ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 12 — 1988

Accès asymétrique des agents économiques à des marchés incomplets

Yves YOUNÈS *

RÉSUMÉ. – Quand les agents ont un accès asymétrique à une structure des marchés par ailleurs incomplète, l'utilisation de l'approche habituelle ne permet pas de déduire des hypothèses classiques, les propriétés requises de la demande aux limites ainsi que celles de la matrice de Slutzky. Les méthodes développées dans cette étude permettent de résoudre ces difficultés, dans le cas où la structure des marchés est supposée régulière.

Asymmetric Participation of Economic Agents to Market Structures

ABSTRACT. – When economic agents have an asymmetric access to an incomplete market structure, the usual methods not allow to deduce from classical assumptions the required properties of the demand functions near the boundary and that of the Slutzky matrix. With the methods which are presented in this study, it is possible to solve these problems, when the market structure is assumed to be regular.

---

* Y. YOUNÈS : CEPREMAP, 142, rue du Chevaleret, 75013 Paris. Je remercie D. Cass pour des discussions éclairantes. Je remercie aussi C. Le Van pour ses critiques très précieuses. Je remercie finalement un lecteur et un éditeur qui m'ont suggéré de nombreuses améliorations.

1 Introduction

Les démonstrations générales d'existence d'un équilibre concurrentiel supposent que deux conditions fondamentales soient satisfaites, à savoir la continuité de la fonction de demande et le comportement aux limites de cette même fonction (quand tous les biens sont désirés, la norme de la demande tend vers l'infini quand le prix de l'un des biens tend vers zéro). Ces deux conditions posent problème quand on suppose que la structure des marchés est incomplète.

D'une part, après la contribution fondamentale de R. RADNER [1972], O. HART [1975] a construit un exemple simple d'inexistence d'un équilibre concurrentiel, inexistence due à une discontinuité de la fonction de demande. En effet, il peut arriver que quand le vecteur prix varie, les sous-espaces vectoriels (non plus nécessairement des hyperplans) dans lesquels chaque consommateur choisit son vecteur d'échange net n'ont pas tous la même dimension.

Pour surmonter cette première difficulté, certains auteurs ont restreint l'analyse au cas des structures de marchés pour lesquelles, quel que soit le vecteur des prix, ces sous-espaces ont la même dimension. On dira que ces structures de marché sont régulières. C'est l'approche retenue par J. WERNER [1985], D. CASS [1984] et D. DUFFIE [1985] quand les titres sont financiers. Dans le cas où les titres donnent des rendements évalués en biens, voir S. CHAE [1985], par exemple.

D'autres auteurs ont au contraire cherché à affronter directement la difficulté des diminutions de dimension des espaces vectoriels pour un « petit » ensemble de vecteurs de prix. Dans le cas où les espaces vectoriels sont presque toujours des hyperplans, il est possible d'utiliser la notion classique d'équilibre concurrentiel walrasien pour obtenir l'existence générique. C'est la conclusion que l'on peut tirer des travaux de D. MAC MANUS [1984], R. REPULLO [1983] et M. MAGILL et W. SHAFER [1985]. Cependant, on peut dire que c'est D. DUFFIE et W. SHAFER [1985] qui, utilisant une notion de pseudo équilibre — qui est génériquement un équilibre — et la notion de variété de tous les sous-espaces d'une dimension donnée de R^r, ont réglé la première difficulté due aux variations de la dimension des sous-espaces vectoriels. (Voir aussi à ce sujet H. POLEMARCHAKIS [1986]).

La seconde difficulté tient essentiellement au fait qu'un vecteur de prix ne peut caractériser de manière univoque qu'un hyperplan et non pas un sous-espace de dimension inférieure à celle d'un hyperplan. La principale conséquence en est que la propriété habituelle du comportement aux limites de la demande, quand tous les biens sont désirés, ne tient plus. Jusqu'à présent, l'approche différentielle au problème des marchés incomplets était basée sur une méthode due à David CASS [1985] qui consiste à raisonner comme si l'un des agents avait accès à une structure complète des marchés, c'est-à-dire comme s'il choisissait son vecteur des échanges nets dans un hyperplan. Remarquons que cette méthode, pour laquelle la notion de vecteur de prix est encore utilisée, ne permet l'analyse du nombre d'équilibres que si l'on distingue entre allocation et prix car le même sous-espace vectoriel peut être contenu dans une infinité d'hyperplans. De ce point de vue, il a été montré que quand les titres sont financiers, l'ensemble des allocations associées à une même économie a, en général, la puissance du continu (Y. BALASKO et D. CASS [1986], J. GEANAKOPLOS et A. MAS COLELL [1985] et H. POLEMARCHAKIS [1986]). Au contraire, quand les titres sont réels, l'ensemble des allocations associées à une même économie est, en général, fini. Cependant, quand les agents ont des accès différents aux divers marchés, la méthode de D. Cass ne peut plus être utilisée, que la structure de marché soit régulière ou non.

L'objectif de ce papier est d'appliquer, au cas de la participation différenciée selon les agents, les méthodes d'analyse développées dans Y. YOUNÈS [1986] et qui permettent d'une part de raisonner dans un cadre plus général que celui du modèle canonique avec marchés au comptant et marchés des titres et d'autre part de mener l'analyse sans recours à la méthode de D. Cass. En quelques mots, la notion de vecteur de prix des biens doit être remplacée ou bien par celle de rapport d'échange entre paniers de biens ou bien par celle de système de prix des biens (plusieurs vecteurs de prix des biens). Dans le cas où la structure des marchés est régulière, il est possible de se passer de la notion de système de prix des biens-dont l'utilisation s'impose quand il y a des diminutions de dimension des espaces vectoriels – et de raisonner exclusivement à l'aide des prix des paniers de biens. Le comportement de la demande aux limites et les propriétés usuelles de la matrice de Slutzky s'obtiennent alors de manière très simple.

C'est l'optique que nous adopterons dans ce travail car nous supposerons que la structure de marché générale est régulière. Dans cette étude, il sera admis que tous les biens sont strictement désirés. Cependant, il est possible, en transposant les raisonnements présentés dans Y. YOUNÈS [1986] pour le cas de la participation symétrique, de ramener le modèle où il existe aussi des unités de compte ou des monnaies internes au cas où tous les biens sont désirés. Signalons que le modèle avec titres financiers, participation asymétrique et structure de marché régulière est étudié indépendamment par Y. BALASKO, D. CASS et P. SICONOLFI [1987] avec des instruments développés dans Y. BALASKO et D. CASS [1985].

