

Modélisation de la demande temporelle pour le téléphone

André DE PALMA *

RÉSUMÉ. – Cet article introduit un modèle théorique visant à décrire la demande en fonction de l'heure de la journée pour le téléphone. Un équilibre est atteint lorsque l'utilité de téléphoner est la même pendant et en dehors de la période de temps idéale. Nous calculons la demande temporelle des usagers en utilisant le concept d'équilibre de Nash et explorons plusieurs politiques de tarification. Enfin, nous discutons plusieurs extensions possibles du modèle proposé.

Forecast of the Temporal Demand for Telephones

ABSTRACT. – This paper develops a model which derives the temporal demand for a telephone line with congestion. Equilibrium obtains when the expected utility of placing a call during the peak and off-peak periods are equalized. We compute the temporal demand for various pricing policies. Direction for future research are finally commented on.

* A. DE PALMA : Northwestern University, Department of Civil Engineering, The Technological Institute, Evanston, IL, 60208 USA. Je voudrais remercier R. Arnott (Queen's University), M. Ben-Akiva (M.I.T.), L. Leruth (U.L.B.), J. Thisse (C.O.R.E.) et un arbitre anonyme pour leurs commentaires et suggestions, et E. Pecqueur (C.O.R.E.) pour son assistance technique. Je voudrais aussi remercier le FNRS et la Bell Telephone qui ont couronné ce travail du prix Biennal FNRS/Bell en 1987.

1 Introduction

Les gestionnaires des compagnies privées de téléphone ainsi que les décideurs dans les monopoles publics sont intéressés par la détermination de la demande temporelle pour les services de télécommunication. Cette information est essentielle pour déterminer l'impact d'une tarification donnée ou pour préciser, par exemple, les caractéristiques optimales d'un réseau téléphonique. Une meilleure connaissance des élasticités permettra d'une part d'augmenter le revenu des compagnies de téléphone, et d'autre part de mieux utiliser les réseaux téléphoniques existants (ce qui peut correspondre à un bénéfice pour les usagers). Une analyse temporelle (c'est-à-dire en fonction de l'heure de la journée) est essentielle puisque la congestion des réseaux téléphoniques, bien souvent, se produit à des moments particuliers de la journée, les réseaux étant moins utilisés le reste du temps.

Ce papier introduit un modèle théorique visant à décrire la demande temporelle pour les services de télécommunication. Pour fixer les idées, nous traiterons le cas du téléphone. Chaque jour, un nombre donné d'usagers est censé devoir téléphoner. Chaque usager souhaite appeler pendant un intervalle de temps donné. Néanmoins, la capacité des lignes et commutateurs téléphoniques n'est pas en général assez grande pour que tous les usagers puissent appeler au moment désiré. En conséquence, chaque individu doit faire un choix. S'il décide de téléphoner pendant la période de temps idéale, il devra probablement attendre un certain temps avant d'avoir une ligne libre. S'il appelle en dehors de cette période, le temps d'attente pour une nouvelle ligne sera certainement diminué mais il devra faire face à l'inconvénient d'appeler trop tôt ou trop tard. Un équilibre est atteint lorsque l'utilité de téléphoner est la même pendant et en dehors de la période de temps idéale.

Cet article est le premier, à notre connaissance, à proposer une description microéconomique de la dépendance temporelle de la demande pour le téléphone en présence de phénomène de congestion dont l'intensité est déterminée de manière endogène. Les travaux précédents ont considéré que les demandes à différents moments de la journée étaient indépendantes, ou bien ont supposé que les demandes correspondant à des intervalles de temps discrets étaient des biens substitués et ont postulé différentes formes paramétriques pour les élasticités croisées en prix (voir MITCHELL [1978 a], TAYLOR [1979] et NGUYEN [1986]).

L'approche introduite ici est similaire mais complémentaire à celle de VILMIN et CURIEN [1985]. Ces auteurs décrivent à l'aide d'un modèle logit multinomial la manière dont les usagers répondent à différentes politiques tarifaires. Leur approche est plus générale puisqu'ils considèrent que la courbe de charge « naturelle » (correspondant à la distribution des temps optimaux d'appel) est quelconque, et non pas uniforme comme dans notre cas. Par contre ces auteurs ne modélisent pas les phénomènes de congestion

qui jouent, dans cet article, un rôle important pour la détermination, par les usagers, du temps d'appel optimal.

Certaines approches, enfin, essaient de déterminer les caractéristiques de la demande au cours d'une même journée à partir de l'analyse de la variabilité de celle-ci pour différents jours de la semaine (en comparant par exemple la demande les jours de la semaine et de la fin de la semaine). Nous pensons que la technique introduite dans ce travail est plus directe et plus satisfaisante que celles développées jusqu'ici, et espérons dans l'avenir pouvoir comparer à l'aide des données empiriques les différentes approches existantes et celle qui est proposée ici.

La section 2 présente une description du modèle de file d'attente utilisé qui correspond à l'aspect « offre » du modèle, tandis que la section 3 traite de l'aspect « demande ». Dans la section 4, ensuite, nous dérivons un équilibre, au sens de Nash, dans le cas d'une politique de prix constants au cours de la journée. Dans la section 5 nous discutons l'impact de différentes politiques alternatives sur la demande temporelle et nous déterminons différentes capacités optimales. Enfin, dans la section 6, nous présentons des propositions de recherches futures.

2 Le modèle de file d'attente pour le téléphone

Nous traitons d'un système où le niveau de congestion est élevé. Différentes situations sont possibles. Une première situation correspond au cas d'une entreprise qui gère elle-même (par un système de commutateurs téléphoniques PBX par exemple) ses appels à l'extérieur. Dans ce cas le nombre de lignes étant limité, la congestion peut être importante. A l'échelle du réseau téléphonique d'un pays, il semble que le taux de blocage soit assez bas. Aux USA, avant la déréglementation de janvier 1984, il était de l'ordre de 1 %; depuis lors néanmoins on a vu croître lentement le taux de blocage pendant les heures de pointe et celui-ci tend à devenir de plus en plus significatif. En Europe, il semble que les taux de blocage soient plus élevés, en particulier pour les communications internationales. En parlant de congestion, nous pensons aussi à une seconde situation où la congestion n'est pas due à la capacité limitée des réseaux ou commutateurs téléphoniques, mais au fait que le correspondant appelé peut être occupé à téléphoner. Dans ce cas, la personne qui appelle subit un temps d'attente et peut être tentée, les jours suivants, d'appeler plus tôt ou plus tard pour éviter cette attente.

Dans le modèle décrit ici les utilisateurs sont supposés se servir d'une ligne téléphonique ayant une capacité s (s représente le nombre maximal

d'appels téléphoniques que peut transmettre la ligne. ¹ Nous désignons par $r(t)$ le nombre d'usagers, par unité de temps, qui commencent à téléphoner à l'instant t et par $D(t)$ le nombre d'usagers qui essaient sans succès d'avoir accès à une ligne à l'instant t . Si $D(t)=0$, les usagers ont accès immédiatement à une ligne lorsqu'ils décrochent leur téléphone, tandis que si $D(t)>0$ la congestion va se développer. Nous nous intéresserons ici uniquement au cas où il y a congestion. Nous discuterons brièvement plus loin du cas où il n'y a pas de congestion. Soit τ la longueur d'un appel téléphonique; nous avons :

$$(1) \quad \dot{D}(t) \left[\equiv \frac{dD(t)}{dt} \right] = r(t) - \frac{s}{\tau}$$

d'où :

$$(2) \quad D(t) = \int_{t_q}^t r(u) du - \frac{s}{\tau}(t - t_q),$$

où t_q est le moment où la congestion commence.

