ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. - N° 6/7 — 1987

Tests non paramétriques optimaux pour le modèle autorégressif d'ordre un

Jean-Marie Dufour, Marc Hallin *

RÉSUMÉ. – Ce texte développe des méthodes d'inférence non paramétriques pour le processus autorégressif d'ordre un. Le problème étudié est de tester l'hypothèse H_0 que le coefficient d'autocorrélation ρ a une valeur donnée ρ_0. Nous considérons la famille des tests basés sur les autocorrélations de rangs du modèle transformé sous H_0. Dans la classe considérée, nous dérivons des tests asymptotiquement optimaux pour des contre-hypothèses locales, et calculons leur efficacité asymptotique relative par rapport à plusieurs procédures disponibles (paramétriques et non paramétriques).

Optimal Non Parametric Tests for a First Order Autoregressive Model

ABSTRACT. – This paper proposes nonparametric inference methods for the first-order autoregressive process. The problem studied is to test any hypothesis H_0 stating that the autocorrelation coefficient ρ has a given value ρ_0. We consider the family of tests based on rank autocorrelations from the model transformed under H_0. Within this class, we derive asymptotically optimal tests against local alternatives, and compute their asymptotic relative efficiencies with respect to several available procedures (parametric and nonparametric).

---

* J.-M. DUFOUR: Département de Sciences Économiques et Centre de Recherche et Développement en Économique, Université de Montréal, CP 6128, Montréal, Québec, H3C 3I7 Canada; M. HALLIN: Institut de Statistique, Université Libre de Bruxelles, 50 avenue Franklin D.-Roosevelt, 1050 Bruxelles; Belgique. Cette recherche a bénéficié de l'appui financier des organismes suivants : CORE (Université catholique de Louvain), CEPREMAP (Paris), Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, Conseil de recherches en sciences humaines du Canada et Fonds FCAR du Québec. Nous désirons remercier Christian Gouriéroux et un arbitre anonyme pour leurs commentaires.

1 Introduction

Le processus autorégressif d'ordre un est certainement l'un des modèles les plus utilisés dans l'analyse statistique des séries chronologiques et en économétrie. On s'en sert, en particulier, afin de modéliser la dépendance dans une série et comme base pour tester le caractère aléatoire d'une série. Dans ce contexte, l'inférence concernant le coefficient d'autocorrélation constitue un problème de base. Par « inférence », nous entendons ici le développement de tests et la construction de régions de confiance (par opposition au problème de l'estimation ponctuelle).

La plupart des méthodes d'inférence existantes pour les modèles de séries chronologiques et, en particulier, pour le processus AR(1) sont paramétriques dans le sens où les distributions des statistiques dépendent de façon importante de la forme de la distribution des observations. En outre, la détermination des niveaux de confiance est habituellement basée sur une approximation asymptotique. Les quelques résultats exacts disponibles reposent sur l'hypothèse de normalité: voir KING [1986] et DUFOUR et KING [1986]. Il est bien connu que les méthodes paramétriques, exactes ou asymptotiques, peuvent se révéler peu fiables si l'hypothèse de normalité n'est pas satisfaite. En particulier, les problèmes de non-normalité sont fréquents dans l'analyse des séries économiques, par exemple, lorsqu'on considère des données relatives aux marchés financiers (prix d'actions en bourse, taux de change, etc.): voir MANDELBROT [1963, 1967], FAMA [1965], PRAETZ [1972], BLATTBERG et GONEDES [1974] et GIDDY et DUFEY [1975]. D'autre part, les méthodes non paramétriques disponibles pour l'analyse des séries chronologiques demeurent limitées à des tests du caractère aléatoire d'une série; voir DUFOUR [1981], DUFOUR, LEPAGE et ZEIDAN [1982], HALLIN *et al.* [1985, 1986], HALLIN et MÉLARD [1986].