Avant d'indiquer le plan de notre démarche, insistons sur une limitation importante de l'analyse. Les raisons fondamentales de l'incomplétude de la structure des marchés et de l'asymétrie de l'accès aux marchés ne sont pas étudiées [1].

Cette étude comprend deux parties. La première est consacrée à la définition générale de la notion de structure de marchés et aux hypothèses retenues. Dans la deuxième partie, après avoir caractérisé le comportement du consommateur, nous montrons qu'il existe toujours un équilibre concurrentiel sous les hypothèses adoptées, que l'ensemble des équilibres – quand

1. Pour une analyse où l'incomplétude des marchés et la participation asymétrique naissent d'hypothèses d'asymétrie d'information, voir Y. YOUNÈS [1984].

le vecteur des ressources initiales est paramétré – est une variété différentielle et que pour presque chaque économie, l'ensemble des équilibres est fini [2].

2 Structures de marchés et équilibre

Soit r le nombre de biens au sens de Arrow-Debreu. L'espace des biens est donc R^r. Il y a m consommateurs i. Chaque consommateur i est défini par le doublet $\{\tilde{u}_i, w_i\}$ où $\tilde{u}_i$ est la fonction d'utilité $\tilde{u}_i : R^2_+ \to \mathbb{R}$ et w_i est le vecteur des ressources initiales. L'hypothèse suivante est fondamentale :

Hypothèse H 1 : $\tilde{u}_i$ est différentiable trois fois, strictement quasi-concave et strictement croissante. La fermeture des hypersurfaces d'indifférence appartient à $\mathbb{R}^r_{++}$. Finalement $w_i \in \mathbb{R}^r_{++}$.

Formellement, notons u le gradient de $\tilde{u}$ et U la matrice des dérivées secondes. Alors

$$z' \mathrm{U} z < 0 \qquad \text{pour} \quad z \in \{z \in \mathbb{R}^r \,|\, u'.z = 0\}$$

où « ' » indique l'opération de transposition.

Nous allons commencer par proposer une définition intuitive de la notion de structure de marchés et qui s'appuie sur le concept de panier de biens. Un marché est alors un « lieu » où s'échangent entre eux des paniers de biens en nombre fini. La notion de marché simple présente pour nous un intérêt particulier. Un marché simple est un marché où s'échangent entre eux deux paniers de biens différents. Nous montrerons que sous H 1, tout marché peut être décomposé en un certain nombre de marchés simples. Il est alors montré que le formalisme adopté englobe bien le modèle canonique avec marchés au comptant et titres. L'idée de participation différenciée selon les agents est d'abord présentée dans deux cas intuitifs, celui pour lequel certains agents n'ont pas accès à certains marchés simples et celui du modèle canonique. La généralisation des cas intuitifs est immédiate.

On peut définir un panier de biens comme un ensemble de biens qui sont dans des proportions fixes. Il s'agit donc d'une direction de $\mathbb{R}^r$ ou d'un vecteur (de norme 1 par exemple) de $\mathbb{R}^r$, que nous noterons $\tilde{t}$. Il est intuitivement évident que cette notion est suffisamment générale. D'une part, elle englobe l'approche classique en termes de biens qui s'échangent sans aucune

2. La démarche suivie dans cette deuxième partie est fort classique. Voir à ce sujet Y. Balasko [1986].

restriction. En effet, un bien h est un panier de biens particulier ne comprenant que le bien h. D'autre part, l'existence d'un titre peut être vue comme la possibilité d'échanger un bien (le moyen de paiement) – et donc un panier de biens – contre un autre panier de biens qui comprend l'ensemble des biens qui constitue le rendement du titre. Cette remarque nous mène à définir la notion la plus élémentaire de marché – marché simple – comme un lieu où s'échangent exactement deux paniers de biens. Une structure de marchés simple est alors un ensemble de n marchés simples α où s'échangent entre eux exactement deux paniers de biens. Nous allons montrer que l'hypothèse H 1 nous permet de ne raisonner qu'en termes de marchés simples.

En général, un marché β est alors défini comme un « lieu » où s'échangent entre eux un nombre fini de paniers de biens

$$\{\tilde{t}_1^\beta, \ldots, \tilde{t}_k^\beta, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)}^\beta\}.$$

Sur le marché β, s'échangent entre eux $n(\beta)$ paniers $\tilde{t}_k^\beta$. Évidemment, pour que la construction ait un sens, il faut que $n(\beta)$ soit au moins égal à 2 car si $n(\beta)=1$, ceci voudrait dire qu'on échangerait, sur le marché β, un panier de biens contre rien du tout. Une structure de marchés est alors définie en général comme la donnée de N marchés β.

Puisque les agents échangent entre eux des paniers de biens sur le marché β, soit $\tilde{a}_{ik}^\beta$ l'échange en panier de biens k sur le marché β opéré par l'agent i. $\tilde{a}_{ik}^\beta$ est un nombre réel, positif ou négatif. Nous voyons donc que nous partons non pas de l'échange entre biens mais de l'échange entre paniers de biens. Cependant, il est aisé de calculer l'échange net en biens z_i^β effectué par l'agent i sur le marché β par la formule :

$$z_i^\beta = \sum_k \tilde{t}_k^\beta \tilde{a}_{ik}^\beta$$

L'échange net total en biens de l'agent i est alors égal à

$$z_i = \sum_\beta z_i^\beta$$

Mais ce que nous venons d'écrire indique clairement qu'une structure de marchés M peut être définie comme la donnée de N sous-espaces vectoriels Z^β de $\mathbb{R}^r$, chaque espace vectoriel β étant engendré par l'ensemble des paniers de biens

$$\{\tilde{t}_1^\beta, \ldots, \tilde{t}_k^\beta, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)}^\beta\}$$

Formellement [3] :

$$M = [Z^1, \ldots, Z^\beta, \ldots, Z^N]$$

3. Comme nous supposons les « prix » totalement flexibles, chaque espace vectoriel a une dimension égale au moins à deux (Voir Y. YOUNÈS [1985]).

