{X_T(a_{T-1},1)-X_T(a_{T-1},0)}{q(a_{T-1},1)-q(a_{T-1},0)}$$

On procède de la même façon pour trouver le terme $\pi_{T-2}(a_{T-2})$ (par différence entre les deux équations correspondant aux termes $(a_{T-2}, 0, 0)$ et $(a_{T-1}, 1, 0)$ connaissant alors les valeurs des $\pi_{T-1}(a_{T-1})$) et ainsi de suite . . .

Ce procédé de récurrence rétrograde permet donc d'établir l'unicité des $(\pi_j(a_j))_{j=0,\ldots,T-1}$ et par suite leur existence.

Considérons le processus de richesse $(X_t)_{t-1,\ldots,T}$ associé au couple (π, C), soit le processus défini par :

$$X_t(a_t) = R_t\left[x + \sum_{j=1}^{t} \sum_{a_j \in \{0,1\}^j} \alpha_j(a_j)\, d(a_j) + \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j(a_j) \frac{q(a_{j+1}) - r_{j+1}}{R_{j+1}} - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{C_j(a_j)}{Rj}\right]$$

Par raisonnement analogue au précédent, on trouve $\pi_j(a_j)$ à partir des $X_{j+1}(a_{j+1})$:

$$\pi_j(a_j) = \frac{X_{j+1}(a_j, 1) - X_{j+1}(a_j, 0)}{q(a_j, 1) - q(a_j, 0)}$$

On prouve que le processus $X_t(a_t)$ peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X_t(a_t) = & \sum_{a_T^{t+1} \in \{0,1\}^{T-t}} X_T(a_t, a_T^{t+1})\, d_t(a_t, a_T^{t+1}) \\ & + \sum_{j=t}^{T-1} \sum_{a_j^{t+1} \in \{0,1\}^{j-t}} C_j(a_t, a_j^{t+1})\, d_t(a_t, a_j^{t+1}) \\ & - \sum_{j=t+1}^{T} \sum_{a_j^{t+1} \in \{0,1\}^{j-t}} \alpha_j(a_t, a_j^{t+1})\, d_t(a_t, a_j^{t+1}) \\ = & (2) \end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité entre $X_t(a_t)$ et l'expression (2) en utilisant l'expression de $X_T(a_T)$ du système de contraintes (C) dans (2) et en utilisant ensuite le lemme du début de la démonstration.

2. Démonstration de la proposition 2

On suppose que les contraintes de positivité portant sur les variables aléatoires X_T et C_t pour $t=0, \ldots, T-1$ ne sont pas saturées à l'optimum (ce que l'on vérifie *ex post* sur les formules explicites).

Le programme d'optimisation de l'agent se résout alors en appliquant le théorème de Lagrange :
On définit le lagrangien associé :

$$\mathscr{L} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{a_t \in \{0,1\}^t} \frac{u_t(C_t(a_t))\,P(a_t)}{B_t} + \sum_{a_T \in \{0,1\}^T} \frac{h(X_T(a_T))\,P(a_T)}{B_T}$$
$$+k\left[x^* - \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{a_t \in \{0,1\}^t} C_t(a_t)\,d(a_t) - \sum_{a_T \in \{0,1\}^T} X_T(a_T)\,d(a_T)\right]$$

Les conditions nécessaires du premier ordre s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial C_t(a_t)} = 0, & \forall t = 0, \ldots, T-1; \quad \forall a_t \in \{0, 1\}^t \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial X_T(a_T)} = 0, & \forall a_T \in \{0, 1\}^T \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_t'(C_t(a_t)) = k\,B_t \dfrac{d(a_t)}{P(a_t)} \\ h'(X_T(a_T)) = k\,B_T \dfrac{d(a_T)}{P(a_T)} \end{cases}$$

k étant solution de l'équation :

$$x^* = \sum_{a_T \in \{0,1\}^T} J\left[k\,B_T \frac{d(a_T)}{P(a_T)}\right] d(a_T)$$
$$+ \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{a_t \in \{0,1\}^t} d(a_t)\,I_t\left[k\,B_t \frac{d(a_t)}{P(a_t)}\right]$$

$\mathscr{H}$ étant strictement décroissante, on trouve une unique solution :

$$k = K(x^*) \text{ où } K = (\mathscr{H})^{-1}$$

La consommation optimale à la date zéro, C_0, est donc donnée par :

$$C_0 = I_0(K(x^*)) \quad \text{[équation (1)]}$$

Les équations (2) et (3) s'obtiennent de suite grâce à la résolution obtenue dans la proposition 1.