Dans cet article, nous considérons le problème qui consiste à tester si le coefficient d'autocorrélation ρ d'un processus autorégressif d'ordre un (où $|\rho|<1$) a une valeur donnée ρ_0. Ce problème peut être intéressant par lui-même : par exemple, on peut vouloir tester $\rho=0$ (indépendance), $\rho=1/2$, l'hypothèse que ρ a une valeur proche mais différente de 1, etc. De plus, une seconde raison de considérer le problème général $H_0 : \rho=\rho_0$ provient de la dualité entre les tests et les régions de confiance : en déterminant l'ensemble des valeurs admissibles ρ_0 qui ne sont pas rejetées par un test de niveau α, on obtient une région de confiance de niveau $1-\alpha$.

Pour résoudre ce problème, nous étudions une classe générale de tests basés sur des autocorrélations de rangs. Sous la simple condition que les innovations du processus ont une distribution continue arbitraire (les innovations sont i. i. d. continues), les tests dans cette classe ont une distribution (sous l'hypothèse nulle) qui ne dépend pas de la forme de la densité des observations. Sous des conditions supplémentaires assez faibles de régularité sur la forme de cette densité, nous dérivons des tests asymptotiquement optimaux pour des contre-hypothèses locales. En outre, nous donnons la distribution asymptotique des statistiques sous l'hypothèse nulle et nous étudions la fonction de puissance des tests pour des contre-hypothèses locales. En particulier, nous examinons leur efficacité asymptotique relative

(A.R.E.) par rapport à plusieurs procédures disponibles, paramétriques et non paramétriques : test de von Neumann (ou de Durbin-Watson), tests de type « portemanteau » (paramétriques et non paramétriques), tests invariants localement optimaux (DUFOUR et KING [1986]), version non paramétrique du test de von Neumann (BARTELS [1982]), tests d'autocorrélation de rangs de types van der Waerden, Wilcoxon et Laplace (HALLIN et PURI [1988]).

Les tests proposés ont les avantages usuels des tests non paramétriques : distribution indépendante de la forme de densité sous-jacente (sous l'hypothèse nulle), bonne convergence vers la distribution asymptotique normale, robustesse par rapport aux observations aberrantes. En outre, la distribution exacte des statistiques peut être obtenue par les procédures d'énumération usuelles dans le domaine des méthodes de rangs. Dans le cas où l'énumération n'est pas réalisable (parce que le nombre de cas possibles est trop grand), on peut toujours obtenir une version « randomisée » du test en tirant au hasard un nombre plus limité de permutations des rangs et en calculant le point critique à partir de la distribution empirique correspondante de la statistique (incluant la valeur observée) : le test ainsi obtenu a le niveau désiré.

Dans la section 2, nous décrivons plus en détail les hypothèses et le problème considérés. Dans la section 3, nous étudions les autocorrélations de rangs, qui constituent la base de nos tests, et nous établissons leur distribution asymptotique sous l'hypothèse nulle. Dans la section 4, nous énonçons certaines hypothèses de régularité sur la densité des observations, nous dérivons la distribution asymptotique des autocorrélations de rangs pour des suites d'hypothèses contiguës et nous donnons les tests optimaux de l'hypothèse $\rho=\rho_0$ (localement et asymptotiquement) dans la classe des tests basés sur les autocorrélations de rangs. Dans la section 5, nous comparons les tests proposés avec un certain nombre d'autres tests possibles (paramétriques et non paramétriques) pour la même hypothèse. Enfin, dans la section 6, nous résumons nos principaux résultats et concluons.

2 Le problème

Soit $\mathbf{X}^{(n)}=(X_0^{(n)}, X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)})'$ une série observée de longueur $n+1$. Notons $f_\sigma(x)=f_1(x/\sigma)/\sigma$, $\sigma>0$, une famille de densités univariées indexée par le paramètre d'échelle σ, et telle que

$$\int x f_\sigma(x)\,dx=0, \qquad \int x^2 f_\sigma(x)\,dx=\sigma^2<\infty.$$

Nous désignerons par $H_f^{(n)}(\rho)$ l'hypothèse suivant laquelle $\mathbf{X}^{(n)}$ constitue une réalisation finie du processus autorégressif défini par les définitions (1) et (2) ci-dessous :