M contraint les actes des agents en ce sens que l'échange net, z_i, de chaque agent i doit pouvoir s'écrire

$$z_i = \sum_{\beta} z_i^{\beta} \qquad \text{avec} \quad z_i^{\beta} \in Z^{\beta}, \quad \forall \beta.$$

Soit $\tilde{T}^{\beta} = [\tilde{t}_1^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_k^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}]$ une base de Z^{β}. Définissons

$$\tilde{T} \equiv [\tilde{T}^1, \ldots, \tilde{T}^{\beta}, \ldots, \tilde{T}^N]$$

Un vecteur colonne k de $\tilde{T}$ peut être interprété comme un panier de biens k. Sur chaque marché β, les paniers de biens de $\tilde{T}^{\beta}$ s'échangent les uns contre les autres au vecteur des prix $\tilde{\pi}^{\beta} = [\tilde{\pi}_1^{\beta}, \ldots, \tilde{\pi}_k^{\beta}, \ldots, \tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta}]$. Soit $\tilde{a}_i^{\beta} = \tilde{a}_{i1}^{\beta}, \ldots, \tilde{a}_{ik}^{\beta}, \ldots, \tilde{a}_{in(\beta)}^{\beta}$ le vecteur des échanges nets de i, en paniers de biens. On a donc simultanément, pour tout β :

$$z_i^{\beta} = \tilde{T}^{\beta} \, \tilde{a}_i^{\beta}$$

et

$$\tilde{\pi}'^{\beta} . \tilde{a}_i^{\beta} = 0$$

La dernière relation est donc la contrainte budgétaire afférente au marché β. L'hypothèse H 1 nous permet d'écrire que, sur chaque marché β, le dernier vecteur colonne de T^{β} s'échange contre chacun des $n(\beta) - 1$ premiers paniers au taux de $\pi_k^{\beta} = \tilde{\pi}_k^{\beta}$ pour $k = 1, \ldots, n(\beta) - 1$, si l'on a posé $\tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta} = 1$. Pour chaque marché β, les équations précédentes peuvent donc être écrites (en notant $\pi^{\beta} = [\tilde{\pi}_1^{\beta}, \ldots, \tilde{\pi}_{n(\beta)-1}^{\beta}]$) :

$$T^{\beta}(\pi^{\beta}) \, a_i^{\beta} = z_i^{\beta}$$

où $a_i^{\beta} = [\tilde{a}_{i1}^{\beta}, \ldots, \tilde{a}_{in(\beta)-1}]$ et

$$T^{\beta}(\pi^{\beta}) \equiv [\tilde{t}_1^{\beta} - \pi_1^{\beta} \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)-1}^{\beta} - \pi_{n(\beta)-1}^{\beta} \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}] \equiv \Lambda^{\beta+} - \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta} . \pi'^{\beta}$$
$$\equiv \Lambda^{\beta+} - \Lambda^{\beta-} [\pi^{\beta}]$$

où $\Lambda^{\beta+} = [\tilde{t}_1^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)-1}^{\beta}]$; $\Lambda^{\beta-} = [\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}]$ et $[\pi^{\beta}]$ est la matrice diagonale formée des éléments de π^{β}.

L'hypothèse suivante est fondamentale car elle assure que, étant donné H 1, le panier de biens $\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}$ peut jouer le rôle de numéraire et donc que $\tilde{\pi}_{n(\beta)}^{\beta} > 0$ (voir Y. Younès [1986]).

Hypothèse H 2 : Pour chaque β, il existe une base de Z^{β}, $\tilde{T}^{\beta} \equiv [\tilde{t}_1^{\beta}, \ldots, \tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}]$, telle que $\tilde{t}_{n(\beta)}^{\beta}$ ne contienne pas d'éléments négatifs.

Posons :

$$\Lambda^{+} = [\Lambda^{1+}, \ldots, \Lambda^{N+}] \qquad \text{et} \qquad \Lambda^{-} = [\Lambda^{1-}, \ldots, \Lambda^{N-}]$$

et on écrit $[\pi]$ la matrice diagonale formée des éléments du vecteur $\pi' = [\pi^{1'}, \ldots, \pi^{\beta'}, \ldots, \pi^{N'}]$.

Les matrices Λ^{+} et Λ^{-} sont $r \times n$ avec $n = \sum_{\beta} (n(\beta) - 1)$. Une structure de marché sera donc définie par la donnée de $\Lambda = \{\Lambda^{+}, \Lambda^{-}\}$.

Le couple formé par la colonne α de Λ^+ et la colonne α de Λ^- sera appelé le marché simple α. Il y a donc n marchés simples. [4]

De plus, définissons

$$T(\pi) = \Lambda^+ - \Lambda^- [\pi]$$

L'hypothèse H 1 nous permet d'écrire (sans perte de généralité car il est toujours possible d'éliminer des paniers de biens) que le rang de $T(\pi)$ est presque toujours n. Formellement,

Hypothèse H 3' : $n \leqslant r-1$ et il existe $u \in \mathbb{R}^r_{++}$ et $\pi \in \mathbb{R}^n$ tels que $u'.T(\pi) = 0$ et $T(\pi)$ a rang n.

Cependant, nous allons considérablement renforcer cette hypothèse en supposant que $\Lambda = \{\Lambda^+, \Lambda^-\}$ est régulière.

Hypothèse H 3 : Pour tout $\pi \in \Pi \equiv \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^r_{++}$ tel que $u'.T(\pi) = 0\}$, $T(\pi)$ a rang n.

Remarque : Que donne cette méthode quand la structure est complète ? La structure des marchés complète s'écrit

$$M_0 = [\mathbb{R}^r]$$

c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul marché $Z = \mathbb{R}^r$. Du fait de H 1, il est équivalent de construire $n = r-1$ marchés simples. Sur chaque marché simple, un des $(r-1)$ premiers biens s'échange contre le bien r pris comme numéraire. On peut donc indicer chaque marché simple par h, pour $h = 1, \ldots, r-1$. Le vecteur $\pi = [\pi_1, \ldots, \pi_h, \ldots, \pi_{r-1}]$ est donc le vecteur des prix des $(r-1)$ premiers biens en termes du bien r. $T_0(\pi)$ s'écrit donc

$$T_0(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ 0 & \ddots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -\pi_1 & & -\pi_h & & -\pi_{r-1} \end{bmatrix}$$

Il est clair que M_0 satisfait H 3. Finalement

$$z = T_0(\pi)\, a$$

et $a \in \mathbb{R}^{r-1}$ représente le vecteur des échanges nets en les $(r-1)$ premiers biens.

Remarquons qu'à chaque vecteur de prix des biens $p \in \mathbb{R}^r_{++}$, il correspond un seul π par l'équation $p'.T(\pi) = 0$.

Cependant, à chaque $\pi \in \Pi$, il peut correspondre une infinité de $p \in \mathbb{R}^r_{++}$ normalisés, par cette même relation. Il s'ensuit que vouloir obtenir le

4. Cette formulation trouve évidemment son origine dans la théorie des équilibres avec rationnement. Sur les liens très étroits entre les deux champs de recherche, voir Y. Younès [1985]. Dans E. Malinvaud et Y. Younès [1978], l'importance du problème de l'accès asymétrique aux marchés est signalée.

comportement habituel de la demande aux limites en fonction de p est une entreprise sans espoir.

