ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. - N° 10 — 1988

L'enchère optimale dans l'hypothèse de dépendance des évaluations : une caractérisation

Florence NAEGELEN *

RÉSUMÉ. – Sous l'hypothèse d'information incomplète du vendeur sur les dispositions à payer des acheteurs potentiels, neutres envers le risque, une enchère optimale ne permet pas l'appropriation de la totalité du surplus des agents lorsque leurs évaluations sont indépendantes. Ce résultat n'est cependant plus vérifié lorsque les évaluations sont corrélées. L'objet de cet article est d'expliciter la forme des fonctions d'attribution et de paiement d'un mécanisme permettant l'appropriation de tout le surplus dans le cadre du modèle à deux agents, dont les évaluations, susceptibles de prendre deux valeurs, sont corrélées positivement ou négativement.

Optimal Auction with Dependent Values: a Characterization

ABSTRACT. – When the seller has only incomplete information about the agents' willingness to pay for the good up for sale, under the hypothesis of risk neutraly, an optimal auction does not lead to the full appropriation of the surplus by the seller when the agents' evaluations are independent. This result is however no more valid when those evaluations are correlated. The object of this article is to explicit the attribution and paiement rules of an auction which enables the seller to capture the full surplus in a model with two agents, when the evaluations, which can assume two values, are positively or negatively correlated.

---

* F. NAEGELEN : Université de Besançon, 25030 Besançon Cedex. Je remercie C. D'ASPREMONT, J. J. LAFONT et M. MOUGEOT pour leurs commentaires sur la première version de ce texte. Cette recherche a bénéficié du soutien du Commissariat Général au Plan.

1 Introduction

On sait depuis les travaux de Pigou [1920] que l'appropriation du surplus du consommateur par un vendeur en position de monopole est possible lorsque celui-ci peut pratiquer une discrimination parfaite. On sait aussi que l'obstacle principal à la mise en œuvre d'une telle discrimination est d'ordre informationnel. Depuis quelques années, la théorie des enchères a apporté des éléments de réponse à ce problème par la définition de mécanismes maximisant le revenu du vendeur, sous l'hypothèse de neutralité des agents envers le risque. Les résultats obtenus montrent que l'appropriation de la totalité du surplus issu de la vente de l'objet n'est pas toujours possible. Le but de cet article est de caractériser un mécanisme optimal permettant l'appropriation de tout le surplus lorsque les évaluations des agents pour le bien mis en vente ne sont pas indépendantes.

Considérons un vendeur d'un bien indivisible, sans valeur pour lui, et un ensemble d'acheteurs potentiels. Chacun de ces acheteurs attribue à l'objet une valeur v_i positive, assimilée à sa caractéristique et représentant sa disposition à payer pour le bien. Sous l'hypothèse d'information parfaite du vendeur sur ces dispositions à payer, la procédure de vente optimale consiste à proposer l'objet pour un prix de vente irrévocable, égal à la plus forte disposition à payer. L'objet est alors acquis par l'agent dont l'évaluation est égale au prix annoncé (seul cet agent a intérêt à accepter l'offre) et le vendeur obtient ainsi le revenu maximal, en s'appropriant la totalité du surplus de l'agent.

Si l'on admet en revanche une hypothèse d'information incomplète du vendeur sur les dispositions à payer des agents, les résultats relatifs aux possibilités d'appropriation du surplus résultant du transfert de l'objet du vendeur à l'agent pour lequel il présente une valeur plus élevée, diffèrent considérablement suivant la nature des hypothèses relatives aux évaluations des acheteurs. On peut, à cet égard, retenir deux hypothèses. Lorsque chaque agent attribue au bien une valeur strictement personnelle, qu'il ne modifierait pas s'il apprenait les évaluations de ses concurrents, on est en présence d'un *modèle à valeurs privées indépendantes.* Si l'on considère en revanche que le bien présente pour chaque agent une valeur dépendant à la fois d'éléments purement individuels et de l'appréciation des autres agents, on a alors un *modèle à valeurs interdépendantes.* Il peut en être ainsi pour les œuvres d'art, dont la valeur pour un individu est susceptible de dépendre de ses goûts personnels, ainsi que des avis d'experts ou de l'appréciation d'autres agents.

Sous la première hypothèse, si vendeurs et acheteurs sont neutres vis-à-vis du risque, Myerson [1981] et Riley et Samuelson [1981] ont montré qu'un mécanisme optimal correspond à une enchère de Vickrey (ou appel d'offres au deuxième prix) assortie d'un prix de réserve, lorsque les évaluations sont distribuées selon une loi de probabilité continue. Cette procédure ne permet pas au vendeur de s'approprier la totalité du surplus des consommateurs. Plus précisément, l'espérance de revenu du vendeur *ex ante* est inférieure à celle qu'il pourrait obtenir s'il recourait à une procédure optimale dans le cas d'information complète sur les dispositions à payer.

Sous l'hypothèse d'interdépendance, la connaissance de l'évaluation d'un agent apporte par définition de l'information sur les évaluations des autres. Le vendeur peut par conséquent essayer d'exploiter cette dépendance pour s'approprier une plus grande part du surplus. Ainsi CREMER et MACLEAN [1985 *a*], [1985 *b*] ont montré, en considérant une distribution discrète des évaluations, qu'il est possible de déterminer des mécanismes permettant au vendeur de s'approprier la totalité du surplus des consommateurs, sous certaines conditions relatives à la structure d'information, c'est-à-dire aux ensembles de définition et à la distribution des caractéristiques des agents. Ces conditions excluent le cas d'indépendance. Cremer et MacLean se sont toutefois intéressés essentiellement à l'existence de ces mécanismes. L'objet de cet article est d'étudier la forme précise de mécanismes d'enchères permettant l'appropriation de tout le surplus, lorsque les évaluations ne sont pas indépendantes. Compte tenu de la complexité du problème dans le cas discret, la caractérisation est réalisée à partir d'un exemple permettant d'obtenir des résultats facilement interprétables. Les règles d'attribution et de paiement sont explicitées dans le cas d'une dépendance positive, puis d'une dépendance négative après qu'il ait été montré pourquoi l'appropriation de tout le surplus est impossible lorsque les évaluations des agents sont indépendantes.

2 Le modèle

Considérons une enchère à laquelle participent deux agents i, $i \in \{1, 2\}$, chacun ayant une disposition à payer v_i susceptible de prendre deux valeurs, v_H ou v_L, avec $v_H > v_L > 0$. L'évaluation de chaque agent n'est connue que de lui seul. Le vendeur a des croyances sur le couple (v_1, v_2) représentées par la distribution de probabilité $p(.,.)$ et compte tenu de son évaluation v_i, chaque agent i a une distribution de probabilité conditionnelle sur l'évaluation adverse qui est cohérente avec $p(.,.)$. En d'autres termes, les probabilités conditionnelles $p_1(v_2/v_1)$ et $p_2(v_1/v_2)$ sont telles que :

$$p_1(v_2/v_1) = \frac{p(v_1, v_2)}{p_1(v_1)}$$

et

$$p_2(v_1/v_2) = \frac{p(v_1, v_2)}{p_2(v_2)}$$

lorsque $p_1(v_1)$ et $p_2(v_2)$ représentent respectivement les probabilités marginales de v_1 et v_2, $\forall v_1 \in \{v_H, v_L\}$, $\forall v_2 \in \{v_H, v_L\}$.

