ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 10 — 1988

Le principe d'arbitrage en économie financière

Hal R. VARIAN *

RÉSUMÉ. – Cet article montre la puissance du principe d'arbitrage en économie financière. Ce principe fournit des conditions nécéssaires d'équilibre qui permettent de calculer la valeur de nombreux titres et actifs financiers. On l'applique ici à la comparaison entre options américaine et européenne. On présente également les méthodes d'évaluation des actifs dérivés, fondées sur ce même principe.

The Arbitrage Principle in Financial Economics

ABSTRACT. – This paper shows the power of the arbitrage principle in financial economics. This principle yields some equilibrium conditions which can be used to calculate the values of many securities and financial assets. It is applied to the comparison between American and European options. It is also shown how the principle may serve to evaluate derivative assets.

---

* H. R. VARIAN : Department of Economics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
Cet article est paru dans *Journal of Economic Perspectives,* 1, n° 2, automne 1987, 55-72 et a été traduit en français par Isabelle BAJEUX et Fabienne BOUSQUET.

1 Introduction

Dans le New Hampshire un professeur d'économie et un fermier Yankee attendaient le car. Pour passer le temps le fermier suggéra un jeu.

« *A quoi donc voudriez-vous jouer?* » répondit le professeur.

« *Eh bien* », dit le fermier, « *Que pensez-vous de ce jeu: je vous pose une question et si vous ne pouvez pas y répondre vous me donnez un dollar. Puis vous me posez une question et si je ne peux y répondre je vous donne un dollar* ».

« *Ça me paraît bien,* dit le professeur, *mais je dois vous prévenir: je ne suis pas n'importe qui, je suis un professeur d'économie* ».

« *Oh,* répondit le fermier, *dans ce cas nous devrions changer les règles. Voilà ce que l'on va faire: si vous ne pouvez pas répondre à ma question vous me donnez toujours 1 $, mais si je ne peux pas répondre à la vôtre, je ne vous donnerai que 50 cents* ».

« *Bien,* dit le professeur, *cela semble équitable* ».

« *O.K.,* dit le fermier, *Voici ma question: Qu'est-ce qui monte la colline sur sept pattes et qui la redescend sur trois?* »

Le professeur réfléchit un moment à cette devinette et finalement répond: « *Sapristi, je ne sais pas... et alors, qu'est-ce qui monte la colline sur sept pattes et qui la redescend sur trois?* ».

« *Eh bien,* dit le fermier, *je ne sais pas non plus, mais si vous me donnez votre dollar, je vous donnerai mes 50 cents!* »

Cette histoire est une illustration du *principe d'arbitrage*: une transaction qui assure un profit sûr sans dépense initiale. Comme cette anecdote le montre, des possibilités d'arbitrage peuvent exister. Mais dans un marché bien développé, avec des individus rationnels, recherchant le profit, de telles occasions devraient être très rares. En effet, puisque les agents maximisent leur profit, ils essaient d'exploiter les opportunités d'arbitrage dès qu'elles apparaissent. Le fait qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage semble généralement faire partie de la définition de l'équilibre dans un marché parfait.

L'importance des conditions d'arbitrage en économie financière est admise depuis les travaux classiques de Modigliani et Miller sur la structure financière de l'entreprise. Ils ont montré que si une entreprise pouvait changer sa valeur de marché par des opérations purement financières, comme par exemple en ajustant son ratio dettes/actions, alors les actionnaires et les détenteurs d'obligations pourraient effectuer des transactions équivalentes qui leur assureraient des profits purs à de purs arbitrages. Si le marché était assez efficace pour éliminer tout profit par arbitrage pour les actionnaires, il éliminerait aussi tout profit d'arbitrage pour l'entreprise.

La démonstration de cette proposition donnée par Modigliani et Miller utilise un argument simple d'absence d'opportunités d'arbitrage. Par la suite, les économistes de la finance ont utilisé cet argument pour résoudre un grand nombre de problèmes de valorisations d'actifs. Un des plus grands progrès en économie financière pendant ces deux dernières décennies a été de clarifier et de formaliser le sens exact de l'idée d'« absence d'opportunités d'arbitrage » et d'appliquer cette idée de façon systématique pour mettre en évidence les relations implicites entre les prix des actifs. De nombreux résultats importants en économie financière sont fondés sur l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Celle-ci est l'un des principes de base qui permet d'unifier l'étude des marchés financiers. Dans ce papier, nous examinons certains de ces résultats. Pour éviter d'alourdir l'exposé avec des références, on trouvera dans le dernier paragraphe de l'article, une bibliographie et un guide pour une lecture plus approfondie.

2 Principes généraux de valorisation des actifs

Considérons un marché d'actifs dont les rendements dépendent de différents états de la nature. Ces états ne sont pas nécessairement des états au sens d'Arrow-Debreu qui décriraient toutes les évolutions possibles du monde; ils sont simplement les résultats d'un processus aléatoire. Nous supposons que les individus accordent de l'importance à leur richesse et que dans tout état de la nature, ils préfèrent être plus riches à être plus pauvres.

Notons R_{sa} ce que rapporte l'actif a dans l'état s et supposons que le nombre d'actifs est A et que le nombre d'états est S. On décrit un actif par le vecteur de ses paiements dans chacun des S états de la nature. Ainsi le premier actif est décrit par un vecteur colonne $(R_{11}, \ldots, R_{S1})^t$ et l'actif i est décrit par le vecteur colonne $(R_{1i}, \ldots, R_{Si})^t$. La matrice des paiements de l'ensemble des actifs s'écrit alors:

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & \ldots & R_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{S1} & \ldots & R_{SA} \end{bmatrix}$$

Cette matrice $(S \times A)$ donne les paiements de chacun des A actifs dans chacun des S états de la nature: chacune des colonnes de cette matrice de paiement représente un actif différent et chaque ligne donne les paiements pour un état donné de la nature de chacun des actifs. La matrice résume les caractéristiques des paiements offerts par cet ensemble donné d'actifs.

Soit x_a le montant d'actif a détenu. Un portefeuille d'actifs est alors un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_A)^t$. Les composantes du portefeuille x peuvent être positives ou négatives: une valeur positive de x_a s'interprète comme une position longue sur l'actif a, si bien que l'on reçoit le paiement correspondant si l'état s se réalise; tandis qu'une valeur négative de x_a s'interprète comme une position à découvert sur l'actif a si bien que l'on doit donner le paiement correspondant si l'état s se réalise.