Exemple 1 : Il y a 4 biens ($r=4$) et $n=1$.

$$T(\pi)=[1,\ 1,\ -\pi,\ -\pi]'$$

Pour $p'=[0,\ 1/2,\ 0,\ 1/2]$, nous avons $\pi=1$:

$$p'T(1)=0$$

Bien que les prix de certains biens sont nuls, l'ensemble

$$\{z\in\mathbb{R}^r \mid w_i+z\in\mathbb{R}^r_{++},\ \exists a\in\mathbb{R} \text{ tel que } T(1)\,a=z\}$$

est borné. □

Finalement, l'équilibre des emplois et des ressources est requis sur chaque marché c'est-à-dire :

$$\forall\beta:\sum_i z_i^\beta=0 \quad \text{ou bien } \sum_i a_i=0$$

Dans ces conditions, quand chaque agent i participe totalement à tous les marchés, un équilibre est un triplet (π^*, a^*, z^*) tel que

(i) $\forall i: T(\pi^*)\,a_i^*-z_i^*=0.$

(ii) $\sum_i a_i^*=0.$

(iii) $\forall i: z_i^*$ maximise $\tilde{u}_i(w_i+z_i)$ dans l'ensemble des z_i tels que $z_i=T(\pi)\,a_i$, $a_i\in\mathbb{R}^n$.

Il nous faut vérifier que notre formulation englobe bien le modèle canonique avec marchés au comptant et titres.

Exemple 2 : Modèle canonique : (Marchés au comptant et marché des titres). Il y a 2 périodes (période 0 et période 1) et σ états de la nature à la période 1. Il y a r' biens en chaque état-période $s=0, 1, \ldots, \sigma$. Le nombre total des biens au sens de Arrow-Debreu est donc $r\equiv(\sigma+1)r'$. Il y a $\sigma+1$ marchés au comptant et le marché des titres. Donc $N=\sigma+2$. Le dernier bien r' est pris comme numéraire pour chacun des $\sigma+1$ marchés au comptant. On suppose que chaque titre j (il y en a k) est payé à la période 0 et que son prix, évalué en numéraire de la période 0, est $\bar{\bar{\pi}}^j$. Soit $\bar{\bar{\pi}}=[\bar{\bar{\pi}}^1, \ldots, \bar{\bar{\pi}}^j, \ldots, \bar{\bar{\pi}}^k]$. La possession du titre j donne droit à un vecteur f^j en biens de la période 1, $f^j\in\mathbb{R}^{\sigma r'}$. Soit F la matrice $\sigma r'\times k$ des f^j. Sur chaque marché au comptant s, les paniers de biens de l'état-période s – constitués chacun d'un seul bien – sont échangés entre eux. Sur le marché des titres, le panier constitué du bien numéraire de l'état-période 0 et les paniers f^j associés aux rendements des titres sont échangés entre eux.

La matrice $T(\pi)$ caractérise cette structure de marchés

$$T(\pi)=\begin{bmatrix} T^0(\pi^0) & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\bar{\pi}}' \end{bmatrix} \\ & T^1(\pi^1) & & & \\ & & \ddots & & \begin{bmatrix} \\ F \\ \\ \end{bmatrix} \\ & & & T^\sigma(\pi^\sigma) & \end{bmatrix}$$

où pour $\beta=s=0, \dots, \sigma$

$$T^s(\pi^s)=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ -\pi_1^s & & -\pi_{r'-1}^s \end{bmatrix}$$

est une matrice $r' x(r'-1)$ et $\bar{\bar{\pi}}'$ est un k vecteur ligne placé à la rangée du bien r' de la période 0.

Évidemment, $\Lambda^{\beta+}=I_{(r'-1)}$ (la matrice unité) pour $\beta=0, \dots, \sigma$ et $\Lambda^{(\sigma+1)+}=F$. Pour $\beta=0, \dots, \sigma$, $\tilde{t}^{\beta}_{n(\beta)}$ est le vecteur formé de 0 sauf à la ligne $(\beta r')$ dont l'élément est 1. $\tilde{t}^{\sigma+1}_{n(\sigma+1)h}=0$ pour $h\neq r'$ et $\tilde{t}^{\sigma+1}_{n(\sigma+1)r'}=1$

Cette structure de marchés satisfait les hypothèses H2 et H3′ si $k\leqslant\sigma$ et si F a rang k. Si de plus, pour $s\geqslant 1$, il n'y a qu'un seul bien $h(s)$ pour lequel la ligne correspondante de F n'est pas nulle, alors $T(\pi)$ satisfait l'hypothèse H3 avec $n=(\sigma+1)(r'-1)+k\leqslant r-1$. La représentation classique du problème est évidemment équivalente à celle que nous avons proposée.

Fixons à 1 le prix du numéraire en chacun des états s. Donc p^s – le vecteur des prix des biens sur le marché au comptant de l'état s – est égal à $[\pi_1^s, \dots, \pi_{r-1}^s, 1]$.

Les contraintes budgétaires s'écrivent donc $(z_i^s\equiv x_i^s-w_i^s)$

$$p^0 z_i^0+\sum_j^k \bar{\bar{\pi}}^j \bar{\bar{a}}_i^j=0, \qquad s=0$$

$$p^s\left(z_i^s+\sum_j^k f_s^j \bar{\bar{a}}^j\right)=0, \qquad s\geqslant 1$$

De même les contraintes ressources emplois s'écrivent

$$\sum_i z_i^s=0, \quad \forall s$$

$$\sum_i \bar{\bar{a}}_i^j=0, \quad \forall j$$

Étant donné H1, il est clair que les deux formulations sont équivalentes. □

Abordons maintenant l'idée selon laquelle les différents agents ne participent pas de la même façon à chaque marché. L'exemple le plus immédiat de la participation asymétrique est le suivant : pour chaque i, il existe un ensemble de marchés simples noté $\bar{\bar{n}}_i \subset \{1, \ldots, n\} \equiv \bar{\bar{n}}$ et tel que $a_i^\alpha = 0$ pour $\alpha \notin \bar{\bar{n}}_i$; n_i sera le cardinal de $\bar{\bar{n}}_i$. Remarquons que dans ces conditions, s'il existe α' tel que $a_i^{\alpha'} = 0$ pour tout i, on peut tout aussi bien éliminer le marché simple α' de l'analyse. La propriété principale de ce cas particulier est alors la suivante :

PROPRIÉTÉ 1 : Pour tout π, l'espace vectoriel $Z(\pi)$ défini par

$$Z(\pi) \equiv \{z \in \mathbb{R}^r \mid \exists\, a \in \mathbb{R}^n \text{ t. q. } z = T(\pi)\, a\}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel qui contienne simultanément tous les $Z_i(\pi)$ où :

$$Z_i(\pi) = \{z \in \mathbb{R}^r \mid z = T(\pi)\ a \text{ pour } a \text{ t. q. } a^\alpha = 0 \text{ pour } \alpha \notin \bar{\bar{n}}_i\}$$

Examinons le modèle canonique du point de vue de la participation différenciée. Évidemment, on songera à écrire que les gens participent pleinement aux marchés au comptant, mais de manière différenciée au marché des titres. Rappelons que sur le marché des titres, le bien numéraire de l'état-période 0 et les k rendements f^j s'échangent entre eux. Il existe alors k marchés simples (le numéraire de l'état-période 0 est pris justement comme numéraire du marché des titres). Le cas le plus simple est alors celui où l'argent i ne peut échanger le titre j c'est-à-dire $a_i^\alpha = 0$ pour $\alpha = (\sigma + 1)(r' - 1) + j$.