On suppose d'autre part que les croyances sont symétriques : $\forall x \in \{v_H, v_L\}, \forall y \in \{v_H, v_L\}$:

$$p_1(v_2 = x/v_1 = y) = p_2(v_1 = x/v_2 = y)$$

et

$$p(x, y) = p(y, x)$$

Dans ce contexte, une enchère est caractérisée par des règles d'attribution $q_i(v_1, v_2)$ et des règles de paiement $t_i(v_1, v_2)$, pour $i = 1, 2$, où $q_i(v_1, v_2)$ représente la probabilité qu'a l'agent i d'obtenir l'objet et $t_i(v_1, v_2)$ son paiement espéré lorsque le vecteur des évaluations annoncées est $v = (v_1, v_2)$.

En raison de l'incomplétude d'information et en application du principe de révélation, la détermination de l'enchère optimale peut être assimilée à la détermination des règles d'attribution et de paiement $q_i(v)$ et $t_i(v)$ qui maximisent l'espérance mathématique de revenu du vendeur sous trois contraintes :

– une contrainte incitative qui garantit que la vérité constitue une stratégie d'équilibre bayesien;

– une contrainte de rationalité individuelle qui garantit que les agents ont intérêt à participer à la procédure;

– une contrainte de réalisabilité qui assure que la solution obtenue appartient à l'ensemble des possibles.

Compte tenu des notations adoptées, le problème consiste à déterminer les règles d'attribution et de paiement $q_1(v_1, v_2)$, $t_1(v_1, v_2)$, $q_2(v_1, v_2)$, $t_2(v_1, v_2)$ qui maximisent ER, avec :

$$\begin{aligned} \mathrm{ER} = {} & p(v_H, v_H) \cdot \Sigma_i t_i(v_H, v_H) + p(v_H, v_L) \cdot \Sigma_i t_i(v_H, v_L) \\ & + p(v_L, v_H) \cdot \Sigma_i t_i(v_L, v_H) + p(v_L, v_L) \cdot \Sigma_i t(v_L, v_L) \end{aligned}$$

sous les contraintes

– *incitatives :*

La vérité constitue une stratégie d'équilibre bayesien du jeu associé au mécanisme représenté par les fonctions q_i et t_i, $\forall i \in \{1, 2\}$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v_1 \in \{v_H, v_L\}, \qquad \forall v'_1 \in \{v_H, v_L\}, \qquad v_1 \neq v'_1 \\ p_1(v_2^H/v_1) \cdot [v_1 \cdot q_1(v_1, v_2^H) - t_1(v_1, v_2^H)] \\ + p_1(v_2^L/v_1)[v_1 \cdot q_1(v_1, v_2^L) - t_1(v_1, v_2^L)] \\ \geqslant p_1(v_2^H/v_1) \cdot [v_1 \cdot q_1(v'_1, v_2^H) - t_1(v'_1, v_2^H)] \\ + p_1(v_2^L/v_1) \cdot [v_1 \cdot q_1(v'_1, v_2^L) - t_1(v'_1, v_2^L)] \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v_2 \in \{v_H, v_L\}, \qquad \forall v'_2 \in \{v_H, v_L\}, \qquad v_2 \neq v'_2 \\ p_2(v_1^H/v_2) \cdot [v_2 \cdot q_1(v_1^H, v_2) - t_2(v_1^H, v_2)] \\ + p_2(v_1^L/v_2)[v_2 \cdot q_2(v_1^L, v_2) - t_2(v_1^L, v_2)] \\ \geqslant p_2(v_1^H/v_2)[v_2 \cdot q_2(v_1^H, v'_2) - t_2(v_1^H, v'_2)] \\ + p_2(v_1^L/v_2)[v_2 \cdot q_2(v_1^L, v'_2) - t_2(v_1^L, v'_2)] \end{array} \right.$$

— *de rationalité individuelle :*

Les agents ont intérêt à participer à la procédure, l'espérance de profit alternatif étant ici normalisée à 0 :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall v_1 \in \{v_H, v_L\} \\ p_1(v_2^H/v_1)[v_1 . q_1(v_1, v_2^H) - t_1(v_1, v_2^H)] \\ \quad + p_1(v_2^L/v_1)[v_1 . q_1(v_1, v_2^L) - t_1(v_1, v_2^L)] \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \forall v_2 \in \{v_H, v_L\} \\ p_2(v_1^H/v_2)[v_2 . q_2(v_1^H, v_2) - t_2(v_1^H, v_2)] \\ \quad + p_2(v_1^L/v_2)[v_2 . q_2(v_1^L, v_2) - t_1(v_1^L, v_2)] \geqslant 0 \end{cases}$$

— *de réalisabilité :*

Un seul objet étant à attribuer, la somme des probabilités que chacun des agents obtienne l'objet doit être inférieure ou égale à 1 :

$$(5) \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall v_1 \in \{v_H, v_L\}, \quad \forall v_2 \in \{v_H, v_L\} \\ q_i(v_1, v_2) \geqslant 0 \\ q_1(v_1, v_2) + q_2(v_1, v_2) \leqslant 1 \end{cases}$$

3 L'impossibilité d'extraire la totalité du surplus dans le cas d'évaluations privées indépendantes

Une enchère permet l'appropriation de la totalité du surplus résultant du transfert du bien si l'espérance mathématique de revenu du vendeur *ex ante* est la même que celle qu'il pourrait obtenir s'il avait une information complète sur les dispositions à payer des acheteurs. Par suite l'enchère définie par les règles d'attribution et de paiement $q_i(v)$ et $t_i(v)$, $\forall i \in \{1, 2\}$, permet l'appropriation de tout le surplus si ER est égale à :

$$p(v_H, v_H) . v_H + p(v_H, v_L) . v_H + p(v_L, v_H) . v_H + p(v_L, v_L) . v_L .$$

Si l'on considère le cas particulier dans lequel les évaluations v_1 et v_2 sont indépendantes et prennent les valeurs v_H et v_L avec les probabilités respectives p et $(1-p)$, alors on peut montrer qu'un tel résultat ne peut être atteint. En d'autres termes, il est impossible dans ces conditions de définir un mécanisme d'enchère permettant d'extraire tout le surplus. Pour montrer un tel résultat, on peut utiliser le lemme suivant dont la preuve est immédiate. [1]

LEMME : L'enchère caractérisée par les règles q_i, t_i permet au vendeur d'extraire la totalité du surplus des acheteurs si et seulement si :

(i) les contraintes de rationalité individuelle sont satisfaites à l'égalité, pour chacun des agents, quelle que soit son évaluation.