(H 1) :le modèle AR (1)

$$X_t^{(n)} - \rho X_{t-1}^{(n)} = \varepsilon_t, \qquad t=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

où $|\rho|<1$ et $\{\varepsilon_t : t \in Z\}$ est un bruit blanc de densité f_σ, c'est-à-dire une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (i. i. d.) de densité f_σ ; le paramètre d'échelle σ ne jouant aucun rôle dans la suite, nous le supposerons non spécifié sous $H_f^{(n)}(\rho)$, et la notation f sera utilisée pour une densité f_σ à variance non spécifiée ;

(H 2) : une distribution initiale, celle de l'observation $X_0^{(n)}$, de moyenne nulle et de densité f^0 non spécifiée ; $X_0^{(n)}$ est indépendant de tous les ε_t, $t \geqslant 1$.

L'hypothèse obtenue à partir de $H_f^{(n)}(\rho)$ en ne spécifiant pas le type de densité des ε_t sera notée $H_{\cdot}^{(n)}(\rho)$. Notre objectif est de tester l'hypothèse nulle $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$ que ρ égale ρ_0, toutes autres choses demeurant non spécifiées, par rapport à des contre-hypothèses du type $\rho > \rho_0$, $\rho < \rho_0$ ou $\rho \neq \rho_0$.

Des arguments d'invariance (voir DUFOUR et KING [1986]) suggèrent de fonder ces tests sur des fonctions du vecteur de résidus

$$\mathbf{Z}^{(n)} = (Z_1^{(n)}, \ldots, Z_t^{(n)})', \qquad Z_t^{(n)} = X_t^{(n)} - \rho_0 X_{t-1}^{(n)}. \tag{2}$$

La non-spécification, sous $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$, de la densité f conduit donc tout naturellement à considérer les rangs $\mathbf{R}^{(n)} = (R_1^{(n)}, \ldots, R_n^{(n)})'$ de $Z_1^{(n)}, \ldots, Z_n^{(n)}$ pour l'obtention de tests α-semblables. Sous $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$, le vecteur $\mathbf{R}^{(n)}$ constitue avec probabilité un une permutation aléatoire de $(1, 2, \ldots, n)$ (la continuité absolue de la distribution des observations assure que celles-ci sont toutes distinctes avec probabilité un). Toute statistique mesurable par rapport à $\mathbf{R}^{(n)}$ est par conséquent *libre* sous $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$, c'est-à-dire que sa distribution ne dépend pas de la densité f sous-jacente. C'est, bien entendu, cette propriété qui assure le caractère non paramétrique des procédures de test fondées sur de telles statistiques.

Enfin, il est important de remarquer que l'emploi du vecteur $\mathbf{R}^{(n)}$ des rangs des observations transformées $Z_t^{(n)} = X_t^{(n)} - \rho_0 X_{t-1}^{(n)}$ garantit l'applicabilité des tests sous l'hypothèse plus générale

$$X_t^{(n)} - \rho X_{t-1}^{(n)} = \gamma + \varepsilon_t, \qquad t=1, 2, \ldots, |\rho|<1, \tag{1'}$$

où γ est une constante inconnue quelconque. Ceci provient du fait que les rangs sont invariants par rapport à toute transformation $Z_t^{(n)} \to Z_t^{(n)} + c$, $t=1, \ldots, n$, où c est une constante arbitraire. La distribution sous l'hypothèse nulle $(\rho = \rho_0)$ de toute statistique basée sur les rangs $\mathbf{R}^{(n)}$ est la même peu importe la valeur de γ. On peut donc supposer γ connu et, en particulier, $\gamma = 0$. Pour simplifier l'exposé, nous poserons $\gamma = 0$.

Un terme de tendance linaire pourrait également être pris en considération dans le modèle (1) [modèle de régression avec erreurs AR (1)]. Les résultats de SWENSEN [1985] suggèrent que, sous des conditions très générales, l'estimation préalable des paramètres de cette tendance n'affecte pas le comportement asymptotique des statistiques de rangs. Tous les résultats asymptotiques présentés ci-dessous resteraient donc inchangés en cas d'introduction d'un tel terme. L'estimation préalable qu'elle entraîne affecte cependant la distribution exacte des rangs (qui ne sont plus alors que des *rangs alignés*), et les autocorrélations de rangs ne sont plus qu'approximativement *libres* sous l'hypothèse nulle.