Cependant, l'on voudrait aussi prendre en compte le cas plus général où il y a liaisons linéaires entre les niveaux d'utilisation des k marchés simples du marché des titres, c'est-à-dire où tous les

$$\bar{a}_i^t \equiv [a_i^{(\sigma+1)(r'-1)+1}, \ldots, a_i^{(\sigma+1)(r'-1)+k}]'$$

appartiennent à un même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$. Cet espace vectoriel peut être écrit

$$\{\bar{a}_i^t \in \mathbb{R}^k \mid B_i \bar{a}_i^t = 0\}$$

où B_i est une matrice de rang maximal à $\bar{k}_i$ lignes et k colonnes ($\bar{k}_i \leqslant k$). Si $\bar{k}_i = k$, $\bar{a}_i^t$ ne peut être que nul et le problème est réglé. Si $\bar{k}_i < k$, il existe une matrice $\bar{C}_i^t$ qui permet d'exprimer $\bar{k}_i$ variables dont le vecteur est ${}_2\bar{a}_i^t$ en les termes de $k - \bar{k}_i$ variables dont le vecteur est $\bar{b}_i^t$, soit

$${}_2\bar{a}_i^t = \bar{C}_i^t \bar{b}_i^t \qquad \text{où} \quad [\bar{b}_i^t, {}_2\bar{a}_i^t] \equiv \bar{a}_i^t$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire

$$\bar{a}_i^t = C_i^t \bar{b}_i^t$$

où

$$C_i^t = \left[\frac{I}{\bar{C}_i^t}\right]$$

où I est la matrice carré unitaire à $(k - \bar{k}_i)$ lignes et $(k - \bar{k}_i)$ colonnes. Notons que C_i^t est injective. Il faut bien marquer que ces liaisons ne concernent que des échanges nets relatifs au même marché — en l'occurence celui des titres.

Si donc l'on part de la notion de marché β – et non pas de la notion de marché simple – les liaisons ne sauraient concerner que $n(\beta)-1$ échanges nets de paniers de biens. Ceci nous permet de dégager une deuxième propriété que nous nous proposons de conserver.

PROPRIÉTÉ 2 : Pour tout agent i, pour tout marché β, les échanges nets en paniers de biens – *hormis ceux en panier numéraire* – appartiennent à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n(\beta)-1}$.

Formellement, nous supposons :

HYPOTHÈSE H4 : Pour tout i, pour tout β, $z_i^\beta \in Z_i^\beta$ où Z_i^β est un sous-espace vectoriel de Z^β défini par :

$$Z_i^\beta = \{z \in \mathbb{R}^r \mid z = \tilde{T}^\beta \tilde{a}^\beta \text{ pour un } \tilde{a}^\beta \in \mathbb{R}^{n(\beta)}$$
$$\text{tel que } {}_2\tilde{a}_i^\beta = \bar{C}_i^\beta \tilde{b}_i^\beta \text{ où } [\tilde{b}_i^\beta, {}_2\tilde{a}_i^\beta]' \equiv [\tilde{a}_{i,1}^\beta, \ldots, \tilde{a}_{i,n(\beta)-1}^\beta]'\}.$$

La matrice $\bar{C}_i^\beta$ a $n_i(\beta)$ colonnes et $(n(\beta)-1-n_i(\beta))$ lignes, le panier numéraire n'entrant pas dans les liaisons linéaires définies par $\bar{C}_i^\beta$. Posons :

$$b_i' = [\tilde{b}_i'^1, \ldots, \tilde{b}_i'^\beta, \ldots, \tilde{b}_i'^N]$$

Notons :

$$a^\beta = C_i^\beta b_i^\beta$$

où C_i^β est égale, à une permutation des colonnes près, à $\left[\frac{I}{\bar{C}_i^\beta}\right]$ où I est la matrice unité $n_i(\beta) \times n_i(\beta)$ et définissons la matrice $n_i \times n$, où $n_i = \sum_\beta n_i(\beta)$:

$$C_i = \begin{bmatrix} C_i^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_i^N \end{bmatrix}$$

Par construction C_i a rang n_i. Nous avons donc

$$a_i = C_i b_i$$

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un équilibre concurrentiel pour une structure de marché à laquelle les différents agents ont un accès asymétrique.

DÉFINITION : Un équilibre concurrentiel pour la structure de marchés $\Lambda = \{\Lambda^+, \Lambda^-\}$ et des accès définis par $\{C_1, \ldots, C_m\}$ est un triplet $\{\pi^*, a^*, z^*\}$ tel que

(i) $\forall i$: $T(\pi^*) a_i^* - z_i^* = 0$ et $a_i^* = C_i b_i^*$

(ii) $\sum_i a_i^* = 0$

(iii) $\forall i$: z_i^* maximise $\tilde{u}_i(w_i + z_i)$ dans l'ensemble des z_i tels que $z_i = T(\pi) a_i$ pour a_i tel que $a_i = C_i b_i$.

Utilisons les matrices $C_1, \ldots, C_m$ pour écrire les équations qui caractérisent l'équilibre sous une forme aisément manipulable.

Pour tout i et tout π, considérons

$$[\Lambda^+ - \Lambda^- [\pi]] C_i = \Lambda^+ C_i - \Lambda^- [\pi] C_i$$

et définissons

$$\Lambda_i^+ \equiv \Lambda^+ C_i, \ \pi_i = C_i' \pi$$

et

$$\Lambda_i^- = [\Lambda_i^{-1}, \ldots, \Lambda_i^{-\beta}, \ldots, \Lambda_i^{-N}]$$

où $\Lambda_i^{-\beta}$ est la matrice $n_i(\beta) \times r$ formée du vecteur colonne $\tilde{t}^{\beta}_{n(\beta)}$ répété $n_i(\beta)$ fois.