La richesse que l'on reçoit dans l'état s si l'on détient le portefeuille $x=(x_1, \ldots, x_A)$ est donnée par la formule:

$$w_s = \sum_{a=1}^{A} x_a R_{sa}$$

En l'écrivant sous forme matricielle nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \ldots & R_{1A} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{S1} & \ldots & R_{SA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_A \end{bmatrix} \tag{1}$$

ou, de façon plus succincte :

$$w = R\,x \tag{2}$$

Cette équation illustre les relations entre les fins et les moyens: les fins sont les niveaux de richesse que le consommateur peut obtenir dans les différents états de la nature, ce qui est la préoccupation finale du consommateur. Les moyens sont les actifs existants. En combinant des portefeuilles d'actifs existants, le consommateur peut réaliser différentes configurations de richesse selon les états de la nature. Les configurations de richesse qui peuvent être atteintes dépendent de l'ensemble des actifs disponibles. Ainsi la valeur de marché d'un seul actif va typiquement dépendre des autres actifs avec lesquels on pourra le combiner.

Le cas central est celui où il y a autant d'états de la nature que de nombre d'actifs. Dans ce cas on peut obtenir n'importe quelle configuration de richesse grâce à un portefeuille composé d'actifs existants. Pour atteindre une distribution particulière de richesse $w=(w_1, \ldots, w_S)$, il suffit de résoudre le système d'équations avec pour inconnue $x=(x_1 \ldots, x_A)$ qui permettra d'obtenir cette distribution de richesse. Comme le système d'équations a exactement autant d'inconnues que d'équations il est toujours possible de trouver un tel portefeuille. [1]

S'il y a plus d'actifs que d'états de la nature, il y aura plus d'inconnues que d'équations et il existera plusieurs portefeuilles générant une distribution de richesse donnée. D'un autre côté, s'il y a plus d'états de la nature que d'actifs, il ne sera pas alors possible de résoudre ce système d'équations pour toute distribution de richesse – certaines configurations de richesse ne pouvant pas être construites à partir des actifs existants.

Ce dernier cas est sans doute le plus réaliste, car on pense généralement que les gens sont confrontés à plus d'éventualités qu'il n'y a d'actifs sur le marché. Mais la question est controversée. Si les gens se préoccupent réellement d'atteindre une certaine distribution de richesse, ne semble-t-il

1. Nous supposons qu'il n'y a pas d'actif redondant: en d'autres termes la matrice R est de plein rang.

pas normal que le marché comporte un actif qui permette d'atteindre une telle configuration ? Un résultat surprenant de l'économie financière est qu'il existe un moyen de construire des portefeuilles qui permettent d'obtenir des configurations de paiements arbitraires, ceci même dans des situations où il semble qu'il y ait plus d'états de la nature que d'actifs. On trouvera dans la suite un exposé plus détaillé de ce résultat.

Sont particulièrement importants pour l'analyse les actifs d'Arrow-Debreu. Ce sont des actifs dont le paiement est de 1 $ si et seulement si un état de la nature donné se réalise; dans les autres cas, leurs paiements sont nuls. Ainsi, la distribution des paiements d'un actif d'Arrow-Debreu est de la forme $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, où le 1 est la s-ième composante.

Les actifs d'Arrow-Debreu peuvent être vus comme des actifs fondamentaux, ceci d'un point de vue économique ou d'algèbre linéaire. Ce sont des actifs fondamentaux du point de vue économique, puisque nous verrons par la suite que toutes les configurations de paiements peuvent être construites à partir d'actifs d'Arrow-Debreu. Ce sont des actifs fondamentaux pour l'algèbre linéaire parce qu'ils forment une base de l'espace des paiements. C'est cette nature essentielle des actifs d'Arrow-Debreu qui les rend si importants pour l'analyse de la valorisation des actifs financiers.

3 Prix des actifs

Quand les investisseurs choisissent des portefeuilles, ils choisissent en fait une distribution de richesse pour chaque état de la nature. Pour ce faire, ils sont limités par leur contrainte budgétaire: cette contrainte provient du montant de richesse qu'ils peuvent investir et des prix des différents actifs auxquels ils sont confrontés.

Pour exprimer cette idée de contrainte budgétaire, nous noterons p_a le prix de l'actif a; et $p = (p_1, \ldots, p_A)$ le vecteur ligne des prix des actifs. La valeur du portefeuille $x = (x_1, \ldots, x_A)$ sera alors donnée par:

$$p.x = \sum_{a=1}^{A} p_a x_a.$$

Cette formulation est analogue à celle utilisée dans la théorie classique du consommateur: la valeur d'un ensemble de biens est égale à la somme des dépenses pour chacun des biens. La différence étant que les biens ainsi choisis — les actifs — ne sont pas des biens finalement consommés. Ils ne sont que des moyens de transfert. Ce dont les consommateurs se préoccupent réellement, c'est la distribution de richesse que les différents portefeuilles permettent d'obtenir. Ainsi, deux portefeuilles donnant une même configuration de richesse doivent valoir le même prix. Considérons, par exemple, le cas des actifs d'Arrow-Debreu. Si nous connaissons le prix de chacun des actifs d'Arrow-Debreu, nous pouvons valoriser n'importe quel actif. Comme la configuration des paiements de n'importe quel actif peut être obtenue à partir d'un portefeuille constitué d'actifs d'Arrow-Debreu, le prix de cet actif doit être égal au prix du portefeuille formé d'actifs d'Arrow-Debreu qui réalise la même distribution de richesse pour chaque état de la nature.

Formellement, on note π_s, le prix de l'actif d'Arrow-Debreu qui donne 1 $ si l'état s se réalise, et (R_{sa}) le paiement d'un actif a dans l'état s. Alors, le prix d'équilibre d'un actif a doit être donné par :

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sa}$$

Pourquoi cela? Il existe deux explications. Intuitivement, π_s mesure la valeur d'un dollar dans l'état s, le paiement de l'actif dans l'état s étant R_{sa}. En sommant sur tous les états possibles, on obtient la valeur de l'actif a.

Cet argument est plausible mais repose sur une notion de « valeur » qui est un concept délicat à utiliser. Une explication plus convaincante est fondée sur des considérations d'absence d'opportunités d'arbitrage. Si un système de marchés complets d'actifs de type Arrow-Debreu existait et si le prix d'un actif était différent du prix de portefeuille formé d'actifs d'Arrow-Debreu qui génère la même distribution de paiements, alors il existerait un moyen sûr de gagner de l'argent. Ceci en vendant l'actif et en achetant le portefeuille d'Arrow-Debreu, ou vice-versa, suivant celui des deux qui coûte le plus cher. Donc, s'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage et si le marché comporte un ensemble complet d'actifs d'Arrow-Debreu, alors tous les actifs peuvent être valorisés à partir des prix des actifs d'Arrow-Debreu.