3 Autocorrélations de rangs

Les autocorrélations de rangs constituent une version sérielle du classique *coefficient de corrélation de rangs de Spearman.* L'idée de les utiliser pour détecter les dépendances sérielles au sein d'une série d'observations remonte à WALD et WOLFOWITZ [1943]. Les tests qu'ils proposent sont des tests de l'hypothèse de bruit blanc; aucune indication n'est fournie concernant leur puissance et aucune contre-hypothèse particulière de dépendance n'est envisagée. Des résultats concernant la puissance asymptotique de tests de bruit blanc fondés sur les autocorrélations de rangs d'ordre un, et pour une contre-hypothèse de dépendance de type AR (1), sont donnés par KNOKE [1977] et par BARTELS [1982]. Des tests de type portemanteau construits à partir des autocorrélations de rangs ont été considérés par HALLIN *et al.* [1987] et par DUFOUR et ROY [1986 *a*].

L'emploi des autocorrélations de rangs s'est donc en grande partie limitée aux tests de l'hypothèse de bruit blanc et aux autocorrélations du premier ordre. Notre propos ici est de montrer que ces autocorrélations, à l'instar des autocorrélations habituelles, peuvent être utilisées dans des problèmes plus généraux — à condition toutefois que les coefficients d'ordre supérieur à un soient pris en considération.

Réservant au coefficient d'autocorrélation classique la notation habituelle $r_p^{(n)} = \sum_{t=p+1}^{n} Z_t^{(n)} Z_{t-p}^{(n)} / \sum_{t=1}^{n} (Z_t^{(n)})^2$, nous noterons $\tilde{r}_p^{(n)}$ le coefficient d'autocorrélation de rangs d'ordre p :

$$\tilde{r}_p^{(n)} = [(n-p)^{-1} \sum_{t=p+1}^{n} R_t^{(n)} R_{t-p}^{(n)} - m_p^{(n)}]/s_p^{(n)}, \tag{3}$$

où $m_p^{(n)}$ et $s_p^{(n)}$ sont des constantes de normalisation. Un choix traditionnel pour ces constantes serait

$$m_p^{(n)} = \bar{R}^2 = (n^{-1} \sum_{t=1}^{n} R_t^{(n)})^2 = (n+1)^2/4$$

et

$$s_p^{(n)} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} (R_t^{(n)} - \bar{R})^2 = (n^2-1)/12.$$

Il nous a cependant paru préférable de les choisir de façon que $(n-p)^{1/2}\tilde{r}_p^{(n)}$ soit exactement standardisée (moyenne nulle, variance unité) sous l'hypothèse nulle que $\mathbf{R}^{(n)}$ constitue une permutation aléatoire de $(1, \ldots, n)$. Il convient alors d'adopter

$$(4)\qquad m_p^{(n)} = [n(n-1)]^{-1} \sum_{1 \leqslant t_1 \neq t_2 \leqslant n}\sum t_1 t_2 = (n+1)(3n+2)/12,$$

et

$$\begin{aligned}(5)\quad (s_p^{(n)})^2 = {} & [n(n-1)]^{-1} \sum_{1 \leqslant t_1 \neq t_2 \leqslant n}\sum t_1^2 t_2^2 \\ & + 2(n-2p)[n(n-1)(n-2)(n-p)]^{-1} \sum_{1 \leqslant t_1 \neq t_2 \neq t_3 \leqslant n}\sum\sum t_1^2 t_2 t_3 \\ & + [(n-p)^2 - 3n + 5p][n(n-1)(n-2)(n-3)(n-p)]^{-1} \\ & \sum_{1 \leqslant t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_4 \leqslant n}\sum\sum\sum t_1 t_2 t_3 t_4 - [(n-p)(n+1)^2(3n+2)^2/144].\end{aligned}$$