Le fait de considérer une durée des appels constante simplifie considérablement l'analyse puisque dans ce cas le nombre d'usagers en attente est déterministe. Pour généraliser cette approche, il faudrait considérer une distribution des appels (suivant par exemple la loi alpha-Erlang) qui dépende du régime tarifaire en vigueur. Cette extension rendrait notre approche considérablement plus difficile puisque le nombre d'usagers $D(t)$ serait dans ce cas une variable aléatoire; de plus la relation entre les fréquences et durées des appels et le régime tarifaire en vigueur est loin d'être connue.

La probabilité d'obtenir une ligne pendant l'intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ est désignée par $P(t) \delta t$. Tous les usagers qui essaient d'avoir une ligne ont la même probabilité de l'obtenir; par conséquent,

$$(3) \quad P(t) \delta t = \frac{s \delta t / \tau}{D(t)};$$

$s \delta t / \tau$ représente le nombre d'appels terminés pendant l'intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ et $D(t)$ représente le nombre d'usagers qui souhaitent téléphoner.

Soit $F(t, t_0)$ la probabilité qu'un individu qui essaie pour la première fois d'avoir une ligne à l'instant t_0 , l'attende toujours à l'instant t . Un résultat standard dans la théorie des probabilités permet de calculer $F(t, t_0)$ de la

1. Pour une référence récente sur la technologie du trafic dans les réseaux téléphoniques, nous renvoyons le lecteur à SYSKI [1985], ainsi qu'aux travaux présentés à la conférence «Telecommunication Demand Modelling» [1985]. Un certain nombre de résultats classiques sur la théorie des files d'attente pourront être trouvés dans BENES [1965] et NEWELL [1982]. Le fait de n'aborder qu'une ligne téléphonique est certainement restrictif. Néanmoins si l'on considère les progrès très lents des recherches relatives aux calculs d'équilibre sur un réseau, en fonction de l'heure de la journée, il semble illusoire de traiter le cas d'un réseau dans le cadre de cette première contribution.

manière suivante :

$$(4) \quad F(t, t_0) = e^{-\int_{t_0}^t P(u) du}$$

La probabilité qu'un usager ayant décroché son téléphone la première fois à l'instant t_0 , obtienne une ligne à l'instant t est égale à $P(t)F(t, t_0)$. Notons que

$$(5 a, b) \quad F(t_0, t_0) = 1, \quad F(t_{q'}, t_0) = 0$$

et

$$(6) \quad \int_{t_0}^{t_{q'}} F(t, t_0) P(t) dt = 1$$

où $t_{q'}$ est l'instant où la congestion se termine.

Le temps moyen d'attente d'un individu qui a décroché son téléphone à l'instant t_0 , noté par $\bar{t}(t_0)$, est égal à :

$$(7) \quad \bar{t}(t_0) = \int_{t_0}^{t_{q'}} (t - t_0) F(t, t_0) P(t) dt.$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons la fonctionnelle G définie par :

$$(8) \quad G(x, y, z(t)) \equiv \int_x^y z(t) F(t, t_0) P(t) dt.$$

L'équation (7) peut dès lors se récrire :

$$(7') \quad \bar{t}(t_0) = G(t_0, t_{q'}, t - t_0)$$

Le modèle d'offre est caractérisé par les équations (2), (3), (4) et (7').

Notons que le modèle d'offre présenté ci-dessus correspond à un modèle de file d'attente sans priorité. Autrement dit, la durée de l'attente dans la file n'affecte absolument pas la probabilité d'être servi.

3 Le modèle de demande

Supposons qu'il y ait N usagers identiques qui veulent chacun joindre leur correspondant pendant la plage horaire $[t^* - \Delta, t^* + \Delta]$. Cette hypothèse s'applique bien lors de l'étude de la régulation d'une pointe de trafic (par exemple la pointe du soir). Cette approche, bien que restrictive, a l'avantage de ne traiter qu'un type de trafic (le trafic résidentiel par exemple) et rend

davantage plausible l'hypothèse d'homogénéité des usagers. ² Si un individu parle avant $t^* - \Delta$ ou après $t^* + \Delta$ à son correspondant, il sera pénalisé; cette pénalité est mesurée par une désutilité que nous désignons par « pénalité due aux appels précoces ou tardifs ». Plus spécifiquement, nous supposons que tous les individus ont la même fonction de désutilité (exprimée en équivalent monétaire).

$$\begin{aligned} V(t_0, t) = & -\alpha(\text{temps d'attente}) \\ & -\beta(\text{délais correspondant aux appels précoces}) \\ & -\gamma(\text{délais correspondant aux appels tardifs}) \\ & -p(t). \end{aligned}$$

t_0 désigne le moment où l'individu a décroché son téléphone pour la première fois et t (variable aléatoire) désigne celui où il a eu la communication. Le prix de la communication $p(t)$ est supposé indépendant de l'heure de la journée dans cette section (il sera supposé égal à zéro sans perte de généralité). La fonction d'utilité introduite ci-dessous est analogue à celle introduite par VILMIN et CURIEN [1985]. Ces auteurs postulent une fonction d'utilité logarithmique (et non pas linéaire comme ici), supposent la symétrie (c'est-à-dire que $\beta = \alpha$) et négligent le facteur temps d'attente ($\alpha = 0$). Dans l'état actuel des choses, rien ne nous permet de préférer une forme de fonction d'utilité à une autre. En supposant que les usagers sont neutres vis-à-vis du risque, chaque individu maximise $V(t_0)$ défini par

$$(9) \quad \begin{aligned} V(t_0) = E [& -\alpha(t - t_0) - \beta \min(0, t^* - \Delta - t) \\ & -\gamma \min(0, t - (t^* + \Delta))] \end{aligned}$$

$E[\]$ désigne l'espérance mathématique, α mesure le coût du temps (mesure en unités monétaires), β le coût unitaire dû à un appel précoce, et γ le coût unitaire correspondant à un appel tardif. Dans le cadre d'une application du modèle proposé, il est vraisemblable que les valeurs des paramètres α , β et γ dépendent à la fois des caractéristiques socio-économiques des usagers et du type d'utilisation du téléphone (usage résidentiel ou professionnel).

Considérons maintenant un usager qui commence à téléphoner après la période de temps idéale, c'est-à-dire $t_0 \in [t^* + \Delta, t_q]$. Il subira un coût dû à l'attente pour une ligne disponible égal à $\alpha t(t_0)$ [voir équation (7')]. La probabilité qu'il ait accès à une ligne à l'instant t est $F(t, t_0)P(t)$. La pénalité correspondante est égale à $\gamma(t - (t^* + \Delta))$. Par conséquent, la pénalité attendue, due à un appel effectué trop tardivement, est $\gamma \int_{t_0}^{t_q} (t - (t^* + \Delta)) F(t, t_0) P(t) dt$ et l'utilité moyenne est :

$$V(t_0) = -\alpha \bar{t}(t_0) - \gamma \int_{t_0}^{t_q} (t - (t^* + \Delta)) F(t, t_0) P(t) dt.$$

2. Dans un prochain article, nous nous proposons d'analyser, éventuellement à l'aide de simulations, le cas où la courbe de charge « naturelle » du trafic est quelconque.