Il s'ensuit que pour tout π

$$T(\pi) C_i b_i = (\Lambda_i^+ - \Lambda_i^- [\pi_i]) b_i \equiv T_i(\pi_i) b_i$$

où $[\pi_i]$ est la matrice diagonale $n_i \times n_i$ formée des éléments du vecteur $\pi_i = C_i' \pi$.

Avec ces nouvelles notations, un équilibre est un quadruplet $[\pi^*, \bar{\pi}^*, b^*, z^*]$ où $\bar{\pi}^* = [\pi_1^*, \ldots, \pi_m^*]$ tel que

(i) $\sum_i C_i b_i^* = 0$

(ii) $T_i(\pi_i^*) b_i^* = z_i^*, \ \forall i$

(iii) $u_i'(w_i + z_i^*) T_i(\pi_i^*) = 0, \ \forall i$

(iv) $\pi_i^* = C_i' \pi^*, \ \forall i$.

Pour clore cette partie, nous désirons maintenant coaguler les propriétés 1 et 2, dégagées ci-dessus, sous forme d'un hypothèse. Nous avons remarqué que C_i est injective, pour tout i. De plus, définissons

$$\bar{\pi}' = [\pi_1', \ldots, \pi_i', \ldots, \pi_m']$$

et

$$C' = \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_m' \end{bmatrix}$$

Nous avons donc

$$\bar{\pi} = C' \pi$$

et le rang de C' est n.

Nous pouvons donc écrire :

Hypothèse H5 : Le rang de la matrice C' où

$$C' = \begin{bmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_m' \end{bmatrix}$$

est n. De plus chaque C_i a rang n_i.

Du fait que C_i a rang n_i pour tout i, les propriétés de $T(\pi)$ se retrouvent pour tous les $T_i(\pi_i)$.

LEMME 3 : Sous les hypothèses H3 et H5, pour tout i, $T_i(\pi_i)$ a rang n_i pour tout π_i tel $\pi_i = C_i' \pi$ pour $\pi \in \Pi$. De plus, $\Lambda_i = \{\Lambda_i^+, \Lambda_i^-\}$ satisfait l'hypothèse H2.

Démonstration: Immédiat, sachant que pour tout i, C_i a rang n_i. □

3 Caractérisation du comportement du consommateur et de l'équilibre

Du fait de la définition de l'équilibre à laquelle nous sommes arrivés, il nous suffit de considérer le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T_i(\pi_i)\, b_i - z_i = 0 \quad \forall i \\ u_i'(w_i + z_i)\, T_i(\pi_i) = 0 \quad \forall i \\ \sum_i C_i b_i = 0 \\ \pi_i - C_i' \pi = 0 \quad \forall i. \end{cases}$$

La stratégie que nous allons adopter est fort classique (Y. BALASKO [1986]). Nous commençons par étudier la fonction de demande du consommateur individuel et nous en dégageons deux propriétés essentielles (à savoir le comportement de la demande aux limites et le fait que la généralisation de la matrice de Slutzky est définie négative) sur lesquelles s'appuient les résultats subséquents. Nous montrons que l'ensemble des couples équilibres-ressources initiales quand le vecteur w des ressources initiales varie dans $\Omega \equiv \mathbb{R}^{mr}_{++}$ est une variété Γ de dimension $m.r$, mais qui n'est pas compacte. Écrire qu'il existe au moins un équilibre pour tout w, revient à écrire que pour tout w, le nombre d'éléments dans l'image inverse $P_r^{-1}(w)$ de la projection P_r: $\Gamma \to \Omega$ est au moins un. Il suffit donc de montrer que ce nombre d'éléments est impair, quel que soit $w \in \Omega$. Or un théorème fondamental de la théorie de l'intersection modulo 2 (Voir V. GUILLEMIN et A. POLLACK [1974], p. 80) énonce que la parité du nombre de points dans l'image inverse d'une fonction lisse P_r: $\Gamma \to \Omega$ est indépendante de $w \in \Omega$ quand Γ est propre et Ω connexe. Cette parité, notée $\deg_2(P_r)$, est obtenue en déterminant le nombre de points de $P_r^{-1}(w)$ pour n'importe quelle valeur régulière $w \in \Omega$ de P_r. Il est évident que Ω est connexe et la propreté de P_r est établie à partir du comportement de la demande aux limites. On considère alors un $\omega \in \Omega$ auquel est associé un équilibre sans échanges ($a_i = 0\ \forall i$). A un tel w, est associé un seul équilibre (1 est impair) et un tel w est une valeur régulière de P_r. Il s'ensuit que pour tout w, le nombre de points dans $P_r^{-1}(w)$ est impair et nous concluons donc qu'il existe au moins un équilibre pour tout w. Le théorème de Sard (V. GUILLEMIN et A. POLLACK [1974], p. 39) nous permet alors de conclure que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un nombre fini d'équilibres car Γ et Ω ont même dimension m. r.

3.1. Examinons d'abord les équations qui caractérisent le comportement du consommateur. Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice i.

$$\mathrm{T}(\pi)\, b - z = 0$$
$$u'(w+z)\,\mathrm{T}(\pi) = 0$$

Dérivons totalement, en maintenant w constant

$$-\Lambda^{-}[b]\, d\pi + \mathrm{T}(\pi)\, db - \mathrm{I}\, dz = 0$$
$$-[(\Lambda^{-})' u]\, d\pi + \mathrm{T}'\, \mathrm{U}\, dz = 0$$

$[b]$ est la matrice diagonale formée des éléments du vecteur b et $[(\Lambda^{-})' u]$ est égale à

$$\begin{bmatrix} \sum_h \lambda_h^{-1} u_h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_h \lambda_h^{-n} u_h \end{bmatrix}$$

D'après H1 et H2, $[(\Lambda^{-})' u]$ a rang n.