Cette discussion montre que tout actif peut être valorisé à partir d'un ensemble particulier d'actifs dans le cas où le nombre d'actifs est égal au nombre d'états de la nature. De même, un résultat analogue reste vrai quand il y a moins d'actifs que d'états de la nature. Mais cette démonstration est fondée sur une hypothèse plus forte quant aux opportunités d'arbitrage. Nous allons à présent étudier le concept d'absence d'opportunités d'arbitrage.

4 Une formalisation de la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage

Le but de cet article est d'étudier le concept d'arbitrage, ou plus précisément d'absence d'opportunités d'arbitrage. Que cela signifie-t-il? Derrière l'absence d'opportunités d'arbitrage il y a l'idée qu'« on n'a rien sans rien » – c'est-à-dire qu'il ne peut exister de configurations de prix telles qu'un individu puisse obtenir quelque chose sans rien fournir. Tout portefeuille qui rapporte des sommes non négatives dans chacun des états de la nature est intéressant et donc, si on n'a rien sans rien, un tel portefeuille doit avoir un coût négatif.

Rappelons que la configuration des rendements d'un portefeuille peut être représentée par Rx et le coût de ce portefeuille par px. En utilisant ces notations nous pouvons établir :

La condition d'absence d'opportunités d'arbitrage

$$Si\ Rx \geqq 0,\ alors\ px \geqq 0.$$

La *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* décrite plus haut de manière informelle est devenue une condition algébrique explicite. Cette dernière impose des restrictions sur les prix p d'équilibre.

Pour un ensemble particulier d'actifs, décrits par la matrice des paiements R, seuls certains prix p vérifient la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage.* Comment sont caractérisés de tels prix ? Quelles restrictions la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* impose-t-elle sur les prix des actifs ?

Dans l'Annexe, on montre que la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* implique qu'il existe un vecteur de « prix d'états » positifs ou nuls $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_S)$ tel que le prix de tout actif soit donné par :

$$p_a = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sa}. \tag{3}$$

Quelle est l'interprétation économique des « prix d'états » π_s ? Considérons un actif d'Arrow-Debreu qui rapporte 1 $ si l'état s se réalise et rien sinon. Alors en utilisant l'équation (3) on voit que la valeur de cet actif doit être π_s. En d'autres termes, π_s représente la valeur de 1 $ dans l'état s. Vue sous cet angle, l'équation (3) devient très naturelle : elle dit que, pour connaître la valeur d'un actif quelconque, il faut regarder le paiement qu'il donne dans un état, le multiplier par la valeur d'un dollar dans cet état, puis sommer sur tous les états possibles.

L'existence des « prix d'états » π est une condition nécessaire et suffisante d'absence d'opportunités d'arbitrage. En effet, si il n'y a pas de possibilités d'arbitrage, on doit alors avoir des « prix d'états » π; et réciproquement, si de tels « prix d'états » existent il ne peut y avoir des opportunités d'arbitrage. L'existence de « prix d'états » est donc équivalente à l'absence d'opportunités d'arbitrage : n'importe quelle conséquence de l'absence d'opportunités d'arbitrage doit pouvoir être déduite de l'existence de « prix d'états », et vice versa.

Les « prix d'états » (π_s) proviennent de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage – donc, chaque fois que le marché sera assez efficace pour éliminer les possibilités d'arbitrage, de tels « prix d'états » existeront et pourront être utilisés pour valoriser les actifs existants. Bien sûr, en général, le vecteur π des « prix d'états » ne sera pas unique. Quand on a S états et A actifs, l'équation (3) est à S inconnues et à A équations. Généralement, l'espace des solutions du système sera donc de dimension S-A. Il n'y a que dans le cas où le nombre d'actifs (indépendants) est égal au nombre d'états de la nature, que le vecteur π des « prix d'états » est unique.

5 Additivité de la valeur

La *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* est très simple, mais étonnamment puissante. Utilisons la pour prouver un résultat important de la théorie des marchés financiers, le *théorème de l'additivité de la valeur.*

Considérons deux actifs, a et b, dont les paiements sont (R_{sa}) et (R_{sb}). Supposons connus les prix de ces actifs, p_a et p_b. Considérons à présent l'actif C dont le paiement aléatoire est donné par une combinaison linéaire des paiements de ces deux actifs; c'est-à-dire dont les paiements sont $R_{sc} = AR_{sa} + BR_{sb}$, où A et B sont des constantes arbitraires. La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage implique que, si aucune opportunité d'arbitrage n'existe dans le marché, alors le prix d'un actif dont le vecteur des paiements est (R_{sc}) doit être donné par: $p_c = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sc}$. En utilisant le fait que $R_{sc} = AR_{sa} + BR_{sb}$, alors:

$$\begin{aligned} p_c &= \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sc} \\ &= \sum_{s=1}^{S} \pi_s (AR_{sa} + BR_{sb}) \\ &= \sum_{s=1}^{S} A\,\pi_s R_{sa} + \sum_{s=1}^{S} B\,\pi_s R_{sb} \\ &= A\,p_a + B\,p_b. \end{aligned}$$

Ces calculs prouvent le

Théorème d'additivité de la valeur

Supposons qu'aucune opportunité d'arbitrage n'existe. Alors le prix d'un actif dont les paiements sont des combinaisons linéaires de ceux d'autres actifs est égal à la même combinaison linéaire des prix de ces autres actifs.

A première vue, ce résultat paraît évident – il exprime le fait que la valeur d'un ensemble est égal à la somme de la valeur de ses éléments. Mais il a des conséquences importantes et surprenantes. Prenons un exemple simple: les paiements des actifs a et b sont arbitraires, ceux-ci peuvent être fortement corrélés, soit positivement, soit négativement. Il est bien connu qu'un portefeuille composé de deux actifs négativement corrélés sera moins risqué qu'un portefeuille composé d'un seul de ces actifs. La diversification est toujours meilleure dans un marché comportant des actifs risqués. Comme une combinaison linéaire de deux actifs négativement corrélés est moins risquée qu'un seul de ceux-ci, on pourrait penser qu'elle vaudra plus que la somme des valeurs de ces deux actifs.