Soit, en utilisant (8)

$$V(t_0) = -\alpha \bar{t}(t_0) - \gamma G(t_0, t_q, t - (t^* + \Delta)).$$

En appliquant un raisonnement similaire pour

$$t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta] \quad \text{et pour} \quad t_0 \in [t_q, t^* - \Delta],$$

nous obtenons :

$$(10) \quad V(t_0) = \begin{cases} -\alpha \bar{t}(t_0) - \beta G(t_0, t^* - \Delta, t^* - \Delta - t) \\ \quad - \beta G(t^* + \Delta, t_q, t - (t^* + \Delta)) \\ \quad \text{pour } t_0 \in [t_q, t^* - \Delta] \\ -\alpha \bar{t}(t_0) - \gamma G(t^* + \Delta, t_q, t - (t^* + \Delta)) \\ \quad \text{pour } t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta] \\ -\alpha \bar{t}(t_0) - \gamma G(t_0, t_q, t - (t^* + \Delta)) \\ \quad \text{pour } t_0 \in [t^* + \Delta, t_q]. \end{cases}$$

Puisque la fonction d'utilité est une fonction linéaire, l'utilité moyenne d'un individu est fonction uniquement des grandeurs moyennes et non pas des moments d'ordre supérieur de la fonction de temps d'attente. ³

Le modèle de demande est défini par (10).

Nous avons supposé que les pénalités dues à l'attente, au retard ou à l'avance des appels téléphoniques, étaient mesurables en unités monétaires et pouvaient être additionnées. Des mesures effectuées par AT & T semblent montrer néanmoins que les temps où les appels sont émis peuvent être peu affectés par des politiques de tarification dépendant de l'heure de la journée (impliquant un facteur pouvant atteindre 4 entre le prix pendant et en dehors du pic horaire). Ces données (qui ne nous sont pas accessibles) semblent montrer que la demande pour une plage horaire donnée est peu élastique par rapport au prix, dans le sens où les usagers ne sont pas prêts à avancer ou reculer leurs appels pour éviter de payer un prix élevé. Nous pensons néanmoins que ces données ne remettent pas en question notre hypothèse relative à la substitution entre les sources de pénalités, mais attirent l'attention sur la nécessité de prendre en compte le contenu et le but des communications téléphoniques dont on veut estimer la demande. En effet, ces données concernent des communications liées au travail et il semble que, pour les communications privées, l'élasticité soit beaucoup plus grande et qu'en particulier des tarifications dépendant de l'heure de la journée puissent avoir un impact important sur le temps auquel un individu décide de téléphoner. Ce type de segmentation de marché, en fonction de l'objet de l'appel, serait vraisemblablement très utile pour une application pratique. Pour une discussion de l'impact de différentes politiques tarifaires sur la distribution de la demande temporelle pour le téléphone en RFA,

3. Il est possible qu'il y ait une désutilité marginale croissante associée au temps d'attente. Il serait intéressant d'exprimer cette idée, néanmoins elle complexifie significativement l'étude présentée ici et ne semble par conséquent pas justifiée dans le cadre de cette première approche.

4 Équilibre

Une situation d'équilibre, au sens de Nash, est atteinte lorsqu'aucun usager ne peut modifier la valeur de sa variable de décision (le temps t_0 où il décroche son téléphone la première fois) en vue d'augmenter son niveau d'utilité espéré. Cette condition sera satisfaite si le niveau d'utilité est le même quel que soit t_0 ($t_0 \in [t_q, t_q']$). A l'équilibre :

$$(11) \quad \frac{dV(t_0)}{dt_0} = 0 \quad \text{pour tout } t_0 \in [t_q, t_q'];$$

V désignera le niveau commun d'utilité à l'équilibre. Dans le cas où la demande totale n'est pas élastique, le nombre d'usagers N au lieu d'être constant, sera déterminé de manière endogène en fonction du niveau commun d'utilité V et les résultats présentés dans cette section restent valables. Considérons d'abord l'intervalle $[t^* + \Delta, t_q']$. Notons que d'après (4)

$$\frac{dF(t, t_0)}{dt_0} = P(t_0) F(t, t_0). \quad \text{D'après (6) et (8), } G(t_0, t_q', 1) = 1.$$

Par conséquent :

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dV(t_0)}{dt_0} &= \alpha(G(t_0, t_q', 1) - P(t_0)G(t_0, t_q', t - t_0)) \\ &+ \gamma(P(t_0)(t_0 - (t^* + \Delta)) - G(t_0, t_q', t - (t^* + \Delta))) \\ &= \alpha + \gamma P(t_0)(t_0 - (t^* + \Delta)) + P(t_0) V(t_0). \end{aligned}$$

En utilisant (11), nous obtenons :

$$(13) \quad P(t_0) = \frac{-\alpha}{V(t_0) - \gamma(t^* + \Delta) + \gamma t_0}$$

Mais, par (3) :

$$(14) \quad D(t_0) = -\frac{s}{\alpha\tau} [V(t_0) - \gamma(t^* + \Delta) + \gamma t_0].$$

Par conséquent, en utilisant (1) et (11), nous obtenons finalement

$$(15) \quad r(t_0) = \frac{s}{\tau} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

à condition que $\alpha > \gamma$, c'est-à-dire à condition que la pénalité associée à une minute d'attente soit supérieure à celle correspondant à une communication

effectuée une minute après $t^* + \Delta$. Lorsque $\alpha < \gamma$, $r(t_0) < 0$, de sorte que l'équation (11) n'admet pas de solution; nous ne nous préoccupons pas de ce dernier cas puisque la condition $\alpha > \gamma$ sera vraisemblablement toujours vérifiée en pratique.

En procédant de la même manière pour les deux autres cas :

$$t_0 \in [t_q, t^* - \Delta] \quad \text{et} \quad t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta],$$

nous obtenons la proposition 1 :

PROPOSITION 1 : Si $N \leq (2\Delta + \tau) s/\tau$, tous les usagers peuvent téléphoner pendant la plage horaire idéale $[t^* - \Delta, t^* + \Delta]$ sans aucune pénalité.

Si $N > (2\Delta + \tau) s/\tau$, le taux d'arrivée des usagers dans le système, $r(t_0)$, est donné par :

$$(16) \quad r(t_0) = \begin{cases} \frac{s}{\tau} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) & \text{pour } t_0 \in [t_q, t^* - \Delta] \\ \frac{s}{\tau} & \text{pour } t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta] \\ \frac{s}{\tau} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right) & \text{pour } t_0 \in [t^* + \Delta, t_q] \end{cases}$$

et en t_q , un lot de s usagers arrive instantanément dans le système.

Lorsque $N > (2\Delta + \tau) s/\tau$, la congestion se produit nécessairement dans le système puisque $(2\Delta + \tau) s/\tau$ représente le nombre maximal d'usagers pouvant être servis sans pénalité pendant l'intervalle de temps $[t^* - \Delta, t^* + \Delta]$. La condition d'égalisation du niveau d'utilité implique que s usagers arrivent instantanément en t_q dans le système. La solution (16) sera entièrement caractérisée une fois connues les valeurs de t_q et $t_{q'}$.

Notons que si $N \leq (2\Delta + \tau) s/\tau$, aucun usager n'aura à attendre pour avoir accès à une ligne téléphonique.