Les expressions (4) et (5) s'obtiennent aisément à partir d'arguments combinatoires. L'introduction des sommes de puissances

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2, \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6,$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = S_1^2, \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

permet d'exprimer (5) sous une forme se prêtant mieux à une évaluation numérique :

$$\begin{aligned}(6)\quad (s_p^{(n)})^2 = {} & [n(n-1)]^{-1}(S_2^2 - S_4) \\ & + 2(n-2p)[n(n-1)(n-2)(n-p)]^{-1}(S_1^2 S_2 - S_2^2 - 2S_1^3 + 2S_4) \\ & + [(n-p)^2 - 3n + 5p][n(n-1)(n-2)(n-3)(n-p)]^{-1} \\ & \quad (S_1^4 - 6S_1^2 S_2 + 8S_1^3 - 6S_4 + 3S_2^2) \\ & - [(n-p)(n+1)^2(3n+2)^2/144];\end{aligned}$$

pour obtenir l'expression (6), on peut se servir des formules données par KENDALL et STUART [1977, Table 10, p. 439].

D'autres versions, circulaires ou non circulaires, ont été considérées dans la littérature; pour une bibliographie détaillée, voir DUFOUR *et al.* [1982]. Toutes sont asymptotiquement équivalentes [à des $o_p(n^{-1/2})$ près]; la nôtre présente l'avantage dêtre la version exactement standardisée de la somme $\sum_{p+1}^{n} R_t^{(n)} R_{t-p}^{(n)}$ qui seule est porteuse d'information concernant une éventuelle dépendance sérielle d'ordre p. A titre de comparaison, la définition utilisée par DUFOUR et ROY [1985, 1986*a*, 1986*b*], qui est obtenue par analogie avec une définition paramétrique, fait intervenir une transformation linéaire de la statistique

$$\sum_{t=p+1}^{n} R_t^{(n)} R_{t-p}^{(n)} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\sum_{p+1}^{n} R_t^{(n)} + \sum_{1}^{n-p} R_t^{(n)}\right).$$

La distribution exacte des $\tilde{r}_p^{(n)}$ peut être obtenue par les procédures d'énumération habituelles dans le domaine des méthodes de rangs. Leur distribution asymptotique découle des résultats de HALLIN *et al.* [1985] sur les *statistiques de rangs sérielles linéaires.*

PROPOSITION 1 :

Sous $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$, tout k-uple $[(n-1)^{1/2}\tilde{r}_1^{(n)}, \ldots, (n-k)^{1/2}\tilde{r}_k^{(n)}]'$ d'autocorrélation de rangs est asymptotiquement normal, de moyenne nulle et de matrice de covariance unité lorsque $n \to \infty$ (k fixe).

Démonstration : Voir appendice 1.

4 Tests optimaux

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, le vecteur $\mathbf{R}^{(n)}$ des rangs des observations filtrées $Z_t^{(n)}$ constitue, sous $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$, une permutation aléatoire de $(1, \ldots, n)$. N'importe lequel des coefficients $\tilde{r}_p^{(n)}$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, peut être utilisé pour le test de $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$. Il est clair cependant que, si un test raisonnablement puissant doit être construit, il ne peut être fondé sur un seul de ces coefficients. Au cas, en effet, où le paramètre ρ du modèle (1) ayant engendré les observations $X_t^{(n)}$diffère de ρ_0, la série des $Z_t^{(n)}$, au lieu de constituer la réalisation d'un bruit blanc, obéit au modèle ARMA (1, 1)

$$Z_t - \rho Z_{t-1} = \varepsilon_t - \rho_0 \varepsilon_{t-1}.$$

Toutes les mesures de dépendance sérielle, peu importe le délai, sont donc susceptibles de contribuer à la puissance d'un test de l'hypothèse $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$. La question qui se pose est donc la suivante : parmi tous les tests mesurables en les autocorrélations $(\tilde{r}_1^{(n)}, \tilde{r}_2^{(n)}, \ldots, \tilde{r}_{n-1}^{(n)})$, lequel est le *meilleur ?*