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{2} q_i(v_1, v_2) = 1 \quad \text{si} \quad \max_i v_i > 0, \\ \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall v_i \in \{v_H, v_L\} \\ q_j(v_1, v_2) = 0 \quad \text{si} \quad v_j \neq \max_i v_i, \\ \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall j \in \{1, 2\}, \quad v_j \in \{v_H, v_L\} \end{cases}$$

Compte tenu de ce lemme, on peut établir la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : Si les évaluations v_1 et v_2 sont indépendantes et prennent la valeur v_H avec la probabilité p et v_L avec la probabilité $(1-p)$, alors il n'existe pas de mécanisme d'enchère tel que la vérité soit stratégie d'équilibre bayesien pour tous les agents et qui permette au vendeur d'extraire la totalité du surplus des acheteurs.

Preuve : Dans ce cas particulier, on a :

$$p_1(v_2^H/v_1) = p_2(v_1^H/v_2) = p,$$
$$\forall v_1 \in \{v_H, v_L\}, \quad \forall v_2 \in \{v_H, v_L\}$$
$$p_1(v_2^L/v_1) = p_2(v_1^L/v_2) = (1-p),$$
$$\forall v_1 \in \{v_H, v_L\}, \quad \forall v_2 \in \{v_H, v_L\}$$

Supposons que la contrainte de rationalité individuelle de l'agent 1 soit satisfaite à l'égalité lorsque son évaluation est v_L. D'après (3) et compte tenu des nouvelles hypothèses, on a :

$$\text{(6)} \quad \begin{aligned} & p \cdot [v_1^L \cdot q_1(v_1^L, v_2^H) - t_1(v_1^L, v_2^H)] \\ & + (1-p)[v_1^L \cdot q_1(v_1^L, v_2^L) - t_1(v_1^L, v_2^L)] = 0 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $v_1^H > v_1^L$, d'après (6) et la condition (ii) du lemme, on obtient :

$$\text{(7)} \quad \begin{aligned} & p[v_1^H \cdot q_1(v_1^L, v_2^H) - t_1(v_1^L, v_2^H)] \\ & + (1-p)[v_1^H \cdot q_1(v_1^L, v_2^L) - t_1(v_1^L, v_2^L)] > 0 \end{aligned}$$

1. Cf. CREMER et MACLEAN [1985 *a*].

En utilisant (7), on obtient alors, d'après (1) :

$$(8) \qquad p\,[v_1^{\mathrm{H}} \cdot q_1(v_1^{\mathrm{H}}, v_2^{\mathrm{H}}) - t_1(v_1^{\mathrm{H}}, v_2^{\mathrm{H}})] + (1-p)\,[v_1^{\mathrm{H}} \cdot q_1(v_1^{\mathrm{H}}, v_2^{\mathrm{L}}) - t_1(v_1^{\mathrm{H}}, v_2^{\mathrm{L}})] > 0$$

Compte tenu de (6) et (8), lorsque la contrainte de rationalité individuelle est satisfaite pour un agent dont l'évaluation est v_{L}, elle ne peut l'être pour un agent dont l'évaluation est v_{H} lorsque l'annonce de la vérité constitue une stratégie d'équilibre bayesien, et lorsque l'objet est toujours attribué. Par suite, la condition (i) du lemme ne peut être satisfaite et l'on ne peut définir un mécanisme permettant d'extraire tout le surplus.

On peut caractériser l'enchère optimale dans le cas symétrique sous cette hypothèse d'indépendance à partir du programme de la section 2, en considérant le cas d'un seul agent (l'agent 1).

Si l'on note pour simplifier :

$$\forall i \in \{\mathrm{H}, \mathrm{L}\}, \qquad \forall j \in \{\mathrm{H}, \mathrm{L}\}$$
$$t_1(v_1^i, v_2^j) = t_{ij}$$
$$q_1(v_1^i, v_2^j) = q_{ij}$$

et si l'on définit t_{H} (resp. t_{L}) comme le paiement espéré de l'agent 1 lorsque son évaluation est v_{H} (resp. v_{L}) et q_{H} (resp. q_{L}) comme sa probabilité de gagner lorsque son évaluation est v_{H} (resp. v_{L}), c'est-à-dire :

$$t_{\mathrm{H}} = p \,.\, t_{\mathrm{HH}} + (1-p)\, t_{\mathrm{HL}}$$
$$t_{\mathrm{L}} = p \,.\, t_{\mathrm{LH}} + (1-p)\, t_{\mathrm{LL}}$$
$$q_{\mathrm{H}} = p \cdot q_{\mathrm{HH}} + (1-p)\, q_{\mathrm{HL}}$$
$$q_{\mathrm{L}} = p \cdot q_{\mathrm{LH}} + (1-p)\, q_{\mathrm{LL}},$$

le programme de la section 1 devient :

$$\underset{t_{\mathrm{H}},\, t_{\mathrm{L}},\, q_{\mathrm{H}},\, q_{\mathrm{L}}}{\mathrm{Max}} \quad p\, t_{\mathrm{H}} + (1-p)\, t_{\mathrm{L}}$$

sous les contraintes :

$$[\mathrm{I_H}] \qquad v_{\mathrm{H}} \cdot q_{\mathrm{H}} - t_{\mathrm{H}} \geqslant v_{\mathrm{H}} \cdot q_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{L}}$$

$$[\mathrm{I_L}] \qquad v_{\mathrm{L}} \cdot q_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{L}} \geqslant v_{\mathrm{L}} \cdot q_{\mathrm{H}} - t_{\mathrm{H}}$$

$$[\mathrm{R_H}] \qquad v_{\mathrm{H}} \cdot q_{\mathrm{H}} - t_{\mathrm{H}} \geqslant 0$$

$$[\mathrm{R_L}] \qquad v_{\mathrm{L}} \cdot q_{\mathrm{L}} - t_{\mathrm{L}} \geqslant 0$$

$$[\mathrm{P_1}] \qquad \frac{1}{2} p + (1-p) \geqslant q_{\mathrm{H}}$$

$$[\mathrm{P_2}] \qquad \frac{1}{2} \geqslant p \cdot q_{\mathrm{H}} + (1-p)\, q_{\mathrm{L}}$$

$$[\mathrm{P_3}] \qquad q_{\mathrm{H}} \geqslant 0$$

$$[\mathrm{P_4}] \qquad q_{\mathrm{L}} \geqslant 0$$

Les contraintes $[P_1]$ et $[P_2]$ garantissent que dans le cas symétrique, q_{HH} est au plus égal à $\frac{1}{2}$ et q_{HL} au plus égal à 1 et que, quelle que soit l'évaluation de l'agent 1, sa probabilité de gagner ne peut excéder $\frac{1}{2}$.

En notant respectivement α, β, γ, δ, μ, η les variables duales associées respectivement aux contraintes $[I_H]$, $[R_L]$, $[P_1]$ à $[P_4]$, on obtient :

$$p-\alpha=0$$

$$1-p+\alpha-\beta=0$$

$$\alpha v_H-\gamma-\delta p+\mu=0$$

$$-\alpha v_H+\beta v_L-\delta(1-p)+\eta=0$$

La résolution de ce programme fait apparaître deux enchères optimales, selon que $v_L > p\, v_H$ ou $v_L < p\, v_H$.