PROPOSITION 2 : Lorsque $N > (2\Delta + \tau) s/\tau$, tous les usagers subissent la congestion. Celle-ci commence en t_q et finit en $t_{q'}$, donnés par :

$$(17 a) \quad t_q = t^* - \Delta - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{N - s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$$

et

$$(17 b) \quad t_{q'} = t^* + \Delta + \frac{1}{\gamma + 1} \left[\frac{N - s}{s/\tau} - 2\Delta \right].$$

Preuve : A l'équilibre, tous les usagers ont le même niveau d'utilité; en particulier, celui-ci doit être le même en t_q et $t_{q'}$, de sorte que :

$$(18) \quad \beta(t^* - \Delta - t_q) = \gamma(t_{q'} - (t^* + \Delta))$$

puisque les usagers décrochant leur téléphone pour la première fois en t_q ou $t_{q'}$ ont nécessairement leur communication immédiatement. De plus, par

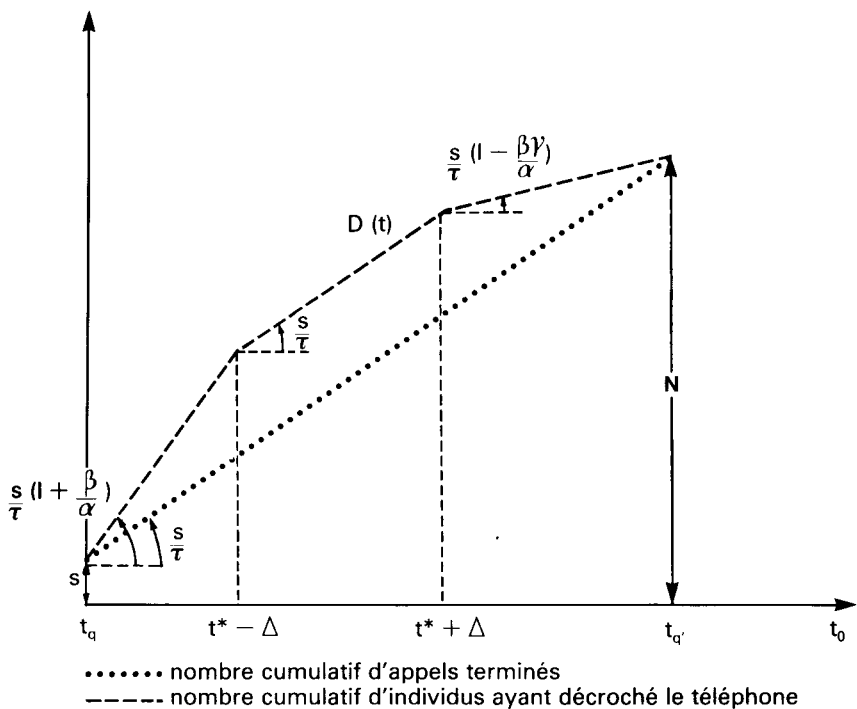


FIGURE 1

Représentation de la solution d'équilibre.

définition de la capacité s , nous avons

$$(19) \quad N \tau = (t_{q'} - t_q + \tau) s.$$

En résolvant (18) et (19) par rapport à t_q et $t_{q'}$, nous obtenons (17a) et (17b). \square

La discussion est résumée à la figure 1.

Pour compléter l'analyse de la solution, il nous faut calculer les différents coûts encourus par les usagers.

PROPOSITION 3 : Le niveau d'utilité commun à l'équilibre (noté V) est égal à $-\frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$.

Le coût total encouru par les N usagers (noté CT^n)⁴ est égal à $\frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] N$. Le coût total dû aux attentes (noté CTA^n) est égal à

$$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N-s}{s/\tau} + 2\Delta \right].$$

Le coût total dû aux appels effectués d'une manière précoce ou tardive (noté CTD^n), est égal à

$$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N+s}{s/\tau} - 2\Delta \right].$$

Preuve : Pour calculer le niveau d'utilité, V , il suffit de remarquer que tous les usagers ont le même niveau d'utilité à l'équilibre. Considérons par exemple le niveau d'utilité des usagers téléphonant en t_q ; celui-ci est égal à :

$$(20) \quad -\beta(t^* - \Delta - t_q)$$

En substituant t_q par (17a) on obtient la valeur de V . Par définition $CT^n = -NV$. Pour calculer le coût total correspondant aux attentes, considérons la figure 2. Le temps total d'attente ne dépend pas de la discipline suivie, mais uniquement du taux d'arrivée des appels et du taux auquel de nouvelles lignes sont disponibles. En conséquence, nous avons choisi la politique du premier arrivé premier servi pour le calcul du temps total d'attente et des délais qui correspondent aux appels précoces et tardifs. Cette manière de procéder est bien connue dans la théorie des files d'attente. Par conséquent CTA^n est simplement mesurée par l'aire hachurée verticalement dans la figure 2. Un calcul simple permet de calculer la valeur de CTA^n . Enfin CTD^n est donné par :

$$(21) \quad CTD^n = CT^n - CTA^n. \quad \square$$

Notons qu'il est surprenant que le niveau d'utilité V , soit indépendant du coût du temps α . Ceci est rendu possible parce qu'une augmentation du coût du temps α entraîne un étalement des appels téléphoniques qui s'avère compenser exactement l'augmentation du coût du temps. Notons aussi que si on exclut par simplicité les s premiers individus (qui ne subissent qu'une pénalité due à des appels précoces), le rapport ρ du coût total d'attente vis-à-vis du coût dû aux appels précoces ou tardifs est égal à :

$$(22) \quad \rho = 1 + \frac{4\Delta}{(N-s)/(s/\tau) - 2\Delta}.$$

L'équation (22) montre que l'approche conventionnelle qui consiste à négliger les coûts associés aux appels précoces et tardifs sous-estime largement les coûts des appels téléphoniques.

4. L'indice n se réfère au fait que l'on calcule des équilibres de Nash.

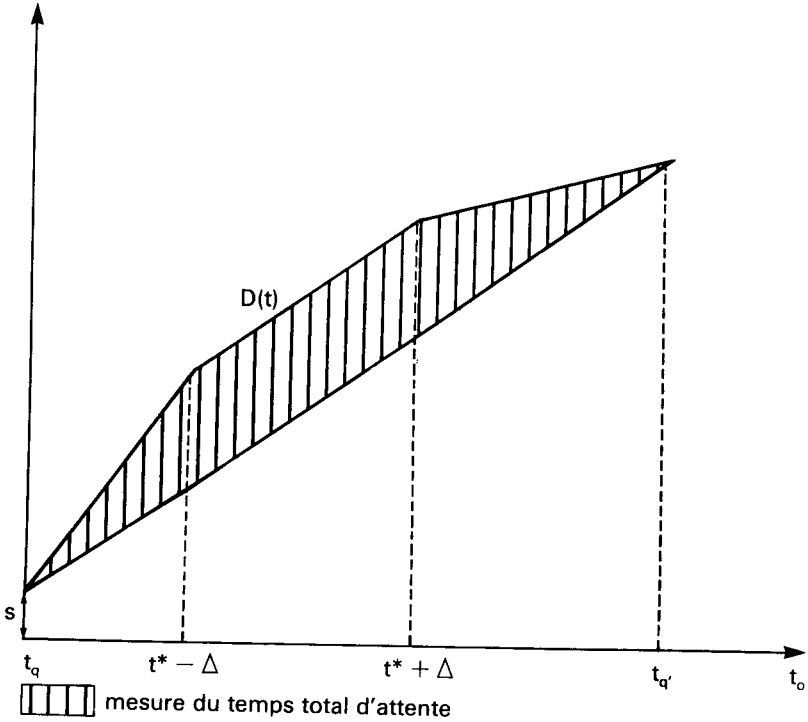


FIGURE 2

Mesure des temps d'attente.