Néanmoins le *théorème d'additivité de la valeur* établit que le prix d'un portefeuille composé de deux actifs est égal à la somme des prix de ces deux actifs.

Pourquoi est-ce ainsi? La réponse est que les prix d'équilibre des actifs reflètent déjà la valeur de toute combinaison linéaire de portefeuilles. Si, par exemple, la valeur de la combinaison de deux actifs était supérieure à la somme des valeurs de ces deux actifs seuls, alors des arbitragistes pourraient acheter les deux actifs et vendre le fonds commun, que l'on définit comme la combinaison des deux. De la même manière, si les valeurs des deux actifs seuls étaient plus élevées que leur combinaison, alors des arbitragistes pourraient revendre le fonds commun et en tirer, un profit strictement positif. Comme cette opération permet un profit sûr elle ne peut exister à l'équilibre.

Le *théorème d'additivité de la valeur* est aussi le principe de base sur lequel se fonde le théorème de Modigliani-Miller.

Le théorème de Modigliani-Miller prouve que la valeur d'une entreprise est indépendante de sa structure financière: c'est-à-dire, indépendante de la part de l'entreprise financée par des actions et de celle financée par des obligations. De nouveau, la démonstration provient de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Si les entreprises pouvaient changer leur valeur en modifiant la proportion des actions et des obligations qu'elles émettent, alors les arbitragistes pourraient également composer des portefeuilles d'actions et d'obligations qui donnent des profits sûrs. La valeur d'une entreprise ne doit donc dépendre que de la somme des valeurs de ses obligations et de ses actions et non du fait qu'elle s'endette plutôt que d'augmenter son capital. Cependant, l'exemple de Modigliani-Miller illustre aussi les restrictions du théorème d'additivité de la valeur.

Premièrement, le *théorème d'additivité de la valeur* et la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* ne peuvent s'appliquer qu'à des combinaisons d'actifs existants. Si une entreprise émet de nouvelles obligations avec une configuration de rendements différente des anciennes — parce qu'elles sont, par exemple, plus risquées que les autres — alors *le théorème d'additivité de la valeur* n'est pas obligatoirement vérifié. Si l'on émet, par une opération financière, des actifs dont la nouvelle configuration des paiements ne peut pas être obtenue par des combinaisons linéaires d'actifs existants, alors le *théorème d'additivité de la valeur* et l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage ne s'appliquent pas nécessairement. Si un changement économique modifie la matrice des paiements (R_{sa}) et crée ainsi de nouvelles possibilités de consommation selon les états de la nature, le vecteur π des « prix d'état », sera changé. En général lorsqu'on déterminera comment les « prix d'état » vont changer, on aura besoin de spécifier et de résoudre un modèle d'équilibre général pour les prix des actifs, ce qui dépasse l'objectif de cet article. Heureusement, il se peut que des opérations que l'on pensait devant *a priori* créer de nouveaux actifs ne sont en fait que des combinaisons d'actifs existants, si bien que le *théorème d'additivité de la valeur* et les résultats qui en découlent peuvent alors être utilisés pour la valorisation de ces actifs.

Deuxièmement, la *condition d'absence d'opportunité d'arbitrage* ne s'applique qu'à des combinaisons linéaires. Un actif dont les paiements sont la somme des paiements de deux actifs différents doit avoir un prix qui est la somme des prix de ces actifs. De même, un actif dont le paiement est un multiple de celui d'un autre doit avoir un prix qui est le multiple de celui du second. Si un actif est fonction non linéaire d'un autre, alors on ne peut pas appliquer directement la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage*, du moins dans la forme exposée ci-dessus. Cependant, il deviendra clair plus tard, que dans certains cas, des combinaisons qui semblaient non linéaires peuvent être ramenées à des combinaisons linéaires, et ainsi, le *théorème d'additivité de la valeur* peut être appliqué.

6 Utilisation de la notion d'arbitrage pour encadrer les prix des options

L'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage a plusieurs applications élégantes dans la théorie de valorisation des prix des options. Nous avons besoin de donner tout d'abord quelques définitions. Une option (d'achat) sur un actif a est un actif qui donne le droit d'acheter l'actif a à un prix K fixé (appelé le prix d'exercice) pendant un intervalle de temps T fixé. Une option américaine donne le droit d'exercer son option pour acheter l'actif à n'importe quelle date de la période fixée; tandis qu'une option européenne ne donne le droit d'acheter l'actif sous-jacent qu'à la date de maturité.

Il est clair qu'une option américaine vaut au moins autant qu'une option européenne, toutes choses égales par ailleurs. Cependant, si la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* est vérifiée, alors, une option d'achat américaine et une option d'achat européenne auront exactement la même valeur.

Pour établir ce résultat, soient K le prix d'exercice de l'option, t le temps qui reste à courir jusqu'à maturité et S_t le prix de l'actif aujourd'hui, sur lequel porte l'option. On comptera ainsi le temps à l'envers. La date d'aujourd'hui est notée t et l'option arrive à maturité à la date 0.

Supposons maintenant que l'on puisse acheter une obligation sans risque qui rapporte 1 \$ à la date de maturité de l'option. Notons B_t le prix à la date t d'un tel actif.

Étant sans risque, il rapporte 1 \$ quel que soit l'état de la nature. En utilisant les prix d'états π_s pour évaluer cet actif on a $B_t = \sum_{s=1}^{S} \pi_s$. Cette équation dit simplement que la somme des prix d'états donne la valeur de cette obligation. Si le taux d'intérêt est positif, la valeur actualisée de 1 \$ à une date future doit être inférieure à un, d'où $B_t < 1$.

Notons S_0 la valeur de l'actif à la date 0, date de maturité de l'option. Il faut remarquer que, à la date t, la valeur de l'actif à la date de maturité est une variable aléatoire. De même, la valeur de l'option à la date de maturité est aléatoire. Néanmoins, il existe une relation simple entre la valeur de l'option à la date 0 et la valeur de l'actif à la date 0. Considérons deux possibilités. Soit le prix d'exercice est supérieur au prix de l'actif ($K > S_t$), dans ce cas l'option ne sera pas exercée et n'a donc aucune valeur; soit le prix d'exercice est inférieur au prix de l'actif et dans ce cas la valeur de l'option est égale à la différence entre le prix de l'actif et le prix d'exercice. (Si l'actif est coté 100 \$ et que l'option donne le droit de l'acheter pour 75 \$ alors la valeur de l'option est de 25 \$). De façon plus formelle, nous pouvons écrire que la valeur de l'option à sa date de maturité est: $\max(0, S_0 - K)$.