Si $v_L > p\ v_H$, $q_H > 0$, $q_L > 0$, on obtient :

$$t_H=\frac{1}{2}\,.\,v_H+\frac{1}{2}(1-p)\,.\,v_L$$

$$t_L=\frac{1}{2}(1-p)\,.\,v_L$$

$$q_H=\frac{1}{2}p+(1-p)$$

$$q_L=\frac{1}{2}(1-p)$$

et l'on vérifie que les contraintes $[I_L]$ et $[R_H]$ ne sont pas saturées.

La procédure obtenue s'interprète [2] comme une enchère dans laquelle les agents ont le choix entre offrir v_L ou $t=\dfrac{1/2\,.\,v_H+1/2\,.\,(1-p)\,v_L}{1/2\,.\,p+(1-p)}$, l'objet étant attribué au plus offrant pour un prix égal à son offre, avec tirage au sort en cas d'égalité. Comme $t > v_L$, un agent avec une évaluation v_L offre v_L alors qu'un agent dont l'évaluation est v_H est indifférent entre offrir t ou v_L (la contrainte $[I_H]$ étant saturée). Compte tenu de ces stratégies, un agent dont l'évaluation est v_L gagne avec une probabilité $\frac{1}{2}(1-p)$ alors qu'un agent dont l'évaluation est v_H gagne avec une probabilité $\frac{1}{2}p+(1-p)$.

2. Cf. MASKIN et RILEY [1985].

Si $v_L < p \cdot v_H$, $q_H > 0$, $q_L = 0$, on obtient :

$$t_H = v_H \cdot q_H$$
$$q_H = \frac{1}{2}p + (1-p)$$

Cette procédure s'interprète comme une enchère dans laquelle le vendeur fixe un prix de réserve, c'est-à-dire un niveau minimal des offres admissibles, égal à v_H. Dès lors, seul un agent ayant une évaluation v_H a intérêt à participer à la procédure et sa probabilité de gagner est $\frac{1}{2}p + (1-p)$.

Dans aucun des cas, le vendeur ne peut s'approprier la totalité du surplus des agents. En effet, les agents ne payant rien lorsqu'ils perdent, on a dans le premier cas $t < v_H$. Dans le second cas, l'objet n'est pas attribué lorsque les deux agents ont une évaluation égale à v_L.

4 Détermination du mécanisme optimal dans l'hypothèse de dépendance des évaluations

Supposons maintenant que les évaluations ne sont pas indépendantes. L'absence d'indépendance est caractérisée par la relation :

$$p(v_1^H, v_2^H) \cdot p(v_1^L, v_2^L) \neq p(v_1^H, v_2^L) \cdot p(v_1^L, v_2^H)$$

Cette relation est elle-même susceptible de représenter deux formes de dépendance : une dépendance positive et une dépendance négative. La dépendance positive correspond à la situation dans laquelle chaque agent pense qu'il est plus probable que son adversaire ait une évaluation forte plutôt que faible lorsqu'il a lui-même une évaluation forte (et inversement). La dépendance négative correspond en revanche à la situation dans laquelle chaque agent pense qu'il est plus probable que l'évaluation de son adversaire soit faible plutôt que forte lorsqu'il a lui-même une évaluation forte (et inversement).

Formellement, la dépendance positive se traduit dans le cas de deux agents avec deux évaluations possibles par les relations :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \qquad \forall j \in \{1, 2\}, \qquad j \neq i$$
$$p_i(v_j = v_H / v_i = v_H) > p_i(v_j = v_L / v_i = v_H)$$

et

$$p_i(v_j = v_L / v_i = v_L) > p_i(v_j = v_H / v_i = v_L)$$

ou la relation suivante, que nous utiliserons :

$$p_1(v_2^H/v_1^H) \cdot p_1(v_2^L/v_1^L) > p_1(v_2^H/v_1^L) \cdot p_1(v_2^L/v_1^H)$$

De même la dépendance négative se traduit par les relations :

$$p_i(v_j = v_H/v_i = v_L) > p_i(v_j = v_L/v_i = v_L)$$

et

$$p_i(v_j = v_L/v_i = v_H) > p_i(v_j = v_H/v_i = v_H)$$

ou la relation suivante que nous utiliserons :

$$p_1(v_2^H/v_1^H) \cdot p_1(v_2^L/v_1^L) < p_1(v_2^H/v_1^L) \cdot p_1(v_2^L/v_1^H)$$

Sous ces hypothèses de dépendance des évaluations, les règles d'attribution et de paiement permettant au vendeur d'extraire la totalité du surplus des agents peuvent être déterminées en utilisant les conditions du lemme. On recherche alors les fonctions $q_i(v_1, v_2)$ et $t_i(v_1, v_2)$, $\forall\, i \in \{1, 2\}$ telles que :

$$(9)\quad \begin{cases} q_1(v_1^H, v_2^H) = q_2(v_1^H, v_2^H) = q_1(v_1^L, v_2^L) = q_2(v_1^L, v_2^L) = \dfrac{1}{2}. \\ q_1(v_1^H, v_2^L) = q_2(v_1^L, v_2^H) = 1 \\ q_1(v_1^L, v_2^H) = q_2(v_1^H, v_2^L) = 0 \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \forall\, v_1 \in \{v_H, v_L\} \\ p_1(v_2^H/v_1)\,[v_1 \cdot q_1(v_1, v_2^H) - t_1(v_1, v_2^H)] \\ + p_1(v_2^L/v_1)\,[v_1 \cdot q_1(v_1, v_2^L) - t_1(v_1, v_2^L)] = 0 \end{cases}$$

$$(10')\quad \begin{cases} \forall\, v_2 \in \{v_H, v_L\} \\ p_2(v_1^H/v_2)\,[v_2 \cdot q_2(v_1^H, v_2) - t_2(v_1^H, v_2)] \\ + p_2(v_1^L/v_2) \cdot [v_2 \cdot q_2(v_1^L, v_2) - t_2(v_1^L, v_2)] = 0 \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \forall\, v_1 \in \{v_H, v_L\}, \quad \forall\, v_1' \in \{v_H, v_L\}, \quad v_1 \neq v_1' \\ p_1(v_2^H/v_1)\,[v_1 \cdot q_1(v_1', v_2^H) - t_1(v_1', v_2^H)] \\ + p_1(v_2^L/v_1)\,[v_1 \cdot q_1(v_1', v_2^L) - t_1(v_1', v_2^L)] < 0 \end{cases}$$

$$(11')\quad \begin{cases} \forall\, v_2 \in \{v_H, v_L\}, \quad \forall\, v_2' \in \{v_H, v_L\}, \quad v_2 \neq v_2' \\ p_2(v_1^H/v_2) \cdot [v_2 \cdot q_2(v_1^H, v_2') - t_2(v_1^H, v_2')] \\ + p_2(v_1^L/v_2) \cdot [v_2 \cdot q_2(v_1^L, v_2') - t_2(v_1^L, v_2')] < 0 \end{cases}$$

La condition (9) correspond à la condition (ii) du lemme. Les conditions (10) et (10′) assurent que la contrainte de rationalité individuelle des deux agents sont satisfaites quelle que soit leur évaluation. Les conditions (11) et (11′) garantissent que l'annonce de la vérité est stratégie d'équilibre bayesien : aucun des deux agents n'a intérêt à annoncer v_L quand son évaluation est v_H et inversement, lorsque son adversaire annonce la vérité.