Substituant $V(t_0)$ par l'expression obtenue dans la proposition 3 dans (13) et dans les expressions de $P(t)$ correspondant aux deux autres intervalles, nous obtenons :

$$(21) P(t) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta/\alpha)(t-t_q)} & \text{pour } t \in [t_q, t^* - \Delta] \\ \frac{1}{[\gamma/\alpha(\gamma+1)][(N-s)/(s\tau) - 2\Delta]} & \text{pour } t \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta] \\ \frac{1}{(\gamma/\alpha)(t_q' - t)} & \text{pour } t \in [t^* + \Delta, t_q'] \end{cases}$$

On peut vérifier aisément que $\lim_{t \rightarrow t_q} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_q'} P(t) = +\infty$ et que $P(t)$ est une fonction continue pour $t \in (t_q, t_q')$. La fonction $P(t)$ est représentée à la figure 3.

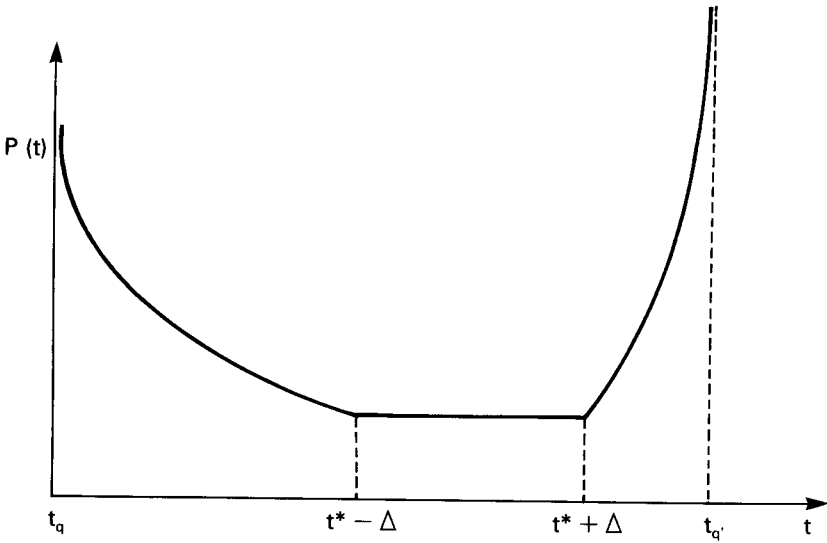


FIGURE 3

Probabilité d'avoir une ligne libre en t .

Dans l'appendice, il est prouvé que le temps moyen d'attente $\bar{t}(t_0)$, est une fonction concave et différentiable de t_0 , dont le maximum est situé dans $[t_q, t^* - \Delta]$. La fonction $\bar{t}(t_0)$ est représentée à la figure 4 dans le cas où $\alpha > \beta$.

5 Extensions

5.1. Tarification optimale

Le temps d'attente correspond à une perte nette pour les utilisateurs et doit donc être complètement éliminé. Ceci peut être réalisé en imposant une tarification qui dépend optimalement du moment de l'appel comme suit :

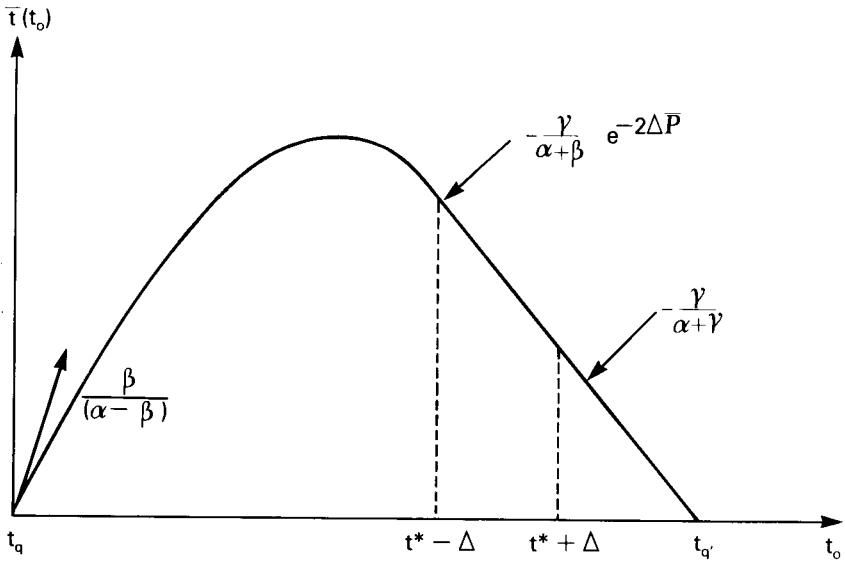


FIGURE 4

Temps moyen d'attente $\bar{t}(t_0)$.

$\bar{P} \equiv \alpha(\gamma + 1) / \{ \gamma(N - s) / (s/\tau) - 2\gamma\Delta \}$ et $\alpha > \beta$.

PROPOSITION 4 : L'optimum social est atteint grâce à la tarification suivante

$$(24) \quad p(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t_0 < t_q \\ a - (t^* - \Delta - t)\beta & \text{pour } t_0 \in [t_q, t^* - \Delta] \\ a & \text{pour } t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta] \\ a - (t - (t^* + \Delta))\gamma & \text{pour } t_0 \in [t^* + \Delta, t_{q'}] \\ 0 & \text{pour } t > t_{q'}. \end{cases}$$

où $a < \frac{\gamma}{1 + \gamma} \left[\frac{N - s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$ est une constante.

En utilisant la tarification (24), la distribution des appels est donnée par :

$$(25) \quad r(t_0) = \frac{s}{\tau} \quad \text{pour } t_0 \in [t_i, t_f]$$

avec

$$t_i = t_a \text{ et } t_f = t_{q'}$$

où t_q et $t_{q'}$ sont définis par (19), et s individus arrivent instantanément dans le système en t_i .

Preuve : Pour dériver la tarification optimale, il suffit de noter (a) qu'il n'est pas socialement efficace de garder des usagers en attente; (b) qu'il est inefficace d'avoir un taux d'appel inférieur à $\frac{s}{\tau}$ et (c) que les pénalités du premier usager (appelant en t_i) et du dernier usager (appelant en t_f) doivent être nécessairement les mêmes. \square

La tarification définie en (24) est représentée à la figure 5.

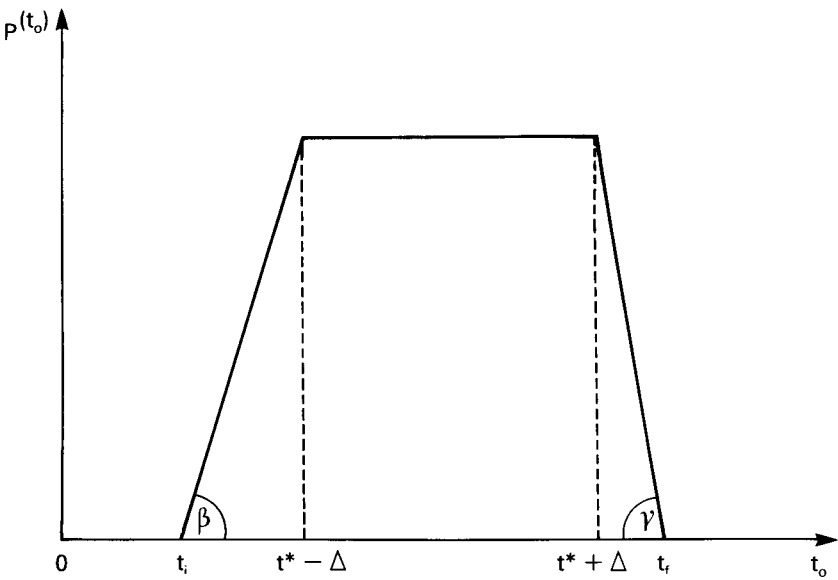


FIGURE 5

Tarification optimale pour $a = \{ \gamma / (1 + \gamma) \} \left(\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right)$.