Avant de fournir une réponse à cette question, précisons tout d'abord le concept d'optimalité que nous considérons ici. Bien que la version *gaussienne* du problème admette une solution optimale pour des échantillons finis (DUFOUR et KING [1986]), les techniques disponibles dans le domaine des tests de rangs ne permettent en général d'envisager que des propriétés d'optimalité *locales* et *asymptotiques.* Nous considérerons donc des contre-hypothèses du type Pitman-Noether, ici des suites d'hypothèses de la forme $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, où $\Delta \neq 0$ est un nombre réel quelconque.

Le comportement asymptotique des statistiques de rangs sérielles sous ce type de contre-hypothèse a été étudié par HALLIN *et al.* [1985] et HALLIN et PURI [1988] à partir des techniques de Le Cam-Hájek fondées sur la notion de *suites contiguës d'hypothèses* (LE CAM [1960], HÁJEK et SIDÁK [1967]). Pour que ces techniques soient applicables à notre problème, il convient cependant d'imposer à la densité f un certain nombre de conditions de régularité que nous supposerons désormais satisfaites :

(R1) $\int x^6 f(x)\, dx < \infty$;

(R 2) $\dot{f}(x)=(d/dx)\, f(x)$ existe p. p. et $\varphi(x)=-\dot{f}(x)/f(x)$ est de puissance $(2+\delta)$ – intégrable ($\delta>0$ arbitraire) :

$$\int |\varphi(x)|^{2+\delta} f(x)\, dx<\infty\,;$$

(R 3) $\dot{\varphi}(x)=(d/dx)\,\varphi(x)$ existe p. p. et satisfait à la condition de Lipschitz $|\dot{\varphi}(x)-\dot{\varphi}(y)|<K_f|x-y|$, où K_f est une constante indépendante de x et y.

La distribution asymptotique conjointe des autocorrélations de rangs sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ est alors donnée par le résultat suivant.

Proposition 2 : Tout k-uple $[(n-1)^{1/2}\tilde{r}_1^{(n)}, \ldots, (n-k)^{1/2}\tilde{r}_k^{(n)}]'$ d'autocorrélations de rangs est, sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, asymptotiquement normal, de moyenne $\Delta[\mu_1(\rho_0\,;f), \ldots, \mu_k(\rho_0\,;f)]'$ et de matrice de covariance unité où

$$\mu_p(\rho_0\,;f)=12\,\rho_0^{p-1}\int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du\int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv. \tag{7}$$

Démonstration : Voir appendice 1.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal, qui fournit le test le plus puissant (localement et asymptotiquement) dans la classe des tests basés sur les autocorrélations de rangs.

Proposition 3 :

(i) Le test consistant à rejeter $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$ lorsque

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{1/2}\rho_0^{i-1}\tilde{r}_i^{(n)}>k_{1-\alpha}[(1-\rho_0^{2\,(n-1)})/(1-\rho_0^2)]^{1/2}, \tag{8}$$

où $k_{1-\alpha}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la variable $N(0, 1)$, est asymptotiquement le plus puissant, uniformément, pour la suite de contre-hypothèses unilatérales

$$\bigcup_{\Delta>0} H_\cdot^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta), \tag{9}$$

dans la classe des tests mesurables en les autocorrélations de rangs et de niveau asymptotique α; sa puissance asymptotique pour la contre-hypothèse $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ est

$$1-\Phi[k_{1-\alpha}-\Delta\mu_1(\rho_0\,;f)/(1-\rho_0^2)^{1/2}], \tag{10}$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la variable $N(0, 1)$.

(ii) Une propriété similaire peut être énoncée pour les valeurs négatives de Δ.