Ces définitions permettent de prouver le résultat énoncé plus haut: en l'absence d'opportunités d'arbitrage, une option d'achat américaine et une option d'achat européenne doivent avoir le même prix. En vue de la démonstration on prouve tout d'abord deux résultats plus simples.

LEMME 1 : Soit C_t le prix d'une option européenne (d'achat) de prix d'exercice K, et soit S_t le prix de l'actif t périodes avant la date de maturité de l'option. Alors $C_t > \max(0, S_t - KB_t)$.

Preuve: Considérons les transactions suivantes: la vente de K obligations qui vous engagent à payer 1 \$ à la date de maturité de l'option et l'achat d'un actif au prix S_t. Le coût d'un tel portefeuille aujourd'hui est: $S_t - KB_t$.

Quand l'option arrive à la date de maturité $t = 0$, l'actif vaudra S_0 et les K obligations vaudront K \$. La valeur de ce portefeuille à la date 0 sera donc $S_0 - K$. La valeur de l'option à sa date de maturité 0 sera $\max(S_0 - K, 0)$. Ceci signifie, qu'à sa date de maturité, l'option vaudra au moins autant que ce portefeuille.

La valeur de l'option aujourd'hui doit donc être au moins aussi élevée que celle de ce portefeuille. Ce qui prouve le résultat. □

LEMME 2 : Une option d'achat américaine ne sera jamais exercée avant sa date de maturité.

Preuve: Comme une option d'achat américaine vaut au moins autant qu'une option d'achat européenne, l'inégalité du lemme 1 est encore vraie pour celle-ci. Si on exerce l'option américaine à une date t intermédiaire cela nous rapporte $S_t - K$, alors que la valeur de cette option est au moins aussi élevée que $S_t - KB_t$. Il vaut donc toujours mieux vendre l'option à son prix de marché que l'exercer. □

THÉORÈME : Une option d'achat américaine a la même valeur qu'une option d'achat européenne.

Ce résultat se déduit des lemmes 1 et 2. Il est clair que le fait de donner à un investisseur une opportunité supplémentaire qu'il n'utilisera jamais, s'il agit de façon rationnelle, ne peut affecter la valeur de l'actif. Puisque une option américaine ne sera exercée qu'à la date terminale, tout comme l'option européenne, leurs valeurs doivent être les mêmes.

L'étape cruciale de la démonstration est le résultat d'absence d'oppotunités d'arbitrage du lemme 1. Mais il y est bien caché! Comment a-t-on choisi le portefeuille de la démonstration? Heureusement, nous avons à notre disposition beaucoup de méthodes pour mettre en évidence les conséquences de l'absence d'opportunités d'arbitrage sur la valorisation des prix des options. Ces procédés utilisent les «prix d'états» que nous avons définis plus haut.

Nous avions démontré précédemment que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage entraînait l'existence de «prix d'états» π, tels que le prix d'un actif a à paiements aléatoires R_{sa}, soit donné, par: $p_a = \sum_{s=1}^{S} \pi_s R_{sa}$. L'existence de ces «prix d'états» (associée aux résultats des lemmes 1 et 2) nous permet de donner une autre preuve du fait que le prix de l'option C_t aujourd'hui est au moins aussi élevé que $S_t - KB_t$.

Soit S_t la valeur de l'actif, t périodes avant la date de maturité de l'option, et soit $S_{s\,0}$ la valeur de l'actif dans l'état s à la date de maturité de l'option. Soit K le prix d'exercice de l'option et C_t la valeur de l'option à la date t. On a déjà vu que la valeur de l'option à sa date de maturité est donnée, dans chaque état s par la formule: $\max(S_{s0} - K; 0)$.

En utilisant les arguments développés à propos des «prix d'états», on sait que s'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage, alors la valeur de l'option, t périodes avant sa date de maturité, doit être:

$$C_t = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \max(S_{s0} - K; 0) \tag{4}$$

En utilisant cette expression on peut calculer:

$$\begin{aligned}
C_t &= \sum_{s=1}^{S} \pi_s \max(S_{s\,0} - K; 0) \\
&\geqslant \sum_{s=1}^{S} \pi_s (S_{s0} - K) \text{ par définition du max,} \\
&= \sum_{s=1}^{S} \pi_s S_{s0} - K \sum_{s=1}^{S} \pi_s \text{ par linéarité,} \\
&= \sum_{s=1}^{S} \pi_s S_{s\,0} - KB_t \text{ par définition de } B_t, \\
&= S_t - KB_t \text{ puisque } \sum_{s=1}^{S} \pi_s S_{s\,0} \text{ est la valeur de l'actif aujourd'hui,} \\
&\geqslant S_t - K \text{ car } B_t < 1.
\end{aligned}$$

Ces calculs montrent que le prix de l'option aujourd'hui, C_t, doit être au moins aussi élevé que $S_t - K$. Pour la fin de la démonstration on procède comme plus haut: puisque une option vaut toujours plus quand elle n'est pas exercée que quand elle l'est, elle ne sera jamais exercée avant sa maturité.

7 Valeurs des options et « prix d'états »

On peut non seulement valoriser les options par les « prix d'états », mais on peut aussi trouver les « prix d'états » grâce aux prix des options. En fait, un ensemble complet d'options pour tous les prix d'exercice possibles est équivalent à un ensemble complet de marchés d'Arrow-Debreu. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment déduire les « prix d'états » à partir des prix des options.

TABLEAU

Construction des actifs d'Arrow-Debreu à partir des options

S	Cl	C2	C3	C12 C1−C2	C23 C2−C3	C12−C23
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	1
3	2	1	0	1	1	0
4	3	2	1	1	1	0

Le tableau décrit les paiements de trois options différentes, dont les prix d'exercice sont différents, et de portefeuilles construits à partir de ces options.

L'option C 1 a un prix d'exercice de 1 \$, C 2 a un prix d'exercice de 2 \$ et C 3 a un prix d'exercice de 3 \$. Les colonnes du tableau donnent la valeur de l'option selon les différents prix de l'action, $S = 1, \ldots, 4$. Les paiements terminaux de l'option à la date 0 sont de la forme $\max(S_{s\,0} - K; 0)$, comme indiqué ci-dessus.