Si l'on admet que les croyances sont symétriques, compte tenu de la symétrie des fonctions d'attribution, on peut considérer des paiements symétriques caractérisés par :

$$t_1(v_1=x,\ v_2=y)=t_2(v_1=y,\ v_2=x)$$

et ne considérer que le cas de l'agent 1.

Si l'on adopte comme précédemment les notations suivantes :

$$\forall i \in \{\mathrm{H},\ \mathrm{L}\}, \qquad \forall j \in \{\mathrm{H},\ \mathrm{L}\}$$
$$p_1(v_2^j/v_1^i)=k_{ij}$$
$$t_1(v_1^i,\ v_2^j)=t_{ij}$$
$$q_1(v_1^i,\ v_2^j)=q_{ij}$$

les règles d'attribution et de paiement sont définies par :

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} q_{\mathrm{HH}} = q_{\mathrm{LL}} = \dfrac{1}{2} \\ q_{\mathrm{HL}} = 1 \\ q_{\mathrm{LH}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{(13)} \qquad \left(\frac{1}{2}v_{\mathrm{H}}-t_{\mathrm{HH}}\right).k_{\mathrm{HH}}+(v_{\mathrm{H}}-t_{\mathrm{HL}}).k_{\mathrm{HL}}=0$$

$$\text{(14)} \qquad (0.v_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{LH}}).k_{\mathrm{LH}}+\left(\frac{1}{2}v_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{LL}}\right).k_{\mathrm{LL}}=0$$

$$\text{(15)} \qquad (0.v_{\mathrm{H}}-t_{\mathrm{LH}}).k_{\mathrm{HH}}+\left(\frac{1}{2}v_{\mathrm{H}}-t_{\mathrm{LL}}\right).k_{\mathrm{HL}}\leqslant 0$$

$$\text{(16)} \qquad \left(\frac{1}{2}v_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{HH}}\right).k_{\mathrm{LH}}+(1.v_{\mathrm{L}}-t_{\mathrm{HL}}).k_{\mathrm{LL}}\leqslant 0$$

A partir des équations (13) à (16), il est possible de déterminer les paiements t_{ij}, solutions du programme de maximisation de l'espérance mathématique de revenu du vendeur. De (13) et (14), on tire :

$$\text{(17)} \qquad t_{\mathrm{HL}}=\frac{(1/2).k_{\mathrm{HH}}+k_{\mathrm{HL}}).v_{\mathrm{H}}-k_{\mathrm{HH}}.t_{\mathrm{HH}}}{k_{\mathrm{HL}}}$$

$$\text{(18)} \qquad t_{\mathrm{LH}}=\frac{1/2.k_{\mathrm{LL}}.v_{\mathrm{L}}-k_{\mathrm{LL}}.t_{\mathrm{LL}}}{k_{\mathrm{LH}}}$$

Comme $k_{\mathrm{HL}}.k_{\mathrm{LH}}-k_{\mathrm{HH}}.k_{\mathrm{LL}}\neq 0$, on peut déterminer t_{LL} et t_{HH} à partir de (15) et (16) en utilisant (17) et (18). Si $k_{\mathrm{HL}}.k_{\mathrm{LH}}-k_{\mathrm{LL}}.k_{\mathrm{HH}}<0$, on obtient :

$$\text{(19)} \qquad t_{\mathrm{LL}}\leqslant\frac{1/2.k_{\mathrm{LH}}.k_{\mathrm{HL}}.v_{\mathrm{H}}-1/2.k_{\mathrm{LL}}.k_{\mathrm{HH}}.v_{\mathrm{L}}}{k_{\mathrm{HL}}.k_{\mathrm{LH}}-k_{\mathrm{HH}}.k_{\mathrm{LL}}}=\mathrm{A}$$

$$\text{(20)} \qquad t_{\mathrm{HH}}\leqslant\frac{k_{\mathrm{HL}}(1/2.k_{\mathrm{LH}}+k_{\mathrm{LL}})\,v_{\mathrm{L}}-k_{\mathrm{LL}}(1/2.k_{\mathrm{HH}}+k_{\mathrm{HL}})\,v_{\mathrm{H}}}{k_{\mathrm{HL}}.k_{\mathrm{LH}}-k_{\mathrm{HH}}.k_{\mathrm{LL}}}=\mathrm{B}$$

Si $k_{HL} . k_{LH} - k_{LL} . k_{HH} > 0$, on obtient

(21) $t_{LL} \geqslant A$

(22) $t_{HH} \geqslant B$

PROPOSITION 2 : Dans le cadre des hypothèses adoptées, le mécanisme optimal est défini par les règles d'attribution (12) et les règles de paiement (17), (18) et (19), (20) ou (21), (22), selon la nature de la dépendance entre les évaluations.

5 Caractérisation du mécanisme

Les inégalités qui apparaissent dans l'expression des paiements impliquent l'existence d'une infinité de solutions du programme défini par les équations (13) à (16). Pour interpréter ces paiements et mettre en évidence les caractéristiques du mécanisme optimal, il est nécessaire de recourir à des hypothèses spécifiques sur la loi de probabilité liée des évaluations. Supposons que les probabilités conditionnelles vérifient les deux égalités suivantes :

(23) $$\begin{cases} k_{HH} = k_{LL} = a > 0 \\ k_{HL} = k_{LH} = b > 0 \end{cases}$$

Deux cas doivent alors être considérés, puisque les paiements dépendent du signe de $k_{HL} . k_{LH} - k_{HH} . k_{LL}$ et donc du signe de $b^2 - a^2$:

– $a > b$ qui implique $b^2 - a^2 < 0$, et correspond au cas d'une dépendance positive;

– $a < b$, qui implique $b^2 - a^2 > 0$, et caractérise une dépendance négative.