Substituons, pour obtenir :

$$\mathrm{T}'\, \mathrm{U}\, (\mathrm{T}\, db - \Lambda^{-}[b]\, d\pi) = [(\Lambda^{-})' u]\, d\pi$$

ou encore

$$\mathrm{T}'\, \mathrm{U}\mathrm{T}\, db = [(\Lambda^{-})' u]\, d\pi + \mathrm{T}'\, \mathrm{U}\, \Lambda^{-}[b]\, d\pi$$

Nous obtenons alors très simplement la généralisation des équations de Slutzky.

$$db = (\mathrm{T}'\, \mathrm{UT})^{-1} [(\Lambda^{-})' u]\, d\pi + (\mathrm{T}'\, \mathrm{UT})^{-1}\, \mathrm{T}'\, \mathrm{U}\, \Lambda^{-}[b]\, d\pi$$

Évidemment, $(\mathrm{T}'\,\mathrm{UT})^{-1}[(\Lambda^{-})' u]$ est la généralisation de la matrice de Slutzky et elle formule les effets de substitution car si $b = 0$

$$db = (\mathrm{T}'(\pi)\, \mathrm{UT}(\pi))^{-1} [(\Lambda^{-})' u]\, d\pi$$
$$\equiv \mathrm{K}\, d\pi$$

PROPOSITION 4 (Slutzky) : La matrice de Slutzky K est définie négative c'est-à-dire

$$b' \mathrm{K}\, b < 0, \qquad \forall b \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Démonstration : $\mathrm{T}'(\pi)\, \mathrm{UT}(\pi)$ est définie négative car (H1) $z' \mathrm{U} z < 0$ pour tout z tel que $u' z = 0$. Or $z = \mathrm{T}(\pi)\, b$ implique $u' z = 0$ car $u' \mathrm{T}(\pi) = 0$. Comme

$[(\Lambda^{-1})' u]$ est une matrice diagonale avec des éléments strictement positifs sur la diagonale principale, nous obtenons le résultat désiré. □

Remarque : Examinons l'effet d'une variation de w seulement. Nous obtenons

$$db = \mathrm{T}' \mathrm{U}\, dw$$

Le même argument que celui de la démonstration de la proposition 4 montre que $\mathrm{T}'\mathrm{U}$ à rang n.

Finalement, les hypothèses H1 et H2 nous permettent d'écrire la contrepartie du comportement de la demande à la frontière de l'ensemble des prix strictement positifs. Nous réintroduisons l'indice i.

PROPOSITION 5 (Comportement de la demande près de la frontière) : Supposons que z_i appartienne à un compact de $\mathbb{R}^r_{++}$. Alors π_i appartient à un compact de $\mathbb{R}^{n_i} \setminus \{0\}$ sous les hypothèses H1 et H2.

Démonstration : Nous avons

$$\pi_i^\alpha = \sum_h \lambda_h^{\alpha +} u_h \Big(\sum_h \lambda_h^{\alpha -} u_h\Big)^{-1}, \qquad \forall \alpha \in \mathrm{N}_i$$

où N_i est l'ensemble comprenant n_i éléments.

La conclusion s'ensuit car $\lambda^{\alpha -} \in \mathbb{R}^r_+ \setminus \{0\}\ \forall \alpha \in \mathrm{N}_i$. □

Remarque : L'hypothèse H5 garantit que si, pour tout i, π_i appartient à un compact, il en est de même de π.

Remarque : Le lecteur peut vérifier que dans le cas où la structure des marchés est complète, la méthode développée ici permet d'obtenir les propriétés de la matrice usuelle de Slutzky de manière beaucoup plus simple qu'avec les méthodes habituelles.

Dans ce cas $\mathrm{T}_0(\pi)$ est $r \times (r-1)$ et s'écrit :

$$\mathrm{T}_0(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\pi_1 & -\pi_h & & -\pi_{r-1} \end{bmatrix}$$

3.2. Montrons maintenant que l'ensemble des équilibres, quand $w = [w_1, \ldots, w_m]$ varie dans $\Omega \equiv \mathbb{R}^{m \cdot r}_{++}$, est une variété de dimension m. r.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} [\mathrm{T}_i(\pi_i)]' u_i (w_i + \mathrm{T}_i(\pi_i) b_i) = 0, & i = 1, \ldots, m \\ \sum_i \mathrm{C}_i b_i = 0 & \\ \pi_i - \mathrm{C}_i' \pi = 0, & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Nous avons $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i$ équations pour $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i + mr$ variables. Montrons que la matrice des dérivées partielles par rapport à

$(\pi_1, \ldots, \pi_m; \pi; b_1, \ldots, b_m; w_1, \ldots, w_m)$ a rang $\sum_i n_i + n + \sum_i n_i$

$$\begin{bmatrix} B_1 & & 0 & 0 & T_1' U_1 T_1 & & 0 & T_1' U_1 & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & B_m & 0 & 0 & & T_m' U_m T_m & 0 & & T_m' U_m \\ 0 & & 0 & 0 & C_1 & \ldots & C_m & 0 & \ldots & 0 \\ I_{n_1} & & 0 & C_1' & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & I_{n_m} & C_m' & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que du fait que $T_i' U_i$ à rang n_i, pour qu'une combinaison des lignes soit nulle, il faut que les poids affectés aux $\sum_i n_i$ premières lignes soient nuls. Mais alors, il est clair, du fait que $[C_1, \ldots, C_m]$ a rang n que toute combinaison linéaire des lignes qui est nulle, implique que les poids sont nuls. On peut donc conclure que l'ensemble Γ des $[(\pi_i)_i, \pi, b; w]$ tels que $[(\pi_i)_i, \pi, b]$ est un équilibre pour w est une variété différentielle de dimension mr.

3.3. Considérons la projection $P_r : \Gamma \to \Omega$ qui associe w à tout $[(\pi_i)_i, \pi, b, w] \in \Gamma$. Montrons que P_r est propre c'est-à-dire que pour tout compact $D \subset \Omega$, $P_r^{-1}(D)$ est compact. Remarquons d'abord que pour tout $w \in D$, à un équilibre, chaque agent a une allocation x_i qui reste dans l'ensemble des allocations borné inférieurement par l'hypersurface d'indifférence passant par w_i. Tenant compte de la relation $\sum_i z_i = 0$, il s'ensuit que pour tous les équilibres associés à D, u_i varie pour chaque i dans un compact. L'hypothèse H1 garantit alors que pour tout i, π_i varie dans un compact. D'après H5, il en est de même de π. D'après H3, b_i reste aussi dans un compact pour tout i. Donc P_r est bien propre.

3.4. Pour appliquer la théorie du degré modulo 2 et montrer qu'il existe au moins un équilibre pour chaque $w \in \Omega$, nous devons prouver qu'il existe $\bar{w} \in \Omega$ tel que $P_r^{-1}(\bar{w})$ contient un seul élément, c'est-à-dire qu'il existe un seul équilibre pour $\bar{w}$. Considérons un optimum de Pareto $\bar{x}$ pour une économie avec ressources initiales $\sum_i w_i$, $w \in \Omega$. Posons $\bar{w} = \bar{x}$. L'équilibre sans échanges ($b_i = 0 \, \forall i$) avec π défini par la relation $[T(\pi)]' u_i = 0$ (tous les u_i sont colinéaires pour un optimum de Pareto) est l'unique équilibre associé à $\bar{w}$.