L'objectif est, à présent, de construire un portefeuille qui ne donne un paiement strictement positif que dans un seul état de la nature. Grâce au coût de ce portefeuille il sera facile de calculer les « prix d'états ».

La colonne repérée par $C\,12 = C\,1 - C\,2$ donne les paiements d'un portefeuille constitué de l'achat d'une option de prix d'exercice 1 et de la vente d'une option de prix d'exercice 2. La colonne repérée par $C\,23 = C\,2 - C\,3$ est définie de façon analogue. La colonne repérée par $C\,12 - C\,23$ signifie que l'on achète un portefeuille C 12 et que l'on vend un portefeuille C 23.

Notons que le paiement de ce dernier portefeuille est égal à celui d'un actif qui donne 1 \$ si et seulement si $S=2$. Ceci montre qu'il existe un portefeuille d'options qui génère la même configuration de richesse qu'un actif d'Arrow-Debreu.

Nous pouvons aller plus loin dans l'étude de la relation entre les valeurs des options et les «*prix d'états*» grâce à quelques calculs élémentaires. Jusqu'à présent nous ne considérions que des actions avec un nombre fini de paiements. Relâchons cette hypothèse et supposons que l'action a un continuum de paiements à la date 0, que nous indexerons par s. En fait nous indexons simplement les états par les cours de l'action. Ces «prix d'états» seront alors une fonction que nous noterons $\pi(.)$. Le prix d'état $\pi(s)$ est la valeur aujourd'hui de 1 \$ qui sera payé à la date 0 si la valeur de l'action est s à cette date.

La valeur de l'action à la date t est alors donnée par $\int_0^{+\infty} \pi(s)\, s\, ds$ (la borne inférieure de l'intégrale est zéro — ceci parce qu'une action ne peut pas valoir moins que zéro). Si l'action vaut s à la date 0, l'option vaudra $\max(s-K; 0)$, si bien que la valeur de l'option à la date t sera :

$$C_t = \int_0^{+\infty} \max(s-K; 0)\, \pi(s)\, ds.$$

C'est l'expression analogue à celle donnée précédemment. Cette formule peut encore s'écrire :

$$C_t = \int_K^{+\infty} (s-K)\, \pi(s)\, ds. \tag{5}$$

En différentiant (5) par rapport à K nous obtenons :

$$\frac{dC_t}{dK} = -\int_K^{+\infty} \pi(s)\, ds$$

en utilisant les théorèmes fondamentaux de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

En dérivant de nouveau cette expression nous obtenons :

$$\frac{d^2 C_t}{dK^2} = \pi(K).$$

Cette équation exprime le fait que la dérive seconde du prix de l'option par rapport au prix d'exercice est le «prix d'état». Ce résultat remarquable provient uniquement de la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage. En connaissant les valeurs des options de prix d'exercice différents on peut alors calculer les «prix d'état».

On peut remarquer que le calcul pour un nombre d'états discrets et la dérivation faite plus haut sont compatibles. Reprenons de nouveau le calcul pour un nombre d'états discrets. Au lieu de supposer que le prix de l'action varie d'une unité, nous noterons cette variation ΔS. Dans ce cas, l'analogue du prix du portefeuille C 12 − C 23 est :

$$\frac{(C(K-\Delta S)-C(K)/\Delta S)-(C(K)-C(K+\Delta S)/\Delta S)}{\Delta S}$$

Quand ΔS tend vers zéro cette expression tend vers la dérivée seconde de C(K). La dérivée seconde du prix de l'option est égale au « prix d'état », comme nous l'avons établi plus haut.

8 Prix des actifs d'Arrow-Debreu pour les processus dynamiques stochastiques

Un actif dont la valeur est une fonction connue des valeurs d'autres actifs à un instant donné est appelé *actif contingent* ou *actif dérivé*. Par exemple, une option d'achat sur une action S vaut max $(0, S_0 - K)$ à la date de maturité de l'option. Mais combien vaudrait une telle option à un instant t avant sa maturité ?

Dans un paragraphe précédent, on a trouvé des bornes indépendantes du processus stochastique suivi par l'action pour la valeur de l'option. Mais si ce processus stochastique est connu, on peut trouver un encadrement plus fin. En fait, dans les cas les plus intéressants, on peut alors déterminer la valeur explicite d'une option — ou de tout autre actif contingent dont la valeur dépende de la valeur de l'action — en utilisant simplement le principe d'arbitrage décrit précédemment.

Cette méthode fut employée historiquement pour valoriser les options, mais je l'illustrerai avec le cas d'un actif d'Arrow-Debreu.

En effet, tout autre actif contingent à un actif donné peut être valorisé en utilisant les « prix d'états » d'Arrow-Debreu.

Supposons que l'on ait une action, dont le prix puisse soit augmenter et prendre la valeur Su avec une probabilité q, soit baisser et prendre la valeur Sd avec une probabilité $(1-q)$, ce qui peut se traduire par :

$$S - \begin{bmatrix} Su & q \\ Sd & 1-q \end{bmatrix}$$

Le problème est de valoriser un actif d'Arrow-Debreu dont la distribution des paiements est donnée par :

$$\pi_u - \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1-q \end{bmatrix}$$

Comment faire ? Considérons un portefeuille qui comporte x actions et B obligations rapportant Br en période deux. (Ici r est simplement un plus le taux d'intérêt.) Ce portefeuille a alors une distribution de paiements :

$$xS + B - \begin{bmatrix} xSu + Br & q \\ xSd + Br & 1-q \end{bmatrix}$$

Choisissons x et B afin de créer la même distribution de paiements pour ce portefeuille que pour l'actif d'Arrow-Debreu. Nous voulons donc :

$$xSu + Br = 1$$
$$xSd + Br = 0$$

Un calcul algébrique montre que les solutions (x^*, B^*) de ces équations sont :

$$x^* = \frac{1}{(Su - Sd)}$$

$$B^* = -\frac{d}{(u-d)r}$$

Du fait que ce portefeuille (x^*, B^*) ait les mêmes paiements que l'actif d'Arrow-Debreu, ils doivent avoir le même prix. La valeur de l'actif d'Arrow-Debreu qui donne 1 $ dans l'état haut et 0 $ dans l'état bas, doit alors être :

$$\pi_u = x^* S + B^* = \frac{1}{(u-d)} - \frac{d}{(u-d)r} = \frac{(r-d)}{(u-d)r}$$

Un argument analogue montre que l'actif d'Arrow-Debreu qui paie 1 $ dans l'état bas, doit valoir :

$$\pi_d = \frac{u-r}{(u-d)r}$$

Jusqu'ici, ceci n'est qu'une simple application de l'argumentation générale développée dans le deuxième paragraphe : s'il n'y a que deux états de la nature, (u, d), et deux actifs dont les paiements sont (Su, Sd) et (rB, rB), on peut alors construire les actifs d'Arrow-Debreu de paiements (1,0) et (0, 1) et valoriser ceux-ci en utilisant les prix des deux autres actifs.