La solution optimale (25) implique que le coût total CT^0 , le coût dû aux attentes CTA^0 et le coût dû aux appels précoces ou tardifs CTD^0 sont donnés par :

$$(26 a) \quad CT^0 = + \frac{\gamma N}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$$

$$(26 b) \quad CTA^0 = 0$$

$$(26 c) \quad CTD^0 = \frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N+s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$$

Dans cet exemple, nous avons supposé que le tarif $p(t_0)$ payé par le premier et le dernier usager (appelant en t_i et t_f respectivement) était nul. La tarification (24) a entièrement éliminé l'attente, de sorte que t_0 désigne dans ce cas à la fois le temps où l'utilisateur décroche son téléphone et celui où il a accès à une ligne. Le revenu résultant de cette tarification est égal à

$$R = CT^0 - CTD^0 = \frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N-s}{s/\tau} + 2\Delta \right].$$

Il correspond exactement au gain dû à la réduction du temps d'attente, de sorte que l'utilité moyenne des utilisateurs reste la même si le revenu payé par les utilisateurs n'est pas redistribué. Néanmoins, dans une situation où les utilisateurs ont une aversion vis-à-vis du risque, une tarification optimale augmente vraisemblablement le niveau d'utilité des usagers, puisqu'elle annule la variance du temps d'attente. Les résultats pour l'équilibre de Nash et l'optimum social sont présentés dans le tableau 1.

5.2. Tarification en fonction du temps d'attente

La tarification à la Pigou nous apprend que pour réduire la congestion, il faut internaliser les externalités, c'est-à-dire faire payer aux usagers le coût de la congestion qu'ils engendrent. Ici, nous développerons un point de vue complètement différent et, à ce titre, original. Nous considérons une tarification où chaque utilisateur paie en fonction du temps qu'il a attendu pour obtenir sa communication. Soit α_c le tarif supplémentaire payé à la compagnie de téléphone pour une unité d'attente; (19) devient

$$(27) \quad V^u(t_0) = E[-(\alpha + \alpha_c)(t - t_0) - \beta \min(0, t^* - \Delta - t) - \gamma \min(0, t - (t^* + \Delta))]$$

Nous pouvons montrer facilement que, pour cette politique de tarification, le coût total dû aux attentes CTA^u est égal à :

$$(28) \quad CTA^u = \frac{\alpha}{\alpha + \alpha_c} CTA^a$$

où CTA^a est défini dans la proposition 3. Il en résulte que lorsque α_c croît, le coût total dû aux attentes décroît, et tend vers zéro lorsque $\alpha_c \rightarrow \infty$. Or le niveau d'utilité, V , défini par (27), reste constant (voir proposition 3) lorsque α_c croît, puisqu'il est indépendant du coût du temps. De fait, en considérant que le revenu provenant de la tarification est redistribué uniformément aux usagers, le coût total CT^u est tel que :

$$(29) \quad \lim_{\alpha_c \rightarrow \infty} CT^u = TCD^a$$

TABEAU 1

Données agrégées

Cas	Revenu	Coût total CT	Coûts dus aux attentes CTA	Coûts dus aux appels précoces ou tardifs CTD
Équilibre de Nash	0	$\frac{\gamma N}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$	$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N-s}{s/\tau} + 2\Delta \right]$	$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N+s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$
Optimum social	$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N-s}{s/\tau} + 2\Delta \right]$	$\frac{\gamma N}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$	0	$\frac{s}{2\tau} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left[\frac{N-s}{s/\tau} - 2\Delta \right] \left[\frac{N+s}{s/\tau} - 2\Delta \right]$

Sans redistribution, la tarification proposée permet de prélever la globalité du revenu sans que le niveau d'utilité V ne baisse. De plus, si les usagers ont une aversion au risque, leur niveau d'utilité augmentera lorsque cette tarification sera appliquée!

Il reste évidemment à déterminer si le type de tarification suggéré ci-dessus est applicable, et quels sont les coûts nécessaires pour l'instituer.

5.3. Capacité optimale

Dans ce paragraphe, nous calculons les capacités optimales utilisant deux critères différents pour effectuer une analyse coût/bénéfice.

Dans le premier cas, nous supposons que le décideur veut minimiser la somme des coûts totaux d'utilisation CT et des coûts de construction. Pour ce faire, nous désignons par k le coût de construction d'une unité de capacité et nous supposons que le coût unitaire de construction est constant. La capacité optimale \hat{s} est définie par :

$$(30) \quad \hat{s} = \arg \min (CT + ks)$$

Dans le second cas, nous supposons que le décideur a négligé (comme il est usuel de le faire) les coûts dus aux appels précoces ou tardifs. Soit $\hat{\hat{s}}$ la capacité optimale dans ce cas :

$$(31) \quad \hat{\hat{s}} = \arg \min (CTA + ks)$$

De plus, nous désignons par $\hat{s}^n, \hat{\hat{s}}^n$ les capacités lorsque l'équilibre considéré est de type Nash, et par $\hat{s}^0, \hat{\hat{s}}^0$ les capacités optimales dans le cas de l'optimum social [réalisé en appliquant la tarification (24)].

PROPOSITION 5 : Les inégalités suivantes sont toujours respectées :

$$(32 a) \quad \hat{s}^n > \hat{s}^0 \quad \text{et} \quad \hat{\hat{s}}^n > \hat{\hat{s}}^0$$

$$(32 b) \quad s^i > \hat{s}^i, \quad i = n, 0.$$

Les preuves s'obtiennent par simple dérivation en utilisant les expressions (30) et (31). Les inégalités (32 a) traduisent le fait que les capacités des lignes téléphoniques sont nécessairement plus élevées lorsque la compagnie n'a pas l'occasion d'appliquer une tarification optimale. Les inégalités en (32 b) expriment le fait que les capacités sont plus élevées lorsque les coûts relatifs aux appels précoces et tardifs sont inclus dans l'analyse coût/bénéfice (second cas). Il est aussi intéressant de montrer que dans le cas où une tarification optimale est appliquée, les lignes téléphoniques peuvent s'autofinancer. La dérivation de ce résultat s'inspire d'un théorème dû à STROTZ [1965].

6 Conclusions et directions de recherches futures

L'objet principal de cet article a été de montrer que la gestion et l'utilisation d'une infrastructure soumise à la congestion peuvent être améliorées par la modélisation explicite du temps d'utilisation des individus. En traitant les caractéristiques temporelles de la demande de la manière proposée dans cet article, il est possible de déduire des politiques de tarification plus performantes que les politiques de prix calculées par l'analyse conventionnelle. Nous avons aussi introduit le calcul de la capacité optimale. Les analyses conventionnelles, qui ignorent les coûts consécutifs aux appels précoces ou tardifs, et qui modélisent, à notre avis, les aspects temporels d'une manière quelque peu *ad hoc*, donnent lieu à des résultats biaisés. Puisque nous avons montré que les coûts dus aux appels précoces ou tardifs sont du même ordre de grandeur que les coûts dus aux attentes, les ignorer revient vraisemblablement à calculer de manière très imprécise les politiques de tarification et les capacités optimales.

Nous avons développé le modèle présenté ici dans un contexte simplifié en ce qui concerne les aspects d'offre et de demande.