5.1. La dépendance positive ($a>b$)

Les équations (17), (18), (19), (20) s'écrivent dans ce cas :

(24) $$t_{HL}=\frac{(1/2\,.\,a+b)\,v_H-a\,t_{HH}}{b}$$

(25) $$t_{LH}=\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2}v_L-t_{LL}\right)$$

(26) $$t_{LL}\leqslant\frac{1/2\,.\,b^2v_H-1/2\,.\,a^2v_L}{b^2-a^2}$$

(27) $$t_{HH}\leqslant\frac{b(1/2\,.\,b+a)\,v_L-a(1/2\,.\,a+b)\,v_H}{b^2-a^2}$$

5.1.1. *Interprétation des paiements*

D'après (26), la valeur maximale de t_{LL} dépend du signe de $(b^2v_H-a^2v_L)$ et l'on a :

(28) $$\begin{cases} t_{LL}\max\geqslant 0 & \text{si}\quad v_L<v_H\leqslant\dfrac{a^2}{b^2}\,.\,v_L \\ t_{LL}\max<0 & \text{si}\quad v_H>\dfrac{a^2}{b^2}\,.\,v_L \end{cases}$$

D'après (27), la valeur maximale de t_{HH} est positive si $v_H>\alpha v_L$, avec $\alpha=\dfrac{1/2\,.\,b^2+ab}{1/2\,.\,a^2+ab}<1$. Comme par hypothèse $v_H>v_L$, on a :

(29) $$t_{HH}\max>0 \text{ pour tous } v_H \text{ et } v_L \text{ tels que } v_H>v_L$$

D'après (24), $t_{HL}\geqslant 0$ si $t_{HH}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{a}\right)v_H$. Or d'après (27),

$$t_{HH}\leqslant\frac{b(1/2\,.\,b+a)\,v_L-a(1/2\,.\,a+b)\,v_H}{b^2-a^2}\leqslant\frac{1}{2}v_H.$$

Par suite, *t_{HL} est toujours positif.* De même, d'après (25), $t_{LH}\geqslant 0$ si $t_{LL}\leqslant\dfrac{1}{2}v_L$. Comme d'après (26),

$$t_{LL}\leqslant\frac{1/2\,.\,b^2v_H-1/2\,.\,a^2v_L}{b^2-a^2}\leqslant\frac{1}{2}v_L\qquad\text{car}\quad v_H>v_L,$$

t_{LH} est toujours positif.

Compte tenu de ces résultats, on peut énoncer la proposition 3 relative au signe des paiements du mécanisme optimal dans le cas de dépendance positive.

Proposition 3 : Si les probabilités conditionnelles sont conformes à (23), avec $a>b$ et si $v_H>v_L>0$ alors les paiements t_{HL} et t_{LH} sont toujours positifs, ainsi que la valeur maximale de t_{HH} et

(i) la valeur maximale de t_{LL} est positive si $v_L < v_H < \frac{a^2}{b^2} v_L$.

(ii) la valeur maximale de t_{LL} est négative si $v_H > \frac{a^2}{b^2} v_L$.

Dans le cas (i), tous les paiements correspondent à des transferts positifs des acheteurs vers le vendeur. Le mécanisme optimal peut en outre comporter des paiements positifs de la part d'agents n'obtenant pas l'objet (c'est le cas si t_{LH} ou t_{LL} sont différents de zéro). Ce cas (i) correspond à une configuration spécifique des évaluations v_H et v_L, telle que v_H soit compris entre v_L et $\frac{a^2}{b^2} v_L$.

Dans le cas (ii) en revanche, le signe négatif de t_{LL} implique l'existence d'un transfert positif du vendeur vers les acheteurs dans le cas où ils soumettent tous les deux une offre faible. En d'autres termes, lorsque les deux agents annoncent v_L, ils reçoivent l'objet plus un paiement de la part du vendeur. Dans tous les autres cas de figure, ce sont les acheteurs potentiels qui payent le vendeur. Le cas (ii) correspond à une configuration des évaluations dans laquelle v_H est élevée par rapport à $v_L \left(v_H > \frac{a^2}{b^2} v_L \right)$.

Pour illustrer cette proposition, nous considérons deux exemples qui diffèrent par les valeurs du couple (v_H, v_L) et dans lesquels la loi de probabilité liée du couple (v_1, v_2) est définie par :

$$p(v_H, v_H) = p(v_L, v_L) = \frac{1}{3}$$

$$p(v_H, v_L) = p(v_L, v_H) = \frac{1}{6}$$

ce qui donne $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$.

5.1.2. *Mécanisme sans transfert négatif* $\left(v_H < \frac{a^2}{b^2} v_L \right)$

Supposons $v_H = 50$ et $v_L = 40$. A partir des équations (24) à (27), on obtient :

$$t_{HL} = 100 - 2\,t_{HH}$$
$$t_{LH} = 40 - 2\,t_{LL}$$
$$t_{LL} \leqslant \frac{55}{3}$$
$$t_{HH} \leqslant \frac{100}{3}$$

Les paiements $t_{LL}=17$, $t_{HH}=25$, $t_{LH}=6$ et $t_{HL}=50$ satisfont aux quatres équations précédentes et correspondent au mécanisme suivant, si l'on reprend les notations adoptées précédemment :

$$\begin{cases} q(50, 50)=q(40, 40)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ q(50, 40)=(1, 0) \\ q(40, 50)=(0, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(50, 50)=(25, 25) \\ t(40, 40)=(17, 17) \\ t(40, 50)=(6, 50) \\ t(50, 40)=(50, 6) \end{cases}$$

que l'on peut interpréter ainsi :

– si $(v_1, v_2)=(50, 50)$, le vainqueur est tiré au sort et paye 50. L'autre agent n'obtient ni ne paye rien. L'espérance de paiement t_{HH} est égale à $25\left(\frac{1}{2}.50+0.\frac{1}{2}\right)$;

– si $(v_1, v_2)=(40, 50)$ ou $(50, 40)$, l'objet est attribué au plus offrant pour un prix égal à 50 et l'agent qui annonce 40 n'obtient rien mais doit payer 6;

– si $(v_1, v_2)=(40, 40)$, l'un des agents tiré au sort obtient l'objet et paye 34. Son espérance de paiement t_{LL} est donc $17\left(\frac{1}{2}.34+0.\frac{1}{2}\right)$.

5.1.3. *Mécanisme avec transfert négatif* $\left(v_H > \frac{a^2}{b^2} v_L\right)$ [3]

Supposons $v_H=100$ et $v_L=10$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} t_{HL} &= 200-2\,t_{HH} \\ t_{LH} &= 10-2\,t_{LL} \\ t_{LL} &\leqslant -10 \\ t_{HH} &\leqslant 125 \end{aligned}$$

Les paiements $t_{LL}=-15$, $t_{HH}=50$, $t_{LH}=40$ et $t_{HL}=100$ satisfont aux quatres équations précédentes et correspondent au mécanisme caractérisé par :

$$\begin{cases} q(100, 100)=q(10, 10)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ q(100, 10)=(1, 0) \\ q(10, 100)=(0, 1) \end{cases}$$

3. Ce cas particulier correspond à l'exemple présenté par Myerson [1981].

$$\begin{cases} t(100,\ 100) = (50,\ 50) \\ t(10,\ 10) \quad = (-15,\ -15) \\ t(100,\ 10) \ = (100,\ 40) \\ t(10,\ 100) \ = (40,\ 100) \end{cases}$$

qui peut s'interpréter comme suit :

– si $(v_1,\ v_2) = (100,\ 100)$, le vainqueur est tiré au sort et paye 100. L'autre agent n'obtient ni ne paye rien $\left(t_{\mathrm{HH}} = 100 \,.\, \frac{1}{2} + 0 \,.\, \frac{1}{2} = 50\right)$;

– si $(v_1,\ v_2) = (100,\ 10)$ ou $(10,\ 100)$, l'objet est attribué à l'agent qui annonce 100, pour un prix égal à 100 et l'agent dont l'évaluation est 10 ne reçoit rien mais paye 40;

– si $(v_1,\ v_2) = (10,\ 10)$, l'un des agents tiré au sort reçoit 20 et l'autre reçoit 10 plus l'objet, d'où un paiement moyen négatif égal à $-15\left(-20 \times \frac{1}{2} + (-10) \,.\, \frac{1}{2}\right)$.