3. Notes

Note 1

Cette hypothèse, qui signifie que les préférences pour le présent de chacun des agents sont identiques, n'est pas indispensable à l'analyse.

Dans le cas où elle n'est pas faite, on s'aperçoit alors que les agents les plus impatients ont moins de poids dans l'économie.

En effet, quand l'économie considérée est équivalente à un système complet de marchés contingents, on connaît alors l'existence d'un agent représentatif (voir 5.4) dont la fonction objectif s'écrit dans ce cas :

$$V = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{E(u_t^i(C_t^i))}{B_t^i} \right]$$

On note ρ_i la variable définie par : $B_t^i = \rho_i^{-t}$.

On a alors :

$$V = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{t=0}^{T} \rho_i^t E(u_t^i(C_t^i))$$
$$= \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \rho_i^t E(u_t^i(C_t^i)).$$

D'où :

$$\alpha_{i,j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \left[\frac{\rho_i}{\rho_j} \right]^t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{si} \quad \rho_i < \rho_j$$

On obtient donc que le poids relatif d'un premier agent par rapport à un second dans l'économie est d'autant plus grand que le premier agent est moins impatient que le second.

Note 2

Cas où il n'existe pas d'actif non risqué.

On considère alors un portefeuille z (que l'on appellera zéro-bêta) dont le rendement est décorrélé avec la consommation marginale agrégée, soit :

$$z \in \{ \bar{u}_1' (\alpha(a_1)) \}^{\perp},$$

ce qui signifie encore

$$(D_1^z(a_1) + S_1^z(a_1)) \in \{ \bar{u}_1' (\alpha(a_1)) \}^{\perp}$$

On a alors :

$$1 + E(\rho_z) = \frac{1}{E[\bar{u}_1' ((\alpha(a_1))/(1+b_1)\bar{u}_0'(x))]}$$

Soit pour tout portefeuille M tel que :

$E(\rho_M) \neq E(\rho_z)$, on a, pour tout actif j :

$$E(\rho_j) - E(\rho_z) = \frac{\beta_{jc}}{\beta_{Mc}} (E(\rho_M) - E(\rho_z)).$$

• Références bibliographiques

ARROW (1965). — « Aspects of the Theory of Risk Bearing », Helsinki.

BLACK-SCHOLES (1973). — « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 3, p. 637-654.

BREEDEN (1979). — « An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities », *Journal of Financial Economics*, 7, n° 3.

COX, INGERSOLL and ROSS (1985). — « An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices », *Econometrica*, 53, n° 2.

COX, ROSS and RUBINSTEIN (1979). — « Option Pricing: A Simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, 3, p. 125-144.

DUFFIE and ZAME (1987). — « The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model », Research Paper n° 922, Stanford IMSSS.

DYBVIG and LIPPMAN (1983). — « An Alternative Caracterization of Decreasing Absolute Risk Aversion », *Econometrica.*

HUANG, C. F. (1987). — « An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information », *Econometrica*, 55, n° 1.

KARATZAS, LEMOCZKI, SETHI and SHREVE (1986). — « Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem », *Math. of Operations Research*, 11, n° 2, p. 261-294.

LUCAS (1978). — « Asset Prices in an Exchange Economy », *Econometrica*, 46, n° 6, p. 1429-1444.

MERTON (1973). — « An Intertemporal Capital Asset Pricing Model », *Econometrica*, 41, p. 867-888.

MERTON (1969). — « Lifetime Portfolio under Uncertainty: The Continuous Time Case », *Review of Economics and Statistics*, 51, p. 247-257.

RUBINSTEIN (1974). — « An Aggregation Theorem for Securities Markets », *Financial Economics*, 1, n° 3 (September), p. 201-224.

SAMUELSON (1969). — « Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming », *Review of Economics Studies*, 51, p. 239-246.

VARIAN (1987). — « The Arbitrage Principle in Financial Economics », *Economic Perspectives*, 1, p. 55-72, traduit en français dans *Annales d'Économie et de Statistique*, 1988, n° 10.