L'approche proposée ici représente le premier stade de développement d'un modèle qui servira de base à la mise au point d'un outil opérationnel pour étudier l'impact de différentes politiques de tarification en présence de congestion. Parmi les extensions nécessaires, nous citerons, du point de vue de l'offre la prise en compte d'un réseau téléphonique plutôt que le cas d'une seule ligne de téléphone et du point de vue de la demande *a*. La prise en compte de l'hétérogénéité des préférences individuelles *b*. La prise en compte de la variabilité des longueurs des communications téléphoniques *c*. La prise en compte, au niveau du calcul des capacités optimales, de l'élasticité de la demande. Outre ces généralisations immédiates, nous suggérons ci-dessous une série d'extensions de l'approche proposée.

6.1. Application des politiques de tarification

La politique de tarification optimale et la construction optimale des réseaux téléphoniques dépend de la technologie relative à l'acquisition de l'information. Par exemple, les tarifs téléphoniques peuvent être basés sur l'instant d'utilisation du téléphone. Nous avons suggéré plus haut qu'une tarification basée plutôt sur le temps d'attente d'un utilisateur pouvait être ($\alpha_c \rightarrow \infty$) socialement optimale. Néanmoins, il existe un coût, que nous avons ignoré, pour acquérir cette information. Pour évaluer une politique de tarification, la compagnie de téléphone devra déterminer le type d'information optimal à communiquer aux usagers et les coûts nécessaires pour l'acheminement de l'information. ⁵

6.2. Ajustement vers l'équilibre

L'analyse présentée ici étudie uniquement l'équilibre de Nash. En réalité, la variabilité de la demande, d'un jour sur l'autre, est vraisemblablement assez importante pour qu'il ne soit acceptable qu'en première approximation, de supposer que les usagers sont parfaitement informés de la distribution de leurs temps d'attente. Par conséquent, il est important de modéliser explicitement les mécanismes par lesquels les usagers expérimentent quotidiennement en vue de déterminer leur moment optimal d'appel. La description de ces processus d'ajustement devrait nous permettre de construire un modèle qui décrit l'évolution vers l'équilibre de Nash. Des résultats ont été obtenus dans un contexte similaire par DE PALMA et LEFÈVRE [1983]; dans ce travail, les auteurs décrivent un processus d'ajustement basé sur un modèle dynamique markovien. L'idée est la suivante: la condition initiale est constituée par une distribution des individus dans les différents états possibles (ici les différents instants où chaque utilisateur décide de téléphoner). Chaque jour, chaque individu a une probabilité de reconsidérer son choix. Si l'individu reconsidère son choix, il choisira un nouveau choix avec une probabilité qui est fonction de ses estimations des utilités correspondant aux différents choix. Un équilibre est obtenu lorsque le nombre d'individus optant pour le même choix (c'est-à-dire ici décidant de téléphoner pendant un intervalle de temps donné) ne varie pas d'un jour à l'autre.

6.3. Concurrence entre compagnies de téléphone

Nous avons supposé que la demande totale pour le téléphone était complètement inélastique. Ceci n'est pas vrai en général mais constitue quand même une hypothèse acceptable étant donné qu'elle ne modifie pas les résultats de la section 4. Néanmoins, la prise en compte explicite de l'élasticité sera essentielle lorsque le modèle proposé sera appliqué pour étudier la concurrence entre différentes compagnies de téléphone. Dans ce cas on considérera un jeu en plusieurs étapes (capacité, nombre de produits offerts, prix...). Nous pensons que ce type d'approche pourrait être appliqué en particulier aux États-Unis. En effet les compagnies nord-américaines sont très intéressées par la modélisation de la demande pour leurs services et par la réaction de leurs concurrents. Dans ce contexte, il sera peut-être utile de concevoir le service offert par une compagnie de téléphone comme un bien différencié (différenciation horizontale ou verticale, GABSZEWICZ et THISSE [1986]).

La détermination de la demande adressée à chaque entreprise est un problème extrêmement complexe, étant donnée la variété des nouveaux services offerts depuis la déréglementation et la multiplicité des tarifications

5. Dans le contexte de la demande pour l'électricité, de nombreuses expériences ont été effectuées aux États-Unis et montrent que si les politiques tarifaires sont trop compliquées, leur impact est très décevant. Il semble que l'envoi de brochures aux usagers pour expliquer le fonctionnement des politiques tarifaires en vigueur ne soit pas en particulier suffisant (BERG [1983]).

proposées. Le consommateur opte pour un service, un type de tarification, le moment de la journée où il appelle et la durée de la conversation. Le nombre de choix possibles est par conséquent extrêmement élevé. Pour aborder ce problème complexe, *ATHERTON et al.* [1986] ont estimé un modèle basé sur la théorie du choix d'un portefeuille d'actions. Cette voie de recherche nous semble prometteuse et il serait intéressant de généraliser le modèle présenté ici pour décrire, outre le choix de l'instant où l'appel a lieu, le choix du service demandé et de la tarification utilisée. Pour ce problème, il devrait être possible de dériver des résultats analytiques qui pourraient être comparés, ne fût-ce que d'un point de vue qualitatif, avec les résultats des modèles de *ATHERTON et al.* [1986] et *TRAIN et al.* [1987].

6.4. Autres services avec demande de pointe

Nous avons développé le modèle de demande proposé dans le cadre du service téléphonique. Il nous semble tentant de développer un modèle semblable dans d'autres contextes. Un cas important correspond à la modélisation de la demande pour l'électricité (voir par exemple *AIGNER* [1985]). Dans ce cas, les compagnies ont intérêt à utiliser des tarifs en fonction de l'heure de la journée et de la probabilité d'interruption du service pour éviter les surcharges. Ces tarifs ont pour effet de retarder ou d'avancer la consommation d'électricité de certains utilisateurs. Nous pensons qu'il serait intéressant d'étudier dans quelles conditions la modélisation proposée ici pourrait être adaptée à la description de la demande d'électricité. Un autre exemple possible d'application correspond à l'étude de tarification pour un ordinateur central travaillant en temps partagé (voir, par exemple, *GALE et KOENKER* [1984]). Le modèle de demande sera semblable, tandis que le modèle d'offre devra tenir compte de la technologie spécifique au temps partagé. Enfin, une dernière application consiste à étudier la transmission de données. Il est vraisemblable que les coûts correspondant à l'attente et à l'arrivée précoce ou tardive de données puissent être identifiés. L'étude de différentes politiques de tarification et en particulier l'étude de l'utilisation de priorités nous semble être très prometteuse.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous démontrons la proposition 2. Le temps d'attente moyen est donné par l'équation suivante :

$$(33) \quad \bar{t}(t_0) = \int_{t_0}^{t_{q'}} (t - t_0) F_{t_0}(t) P(t) dt$$

de sorte que :

$$(34) \quad \bar{t}(t_0) = -t_0 \int_{t_0}^{t_{q'}} F_{t_0}(t) P(t) dt + \int_{t_0}^{t_{q'}} F_{t_0}(t) P(t) dt$$

mais, par définition de $F_{t_0}(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_{q'}} F_{t_0}(t) P(t) dt = 1$$

d'où :

$$(35) \quad \bar{t}(t_0) = -t_0 + \int_{t_0}^{t_{q'}} F_{t_0}(t) P(t) dt.$$

En intégrant par partie, nous obtenons :

$$(36) \quad \bar{t}(t_0) = -t_0 + \left[t \int_{t_0}^t F_{t_0}(u) P(u) du \right]_{t_0}^{t_{q'}} \\ - \int_{t_0}^{t_{q'}} \int_{t_0}^t F_{t_0}(u) P(u) du dt.$$