On montre aisément dans ces deux exemples numériques que l'espérance mathématique de revenu du vendeur résultant des paiements définis par les équations (24) à (27) est égale à l'espérance mathématique de la valeur de l'objet, si l'on considère pour chaque configuration possible des évaluations que la valeur de l'objet est égale à la plus forte des deux évaluations.

Dans le premier exemple, si l'on note ER l'espérance mathématique de revenu du vendeur et EV l'espérance mathématique de la valeur de l'objet, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{ER} &= p(50,\ 50) \,.\, 50 + p(40,\ 40) \,.\, 34 \\ &\quad + p(40,\ 50) \,.\, 56 + p(50,\ 40) \,.\, 56 = \frac{140}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{EV} &= p(50,\ 50) \,.\, 50 + p(40,\ 40) \,.\, 40 \\ &\quad + p(40,\ 50) \,.\, 50 + p(50,\ 40) \,.\, 50 = \frac{140}{3} \end{aligned}$$

et dans le second exemple :

$$\begin{aligned} \mathrm{ER} &= p(100,\ 100) \,.\, 100 + p(10,\ 10) \,.\, (-30) \\ &\quad + p(10,\ 100) \,.\, 140 + p(100,\ 10) \,.\, 140 = 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{EV} &= p(100,\ 100) \,.\, 100 + p(10,\ 10) \,.\, 10 \\ &\quad + p(10,\ 100) \,.\, 100 + p(100,\ 10) \,.\, 100 = 70 \end{aligned}$$

5.2. La dépendance négative ($a<b$)

Seule la définition des paiements t_{LL} et t_{HH} est modifiée par rapport au cas précédent. D'après (21) et (22), on obtient :

$$(30) \qquad t_{LL} \geqslant \frac{1/2 \,.\, b^2 v_H - 1/2 \,.\, a^2 v_L}{b^2 - a^2}$$

$$(31) \qquad t_{HH} \geqslant \frac{b(1/2 \,.\, b+a) \,.\, v_L - a(1/2 \,.\, a+b) v_H}{b^2 - a^2}$$

5.2.1. *Interprétation des paiements*

D'après (30), la valeur minimale de t_{LL} est positive si $v_H > \frac{a^2}{b^2} v_L$. Or par définition $v_H > v_L > \frac{a^2}{b^2} v_L$. Par suite,

$$(32) \qquad \min t_{LL} > 0 \text{ pour tous } v_H \text{ et } v_L \text{ tels que } v_H > v_L.$$

D'après (31), la valeur minimale de t_{HH} dépend du rapport entre v_H et $\frac{1/2 \,.\, b^2 - ab}{1/2 \,.\, a^2 + ab \,.} v_L$:

$$(33) \qquad \begin{cases} t_{HH} \min \geqslant 0 & \text{si} \quad v_L < v_H \leqslant \dfrac{1/2 \,.\, b^2 + ab}{1/2 \,.\, a^2 + ab} v_L \\ t_{HH} \min < 0 & \text{si} \quad v_H > \dfrac{1/2 \,.\, b^2 + ab}{1/2 \,.\, a^2 + ab} v_L \end{cases}$$

D'après (25), $t_{LH} \leqslant 0$ si $t_{LL} \geqslant \frac{1}{2} v_L$. Or d'après (30),

$$t_{LL} \geqslant \frac{1/2 \,.\, b^2 v_H - 1/2 \,.\, a^2 v_L}{b^2 - a^2} \geqslant \frac{1}{2} v_L.$$

Par suite, t_{LH} *est toujours négatif.*

D'après (24), $t_{HL} \geqslant 0$ si $t_{HH} \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{a}\right) v_H$. En utilisant (31), on a :

$$(34) \qquad \begin{cases} t_{HL} \geqslant 0 \\ \text{si} \\ \dfrac{b(1/2 \,.\, b+a) v_L - a(1/2 \,.\, a+b) v_H}{b^2 - a^2} \leqslant t_{HH} \leqslant \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{a}\right) v_H \\ t_{HL} \leqslant 0 \qquad \text{si} \quad t_{HH} \geqslant \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{b}{a}\right) v_H \end{cases}$$

PROPOSITION 4 : Si les probabilités conditionnelles sont conformes à (23), avec $b > a$ et si $v_H > v_L > 0$, alors le paiement t_{LL} est toujours positif, le paiement t_{LH} est toujours négatif et le signe de t_{HL} dépend de t_{HH}.

5.2.2. *Spécification de la loi de probabilité*

Pour illustrer la proposition 4, considérons $v_H = 100$, $v_L = 10$ et la loi de probabilité liée du couple (v_1, v_2) suivante :

$$p(v_H, v_H) = p(v_L, v_L) = \frac{1}{6}$$

$$p(v_H, v_L) = p(v_L, v_H) = \frac{1}{3}$$

à laquelle correspond $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

On a alors :

$$t_{HL} = 125 - \frac{1}{2} t_{HH}$$

$$t_{LH} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} t_{LL}$$

$$t_{LL} \geqslant 65$$

$$t_{HH} \geqslant -70$$

Les paiements $t_{HH} = 50$, $t_{HL} = 100$, $t_{LL} = 70$, $t_{LH} = -\frac{65}{2}$ satisfont aux quatre équations précédentes et correspondent au mécanisme suivant :

$$\begin{cases} q(100.\ 100) = q(50,\ 50) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ q(100,\ 10) = (1,\ 0) \\ q(10,\ 100) = (0,\ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(100,\ 100) = (50,\ 50) \\ t(10,\ 10) = (70,\ 70) \\ t(100,\ 10) = \left(100, \frac{-65}{2}\right) \\ t(10,\ 100) = \left(\frac{-65}{2}, 100\right) \end{cases}$$

que l'on peut interpréter ainsi :

— si $(v_1, v_2) = (100, 100)$, le vainqueur est tiré au sort et paye 100, l'autre agent n'obtient ni ne paye rien;

– si $(v_1, v_2)=(100, 10)$ ou $(10, 100)$, l'agent qui annonce 100 obtient l'objet pour un prix égal à son offre et l'autre agent reçoit du vendeur un prix égal à $\frac{65}{2}$;

– si $(v_1, v_2)=(10, 10)$, l'objet est attribué par tirage au sort à l'un des agents qui paye 140, l'autre ne recevant ni ne payant rien.