3.5. La dernière étape consiste à montrer que la matrice des dérivées partielles (du système d'équations qui définit Γ) par rapport à $[(\pi_i)_i, \pi, (b_i)_i]$ a rang $2\sum_i n_i + n$. Cette matrice s'écrit (sachant qu'elle est évaluée au point

$b=0)$:

$$\begin{bmatrix}
-[(\Lambda_1^-)' u_1] & & 0 & 0 & \mathrm{T}_1' \mathrm{U}_1 \mathrm{T}_1 & & 0 \\
& \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & & -[(\Lambda_m^-)' u_m] & 0 & 0 & & \mathrm{T}_m' \mathrm{U}_m \mathrm{T}_m \\
0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \mathrm{C}_1 & & \mathrm{C}_m \\
\mathrm{I}_{n_1} & & 0 & \mathrm{C}_1' & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
& \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & & \mathrm{I}_{n_m} & \mathrm{C}_m' & 0 & \cdots\cdots & 0
\end{bmatrix}$$

Les hypothèses H1, H2, H3 et H5 combinées à la proposition 4 garantissent que cette matrice a bien rang $n+2\sum_i n_i$.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $[(d\pi_i)_i, d\pi, (db_i)_i]' \neq 0$ tel que le produit de la matrice ci-dessus par ce vecteur soit égal à 0. On a alors pour tout i

$$db_i = \mathrm{K}_i \, d\pi_i$$

et

$$d\pi_i = \mathrm{C}_i' \, d\pi,$$

d'où

$$db_i = \mathrm{K}_i \, \mathrm{C}_i' \, d\pi.$$

De plus $\sum_i \mathrm{C}_i \, db_i = 0$, d'où $\sum_i \mathrm{C}_i \, \mathrm{K}_i \, \mathrm{C}_i' \, d\pi = 0$.

Multiplions à gauche par $d\pi'$, pour obtenir

$$\sum_i (d\pi' \, \mathrm{C}_i) \, \mathrm{K}_i \, (\mathrm{C}_i' \, d\pi) = 0$$

Comme K_i est définie négative pour tout i, ceci implique $\mathrm{C}_i' \, d\pi = 0$, $\forall \, i$. Mais $d\pi_i = 0$, $\forall \, i$ implique $d\pi = 0$ et aussi $b_i = 0$ pour tout i : une contradiction.

On peut donc énoncer :

Proposition 6 : Pour tout $w \in \Omega$, il existe un équilibre et Γ est une variété.

Évidement, nous avons aussi, que pour presque tout $w \in \Omega$, il existe un nombre fini d'équilibres.

Proposition 7 : Il existe un ensemble Ω_0, ouvert dense dans Ω, tel que pour tout $w \in \Omega_0$, $\mathrm{P}_r^{-1}(w)$ contient un nombre fini de points.

Démonstration : Notons que P_r est propre. D'après le théorème de Sard, l'ensemble Ω_0, des valeurs régulières de $\mathrm{P}_r : \Gamma \to \Omega$ est un ouvert dense de Ω.

La conclusion s'ensuit. □

4 Conclusion

On peut donc conclure que l'hypothèse de participation différenciée selon les agents ne modifie guère les conclusions habituelles relatives à l'existence et au nombre d'équilibres, quand H1 est adoptéee. Évidemment, c'est l'hypothèse H3 qui est restrictive, l'hypothèse H2 revenant à éliminer les cas où les restrictions proviennent de la fixité de certains prix, ce qui peut entraîner des *augmentations* de la dimension des espaces vectoriels sur lesquels on raisonne (pour un petit ensemble de prix). Cependant l'hypothèse H2 n'élimine pas la possibilité de diminutions de la dimension des espaces vectoriels sur lesquels on raisonne. C'est l'hypothèse H3 qui joue le rôle du traître à la solde de l'auteur dans la pièce. Il faut donc, dans une étude ultérieure, s'inspirer des méthodes plus générales utilisées dans Y. Younès [1986] pour l'étude de la participation différenciée selon les agents.

• Références bibliographiques

Balasko Y. (1986). — *Fondements de la théorie de l'équilibre général.* Manuscrit.

Balasko, Y. et Cass, D. (1985). — « Regular Demand with Several, General Budgetary Contrains », Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Balasko, Y. et Cass, D. (1986). — « The Structure of Financial Equilibrium I. » Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Balasko, Y., Cass, D. et Siconolfi, P. (1987). — « The Structure of Financial Equilibrium II », Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

Cass, D. (1986). — « Competitive Equilibrium with Incomplete Financial Markets », Caress Working, University of Pennsylvania.

Chae, S. (1985). — « Existence of Competitive Equilibrium with Incomplete Markets », Working Paper, Rice University.

Duffie, D. et Shafer, W. (1985). — « Equilibrium in Incomplete Markets I », Working Paper, University of California at Berkeley.

Geanakoplos, J. et Mas Colell, A. (1985). — « Real Indeterminacy with Financial Assets », Cowles Foundation Discussion Paper.

Guillemin, V. et Pollack, A. (1974). — *Differential Topology,* Prentice Hall.

Hart, O. (1975). — « On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is Incomplete, « *Journal of Economic Theory* », 11, p. 418-443.

Magill, M. et Shafer, W. (1985). — « Equilibrium and Efficiency in a Canonical Asset Trading Model », Working Paper, University of Southern California.

McManus, D. (1984). — « Generic Existence of Equilibrium and Optimality Properties in an Economy with Future Markets », Working Paper, University of Pennsylvania.

Malinvaud, E. et Younès, Y. (1978). — « Une nouvelle formulation des fondements micro-économiques de la macro-économie », *Cahiers du Séminaire d'Économétrie.*

POLEMARCHAKIS, H. (1986). – « Equilibrium with Incomplete Markets: A simple Proof and Further Results », Working Paper, Core.

RADNER, R. (1972). – « Existence of equilibrium Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets », *Econometrica*, 40, p. 289-303.

REPULLO, R. (1983). – « Equilibrium and Efficiency in Economies with a Sequence of Markets », Chapter 6, Ph. D. Dissertation, London School of Economics.

WERNER, J. (1985). – « Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets », *Journal of Economic Theory*, 36, p. 110-119.

YOUNÈS, Y. (1984). – « General Competitive Equilibrium with Asymmetric Information and Signalling », Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

YOUNÈS, Y. (1985). – « On the Theory of Incomplete Markets », Caress Working Paper, University of Pennsylvania.

YOUNÈS, Y. (1986). – « Competitive Equilibrium for Incomplete Market Structures: Existence and Determinacy », Caress Working Paper, University of Pennsylvania.