Mais :

$$(37) \quad \frac{dF_{t_0}(t)}{dt} = -F_{t_0}(t) P(t)$$

de sorte que, utilisant le fait que $F_{t_0}(t_0) = 1$ et que $F_{t_0}(t_{q'}) = 0$, nous obtenons :

$$(38) \quad \bar{t}(t_0) = \int_{t_0}^{t_{q'}} \left[\int_{t_0}^t F_{t_0}(u) du \right] dt$$

d'où :

$$(39) \quad \bar{t}(t_0) = \int_{t_0}^{t_{q'}} F_{t_0}(t) dt$$

Pour calculer cette expression, nous devons évaluer $F_{t_0}(t)$ dans les différents régimes. Nous obtenons

- $t_0 \in [t^* + \Delta, t_q]$

$$(40) \quad F_{t_0}(t) = \left[\frac{t_q - t}{t_q - t_0} \right]^{\alpha/\gamma} \quad \text{pour } t > t_0$$

- $t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta]$

$$(41) \quad F_{t_0}(t) = e^{-\bar{P}(t-t_0)} \quad \text{pour } t_0 < t \leq t^* + \Delta$$

et

$$(42) \quad F_{t_0}(t) = e^{-\bar{P}(t^* + \Delta - t_0)} \left(\frac{t_q - t}{t_q - (t^* + \Delta)} \right)^{\alpha/\gamma}$$

pour $t_0 < t^* + \Delta < t$

- $t_0 \in [t_q, t^* - \Delta]$

$$(43) \quad F_{t_0}(t) = \left(\frac{t_0 - t_q}{t - t_q} \right)^{\alpha/\beta} \quad \text{pour } t_0 < t \leq t^* - \Delta$$

$$(44) \quad F_{t_0}(t) = \left(\frac{t_0 - t_q}{t^* - \Delta - t_q} \right)^{\alpha/\beta} e^{-\bar{P}(t - (t^* - \Delta))}$$

pour $t_0 < t^* - \Delta < t \leq t^* + \Delta$

et

$$(45) \quad F_{t_0}(t) = \left(\frac{t_0 - t_q}{t^* - \Delta - t_q} \right)^{\alpha/\beta} e^{-2\bar{P}\Delta} \left(\frac{t_q - t}{t_q - (t^* + \Delta)} \right)^{\alpha/\beta}$$

pour $t > t^* + \Delta$

Après quelques manipulations nous avons :

- $t_0 \in [t^* + \Delta, t_q]$

$$(46) \quad \bar{i}(t_0) = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} (t_q - t_0)$$

- $t_0 \in [t^* - \Delta, t^* + \Delta]$

$$(47) \quad \bar{i}(t_0) = \frac{1}{\bar{P}} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} e^{-\bar{P}(t^* + \Delta - t_0)} \right)$$

- $t_0 \in [t_q, t^* - \Delta]$

$$(48) \quad \bar{i}(t_0) = (t_0 - t_q) \left\{ \frac{\beta}{\alpha - \beta} - \left[\frac{t_0 - t_q}{t^* - \Delta - t_q} \right]^{(\alpha - \beta)/\beta} \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha - \beta} \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} e^{-2\Delta\bar{P}} \right] \right\}$$

Il est clair que $\bar{i}(t_q) = \bar{i}(t_q) = 0$. De plus, l'on peut montrer aisément que $\bar{i}(t_0)$ est une fonction concave de t_0 , qui est différentiable partout, pour

$t \in [t_q, t_q]$, y compris en $t^* - \Delta$ et $t^* + \Delta$. Nous avons :

$$(49) \quad \frac{d\bar{t}(t_0)}{dt_0} = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha > \beta \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq \beta \\ -\frac{\gamma}{\alpha + \gamma} e^{-2\Delta\bar{P}} & \text{pour } t_0 = t^* - \Delta \\ -\frac{\gamma}{\alpha + \gamma} & \text{pour } t_0 \in [t^* + \Delta, t_q] \end{cases} \quad \text{pour } t_0 = t_q$$

avec $\bar{P} \equiv \alpha(\gamma + 1) / \{\gamma(N - s)(s/\tau) - 2\gamma\Delta\}$.

● Références bibliographiques

- AIGNER, D. et HIRCHBERG, J. (1985). — « Commercial/Industrial Customer Response to Time-of-Use Elasticity Prices: Some Experimental Results », *Rand Journal of Economics*, 16, p. 341-355.
- ATHERTON, T., BEN-AKIVA, M., JESSIMAN, W. et LUNG, R. (1986). — « Micro-Simulation with Discrete Choice Models to Evaluate Alternative Residential Telephone Service Options and Rate Structures », *Cambridge Systematic*, papier présenté à la conférence « Telecommunications Demand Modeling », Nouvelle Orléans, Octobre 1985
- BENES, V. E. (1965). — *Mathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic*, Academic Press, New York.
- BERG, S. (1983). — *Innovative Electric Rates*, Lexington, Mass: Lexington Books.
- DE PALMA, A. et LEFÈVRE, C. (1983). — « Individual Decision Making in Dynamic Collective Systems », *Journal of Mathematical Sociology*, 9, p. 103-124.
- GABSZEWICZ, J. et THISSE, J. F. (1986). — « On the Nature of Competition with Differentiated Products », *The Economics Journal*, 96, p. 160-172.
- GALE, W. A. et KOENKER, R. (1984). — « Pricing Interactive Computer Services », *The Computer Journal*, 27, n° 1, p. 8-17.
- HOBSON, M. et SPADY, R. (1988). — « The Demand for Local Telephone Service Under Optimal Local Measured Service », papier présenté à la 7^e conférence internationale sur les télécommunications, Boston, juin 1988.
- MANSKI, C. (1984). — « Modelling the Demand for Local Telephone Service », Université de Wisconsin, département d'économie, mimeo.
- MITCHELL, M. B. (1978 a). — « Optimal Pricing of Local Telephone Service », *American Economic Review*, 68, p. 517-537.
- MITCHELL, M. B. (1978 b). — « Pricing Policies in Selected European Telephone Systems », presented at the Sixth Annual Telecommunication Policy Research Conference, Aislie, Virginia.
- NEWELL, G. F. (1982). — *Application of Queuing Theory*, Chapman and Hall, Londres et New York.
- NGUYEN, M. (1986). — « Simulation of Time-of-Day Elasticities Using Aggregate Elasticity and Window-of-Convenience Demand Profile », AT&T Communications, papier présenté à la 6^e Conférence Internationale sur la Prévision, Paris, Juin 1986.

- STROTZ, R. H. (1965). — «Urban Transportation Parables», dans *The Public Economy of Urban Communities*, J. MARGOLIS éd., Resources of the Future, Washington, D. C.
- SYSTIC, R. (1985). — *Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems*, North-Holland, New York.
- TAYLOR, L. (1979). — *Telecommunication Demand: A Survey and Critique*, Ballinger Publishing Company, Cambridge.
- TRAIN, K., McFADDEN, D. et BEN-AKIVA, M. (1987). — «The Demand for Local Telephone Service: a Fully Discrete Model of Residential Calling Patterns and Service Choices», *Rand Journal of Economics*, 18, p. 109-102.
- TELECOMMUNICATION DEMAND MODELLING CONFERENCE (1985). — Nouvelle Orléans, octobre.
- VILMIN, E. et CURIEN, N. (1985). — «Influence de la tarification horaire sur le trafic téléphonique», *Annales des Télécommunications*, 40, n° 9-10, 1/15-15/15.
- VICKREY, W. (1969). — «Congestion Theory and Transport Investment», *American Economic Review*, 59, p. 251-261.