On montre à nouveau ici que l'espérance mathématique de revenu du vendeur résultant de ces paiements est égale à l'espérance mathématique de la valeur de l'objet :

$$\begin{aligned}\mathrm{EV} &= p(100,\ 100).\,100+p(100,\ 10).\,100\\ &\quad +p(10,\ 100).\,100+p(10,\ 10).\,10=85\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ER} &= p(100,\ 100).\,100+p(100,\ 10).\,\frac{135}{2}\\ &\quad +p(10,\ 100).\,\frac{135}{2}+p(10,\ 10).\,140=85\end{aligned}$$

6 Signification des règles de paiements

Deux types de paiements peu conformes à la pratique des enchères sont indispensables pour garantir que les conditions nécessaires à l'appropriation de la totalité du surplus par le vendeur sont réunies. Ce sont d'une part des paiements d'agents qui ne gagnent pas, qui peuvent s'interpréter comme des droits d'entrée, et d'autre part des paiements du vendeur. Pour illustrer le rôle joué par ces paiements, considérons les exemples précédents.

Dans le cas où $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $v_{\mathrm{H}}=100$, $v_{\mathrm{L}}=10$, compte tenu des paiements définis, tout agent qui annonce 10 est face à l'alternative suivante :

– si son adversaire annonce 100, il verse 40 au vendeur;

– si son adversaire annonce 10, il reçoit 15 du vendeur.

Or, pour un agent dont l'évaluation est 10, cette loterie combinée avec la fonction d'évaluation se traduit par une espérance de gain nulle (la contrainte de rationalité individuelle est saturée) alors que pour un agent dont l'évaluation est 100, elle se traduit par une espérance de gain négative.

On a en effet d'après (14) et (15) :

$$(-40).\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}.10-(-15)\right).\frac{2}{3}=0$$

$$(-40).\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{2}.100-(-15)\right).\frac{1}{3}=-\frac{15}{3}$$

De même, tout agent qui annonce 100 est face à l'alternative suivante :

– si son adversaire annonce 100, il paye 50;

– si son adversaire annonce 10, il paye 100.

Cette loterie combinée avec la fonction d'attribution lui assure une espérance de gain nulle si 100 est sa vraie valeur (d'après (13)) et une espérance de gain négative si 10 est sa vraie valeur (d'après (16)).

On peut donner une interprétation analogue dans le cas de dépendance négative.

Si l'existence de paiements du vendeur apparaît une règle largement contre-intuitive, elle est néanmoins indispensable à la définition de mécanismes permettant l'extraction de tout le surplus. L'interdiction de paiements du vendeur équivaut à l'introduction *d'une contrainte de participation du vendeur.* Reprenons l'exemple de la section 5.1.3, avec $v_H=100$ et $v_L=10$ et ajoutons au programme constitué des contraintes incitatives, de rationalité individuelle et de réalisabilité, la contrainte de paiements positifs décrite par :

$$\forall i=1,2, \qquad t_i(v_1, v_2)\geqslant 0, \qquad \forall v_1\in\{v_H, v_L\}, \qquad \forall v_2\in\{v_H, v_L\}$$

On obtient alors comme solution du programme linéaire une espérance mathématique de revenu du vendeur égale à $\frac{200}{3}$, grâce à un mécanisme dans lequel l'objet n'est pas attribué si $(v_1, v_2)=(10, 10)$ et est attribué dans tous les autres cas [avec tirage au sort si $(v_1, v_2)=(100, 100)$] pour un prix égal à 100. L'espérance mathématique de revenu du vendeur est alors égale à $\frac{200}{3}$, et est inférieure à l'espérance mathématique de la valeur de l'objet *ex ante* égale à $\frac{210}{3}$.

On peut enfin montrer que la possibilité de l'*extraction de la totalité du surplus est liée de façon cruciale à l'hypothèse de neutralité des agents envers le risque.* Supposons, en effet, que l'on puisse faire tendre le degré d'interdépendance vers zéro, ce qui revient à faire tendre a vers b. Dans le cas de dépendance positive, quand $a\to b$, il apparaît que les paiements qui permettent l'appropriation de la totalité du surplus sont tels que $t_{LL}\to-\infty$ et $t_{LH}\to+\infty$. Dans le cas de dépendance négative, quand $a\to b$, $t_{LL}\to+\infty$ et $t_{LH}\to-\infty$. Or si l'on avait considéré une hypothèse d'aversion envers le risque, acheteurs et vendeurs seraient amenés à refuser l'éventualité de ces paiements par l'intermédiaire de contraintes de participation supplémentaires fixant des limites aux paiements admissibles. L'appropriabilité de la totalité du surplus est donc conditionnée par l'hypothèse de la neutralité des agents envers le risque [4].

***

S'il est possible, comme on vient de le montrer dans des cas particuliers, de définir dans un cadre bayesien et sous l'hypothèse de neutralité des agents envers le risque, des règles d'attribution et de paiement permettant au vendeur d'obtenir en espérance mathématique un revenu aussi élevé que ce qu'il pourrait obtenir sous l'hypothèse d'information parfaite, on doit remarquer que l'on obtient des règles complexes à mettre en œuvre. Les procédures mises en évidence ne peuvent être interprétées en termes d'enchères usuelles telles que les appels d'offres au premier ou au second prix. En effet, si dans tous les cas on peut attribuer l'objet à un agent dont l'évaluation est la plus élevée pour un prix égal à sa disposition à payer (avec éventuellement tirage au sort en cas d'annonces identiques), cette règle doit être assortie de paiements du vendeur et de paiements d'agents qui n'obtiennent rien. En particulier, le mécanisme optimal prévoit pour une même offre d'un agent des paiements différents selon les annonces de ses adversaires. On obtient ainsi dans les cas de dépendance des évaluations considérés, des configurations de paiements variables selon le domaine de définition des évaluations et selon la nature des interdépendances entre les évaluations.

• Références bibliographiques

CREMER, J. et MCLEAN, R. P. (1985). — « Full Extraction of the Surplus in Bayesian and Dominant Strategy Auctions », *CARESS Working Paper.*

CREMER, J. et MCLEAN, R. P. (1985*b*). — « Optimal Selling Stragegies Under Uncertainty for a Discriminating Monopolist when Demands are Interdependent », *Econometrica*, 53, n° 2.

MASKIN, E. S. et RILEY, J. G. (1985). — « Auction Theory with Private Values », *American Economic Review*, A.E.A. Papers and Proceedings, 75, n° 2.

MILGROM, P. R. et WEBER, R. J. (1982). — « A Theory of Auctions and Competitive Bidding », *Econometrica*, 50, n° 5.

MYERSON, R. B. (1981). — « Optimal Auction Design », *Mathematics of Operations Research*, 6, n° 1.

PIGOU, A. C. (1920). — *The Economics of Welfare*, 4e éd., Macmillan, London.

RILEY, J. G. et SAMUELSON, W. F. (1981). — « Optimal Auctions », *American Economic Review*, 71, n° 3.

VICKREY, W. (1961). — « Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders », *Journal of Finance*, 16, n° 1.

4. Je remercie J. J. LAFONT d'avoir attiré mon attention sur cette relation.