Remarquons que $\pi_u + \pi_d = 1/r$. Ceci signifie qu'un portefeuille qui donnerait 1 $ dans tous les états de la nature devrait valoir $1/r$ dollars aujourd'hui. Ceci est tout à fait compréhensible : un portefeuille qui donne 1 $ dans tous les états, a donc un rendement certain de 1 $ quoi qu'il arrive. Or la valeur aujourd'hui d'un dollar à la période suivante est simplement $1/r$. (Autrement dit, la valeur d'une obligation zéro — coupon, une période avant sa date de maturité, est simplement l'inverse de un plus le taux d'intérêt.)

Nous avons déterminé les prix d'Arrow-Debreu en construisant un portefeuille qui a les mêmes paiements. Une autre façon de trouver les « prix d'états » serait d'utiliser directement des relations d'arbitrage. La *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* implique que le prix d'une action S est donnée par :

$$S = \pi_u S u + \pi_d S d$$

ce qui s'écrit encore :

$$\pi_u u + \pi_d d = 1. \tag{6}$$

De façon analogue la valeur de l'obligation aujourd'hui est $\frac{1}{r}$, soit :

$$\pi_u + \pi_d = \frac{1}{r} \tag{7}$$

En résolvant les deux équations (6) et (7) par rapport aux inconnues π_u et π_d, nous obtenons les « prix d'états ».

Notons que les « prix d'états » π_u et π_d ne dépendent pas de la probabilité que le prix de l'action monte ou baisse. Ils ne dépendent que du fait que le prix de l'action va augmenter ou abisser – c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que des paramètres du processus stochastique qui décrit l'évolution du prix de l'action. Une fois ce processus connu, les « prix d'états » peuvent être calculés.

Généralisons cette méthode à un problème à trois périodes : la période 0 (aujourd'hui), la période 1 (quand le prix de l'actif monte ou baisse une fois), la période 2 (quand le prix de l'action monte ou baisse une nouvelle fois). De façon schématique nous avons :

$$S - \begin{cases} Su - \begin{cases} Suu & q^2 \\ Sud & q(1-q) \end{cases} \\ Sd - \begin{cases} Sdu & (1-q)q \\ Sdd & (1-q)^2 \end{cases} \end{cases}$$

Notons, qu'en dépit des apparences, il n'y a que trois états de la nature en dernière période. Les états (*ud*) et (*du*) correspondent au même paiement et ont la même probabilité de se réaliser.

Nous voudrions valoriser un actif d'Arrow-Debreu qui donne 1 $ dans l'état (*uu*). Plaçons nous en période 2. Nous savons en utilisant le raisonnement précédent que, en période deux, un actif qui donne 1 $ dans l'état (*uu*) vaudra $(r-d)/(u-d)r$. Nous savons également que, en seconde période, un actif qui donne 0 dans l'état (*ud*) et 0 dans l'état (*dd*) vaudra 0 à la date 1 (sinon il y aurait une possibilité d'arbitrage évidente).

Plaçons-nous maintenant à la première période. Nous devons alors valoriser un actif qui donne $(r-d)/(u-d)r$ dans l'état haut et 0 dans l'état bas. En utilisant les « prix d'états » π_u et π_d, trouvés ci-dessus, nous avons :

$$\pi_{uu} = \pi_u \left(\frac{r-d}{(u-d)r} \right) + \pi_d 0 = \pi_u^2.$$

De façon analogue nous trouvons:

$$\pi_u d = 2\,\pi_u \pi_d = 2\,\pi_u (1-\pi_u)$$
$$\pi_{dd} = \pi_d^2$$

Il est facile d'en déduire une méthodologie plus générale. Si nous voulons valoriser un actif d'Arrow-Debreu qui donne 1 \$ dans n périodes si et seulement si on a observé u sauts vers l'état haut et $(n-u)$ sauts vers l'état bas, on obtient alors:

$$\pi_{u,\,n-u} = \binom{n}{u} \pi_u^u \pi_d^{n-u}.$$

On voit tout de suite un lien avec la distribution binomiale. En effet, on retrouve une distribution binomiale de paramètres π_u et π_d. Mais notons que dans ce problème, la véritable probabilité q ne joue aucun rôle dans la valorisation des actifs d'Arrow-Debreu. Le prix d'un actif qui donne 1 \$ dans un certain état de la nature sera indépendant de la probabilité que cet état se réalise.

Bien sûr le prix de l'action elle même dépendra de la probabilité que chacun des états se réalise, ou plus généralement, dépendra des croyances des gens sur les probabilités que chacun des états se réalise. N'importe quel groupe de personnes, qui sont d'accord sur la valeur actuelle de l'action et sur la distribution binomiale suivie par le prix de l'action, doivent aussi être d'accord sur les prix d'actifs dont les paiements sont conditionnels au prix de l'action dans les états futurs, ceci, aussi longtemps que la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage est réalisée.

Supposons que nous disposions des « prix d'état » dans chaque événement $(u, n-u)$. Nous pouvons alors calculer le prix de tout actif contingent, une fois que nous connaissons sa valeur dans chaque état de la nature. Par exemple nous pourrions calculer la valeur d'une option d'achat sur action puisque nous savons exprimer son prix à la date de maturité en fonction du prix de l'action à cette date, soit $\max(0, S_0 - K)$.

En appliquant les formules ci-dessus, nous pouvons trouver le prix d'une option sur une action qui suit un processus binomial, soit:

$$C_n = \sum_{u=1}^{n} \frac{n!}{u!\,(n-u)!} \pi_u^u \pi_d^{n-u} \max\left[0,\, u^u d^{n-u} S - K\right]$$

Ainsi, dans le cas d'un processus stochastique binomial, nous pouvons calculer les « prix d'états » pour toutes les réalisations possibles du processus à toute date future en n'utilisant que les prix actuels de l'action et de l'obligation. Même quand on ne dispose que de deux actifs, on peut engendrer tous les états, aussi nombreux soient-ils, générés par le processus binomial. Cela repose sur le fait que l'on connaît la structure arborescente d'évolution des prix de l'action. Puisque nous pouvons construire l'évolution du processus d'une période à l'autre, nous pouvons donner un prix à n'importe quel actif dont la valeur évolue selon le processus.

Pour construire des prix d'états à partir d'autres processus stochastiques, nous utilisons un passage à la limite en faisant tendre le processus binomial vers une loi normale ou une loi de Poisson. Cela nous donnera les « prix d'états » implicites pour des processus d'Itô ou des processus de sauts. Les idées décrites ci-dessus ont été développées à l'origine pour trouver les prix d'options sur des actions qui suivaient des processus continus d'Itô. Ce n'est que récemment que l'on s'est rendu compte que l'on pouvait traiter ces questions de façon plus simple.

9 Résumé

Nous avons vu comment le simple principe d'arbitrage décrit dans l'introduction peut être utilisé pour calculer des conditions nécessaires d'équilibre entre les prix des actifs sur les marchés financiers. Cette hypothèse simple a des conséquences qui surprennent toujours. D'une certaine façon, les applications du principe d'arbitrage semblent contenir une contradiction interne: en effet, le principe d'arbitrage nous dit qu'on n'a rien sans rien. Or cet article et les résultats des articles cités dans les références nous montrent qu'avec très peu d'hypothèses, on peut démontrer beaucoup de théorèmes.

10 Guide pour approfondir le sujet

Une importante littérature existe sur ces sujets en économie financière. Je ne parlerai ici que des principaux articles utilisés pour rédiger cet article, et je mentionnerai brièvement quelques-unes des références les plus importantes qui peuvent servir d'introduction à cette littérature.

Formalisation de la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage. La formalisation du principe d'arbitrage et son utilisation sont dues à Ross [1976], [1978]. Ces utilisations très élégantes constituent une excellente introduction à ce sujet.

Utilisation de l'arbitrage pour borner les prix des options. Les résultats développés ici sont dus à MERTON [1973] et COX et ROSS [1976].

Prix des options et prix d'états. C'est ROSS [1976] qui, le premier, eut l'idée d'utiliser les options pour engendrer l'espace des états de la nature. BREEDEN et LITZENBERGER [1978] ont montré que la dérivée seconde du prix de l'option est égale au « prix d'état », ceci sans utiliser directement l'argument d'absence d'opportunités d'arbitrage.

Prix d'Arrow-Debreu pour des processus stochastiques. La procédure utilisée ici est identique à celle suivie par Cox, Ross, Rubinstein [1979]. Ces derniers se sont plutôt intéressés au problème de valorisation des options, plutôt qu'à la recherche des « prix d'états » implicites du modèle binomial. Mais les méthodes utilisées sont presque identiques. Breeden et Litzenberger [1978] ont montré comment utiliser les prix des options pour trouver les « prix d'états », ceci dans un cadre général. Les premiers résultats permettant de déterminer les prix des options (dans un modèle en temps continu) sont dus à Black et Scholes [1973]. On peut trouver de plus amples développements chez Cox et Ross [1976], Cox et Rubinstein [1985], et Merton (1973).

Démonstration du théorème d'absence d'opportunité d'arbitrage

Le problème est de montrer que la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage, donnée dans cet article, implique l'existence de «prix d'états» π positifs. Pour attaquer cette question, considérons le problème de programmation linéaire suivant:

$$\min p \,.\, x$$
$$s.c. \quad \mathrm{R}\, x \geqslant 0.$$

où les coordonnées de x sont de signes quelconques. Ce problème de programmation linéaire permettra de trouver le portefeuille le moins cher qui donnera des rendements positifs. Par construction, le portefeuille x peut comporter des positions négatives ou positives pour chacun des actifs. $x=0$ vérifie la contrainte, et la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage nous affirme qu'il réalise le minimum de la fonction objectif. Ainsi le problème de programmation linéaire a une solution finie.

Le programme dual est:

$$\max \pi \,.\, 0$$
$$s.c. \quad \pi \mathrm{R} = p.$$

où π est le vecteur positif à S coordonnées représentant les variables duales. Remarquons que, puisque x est de signe arbitraire, les contraintes du programme dual sont toutes des égalités. Pour des explications plus détaillées, se reporter à n'importe quel livre de programmation linéaire (la fonction objectif peut sembler étrange du fait de la multiplication par zéro mais ceci est la forme correcte du programme dual).

Comme le programme primal a une solution finie et réalisable, le programme dual aussi. Ainsi la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* implique que le vecteur positif π, à S coordonnées, existe et vérifie:

$$p = \pi \mathrm{R}.$$

La réciproque est encore plus facile. De façon plus explicite il faut montrer que l'existence de «prix d'états» (π_s) positifs implique que la *condition d'absence d'opportunités d'arbitrage* est vérifiée. Prenons un portefeuille x tel que:

$$\mathrm{R}\, x \geqslant 0.$$

Multiplions chaque côté de l'inégalité par π et utilisons le fait que $p=\pi R$. Nous avons alors:

$$\pi R x \geqslant 0,$$

$$px \geqslant 0,$$

ce qui prouve le résultat. □

Je remercie Carl SHAPIRO, Joseph STIGLITZ et Timothy TAYLOR de leurs remarques, qui m'ont été utiles.

• Références bibliographiques

BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). – «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-654.

BREEDEN, D. et LITZENBERGER, R. (1978). – «Prices of State Contingent Claims Implicit in Option Prices», *Journal of Business*, 51, p. 621-651.

COX, J. et ROSS, S. (1976). – «A Survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory», *Journal of Finance*, 31, n° 1, p. 383-402.

COX, J., ROSS, S. et RUBINSTEIN, M. (1979). – «Option Pricing: A Simplified Approach», *Journal of Financial Economics*, 7, p. 229-263.

COX, J. et RUBINSTEIN, M. (1985). – *Options Markets*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

MERTON, R. (1973). – «The Theory of Rational Option Pricing», *Bell Journal of Economics and Management Science*, Spring, 1973.

ROSS, S. (1978). – «A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams», *Journal of Business*, 51, n° 3, p. 453-475.

ROSS, S. (1976). – «Risk, Return, and Arbitrage», FRIEND I. et BICKSLER, J. éd., *Risk and Return in Finance*, Ballinger, Cambridge.

ROSS, S. (1976). – «Options and Efficiency», *Quarterly Journal of Economics*, 40, p. 75-89.