(iii) Le test consistant à rejeter $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$ lorsque

$$(11) \qquad \left|\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}\right| > k_{1-\alpha/2} [(1-\rho_0^{2(n-1)})/(1-\rho_0^2)]^{1/2}$$

est asymptotiquement maximin pour toute suite de contre-hypothèses bilatérales

$$(12) \qquad \bigcup_{\Delta^2 \geq d^2} H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta),$$

où $d \neq 0$ est un nombre réel quelconque, dans la classe des tests mesurables en les autocorrélations de rangs et de niveau asymptotique α; sa puissance asymptotique contre $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$ est

$$(13) \quad 1 + \Phi[k_{\alpha/2} - \Delta\mu_1(\rho_0; f)/(1-\rho_0^2)^{1/2}] - \Phi[k_{1-\alpha/2} - \Delta\mu_1(\rho_0; f)/(1-\rho_0^2)^{1/2}].$$

La démonstration de cette propriété repose sur deux lemmes. Le premier de ces lemmes caractérise le comportement asymptotique, typique dans un contexte de contiguïté, du rapport de vraisemblance $\tilde{L}_\Delta^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})/\tilde{L}_0^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})$, où $\tilde{L}_0^{(n)}$ et $\tilde{L}_\Delta^{(n)}$ désignent les fonctions de vraisemblance associées au vecteur

$$n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)} = [(n-1)^{1/2}\tilde{r}_1^{(n)}, \ldots, (n-p)^{1/2}\tilde{r}_p^{(n)}, \ldots, \tilde{r}_{n-1}^{(n)}]',$$

sous $H_f^{(n)}(\rho_0)$ et sous $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, respectivement. Le second fournit la distribution asymptotique de la statistique de test $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$.

LEMME 4 : Le rapport de vraisemblance logarithmique

$$\log[\tilde{L}_\Delta^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})/\tilde{L}_0^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]$$

est asymptotiquement normal, de moyenne $-c^2/2$ et de variance c^2 sous $H_f^{(n)}(\rho_0)$, de moyenne $c^2/2$ et de variance c^2 sous $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, où

$$(14) \qquad c = 12\Delta(1-\rho_0^2)^{-1/2} \int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du \int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv \equiv \Delta\mu_1(\rho_0; f)/(1-\rho_0^2)^{1/2}.$$

LEMME 5 : La statistique $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$ est asymptotiquement normale, de moyenne nulle et de variance $(1-\rho_0^2)^{-1}$ sous $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$, de moyenne $c(1-\rho_0^2)^{-1/2}$ et de variance $(1-\rho_0^2)^{-1}$ sous $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, où c est donnée par (14).

La démonstration de la proposition 3 ainsi que celles des lemmes 4 et 5 sont données dans l'appendice 2.

Les points critiques du test défini par (8) reposent sur la distribution asymptotique normale de la statistique utilisée. La distribution exacte (sous

H_0) de la statistique $S \equiv \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$ peut être établie par énumération des permutations possibles du vecteur $(1, 2, \ldots n)$: sous H_0, celles-ci sont équiprobables. A mesure que n grandit, le nombre de cas possibles devient toutefois rapidement considérable, et il n'est pas possible de procéder à cette énumération dans un délai raisonnable. Dans ce cas, on peut toujours obtenir un test exact par « randomisation ». On tire au hasard (avec ou sans remplacement) m permutations des entiers $(1, 2, \ldots, n)$, la valeur observée de $\mathbf{R}^{(n)}$ étant la première de ces permutations (par exemple, $m = 1\,000$, ce qui signifie que 999 permutations doivent être obtenues par simulation). On calcule ensuite la valeur de S pour chacune de ces permutations (S_i, $i = 1, \ldots, m$) et on établit la distribution empirique de celles-ci. L'hypothèse H_0 est rejetée au niveau α si la valeur observée de S est supérieure au percentile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution empirique de S_i, $i = 1, \ldots, m$. Il est facile de voir que le test obtenu de cette manière est de niveau α, ou légèrement inférieur à α (étant donné le caractère discret de la distribution). Il n'est pas, bien sûr, équivalent au test fondé sur la distribution exacte de S (énumération complète) mais s'en approche à mesure que m grandit. Pour plus de détails sur ce type de procédure, voir DWASS [1957] et EDGINGTON [1980].

5 Comparaison avec les procédures existantes

5.1. Avantages liés à l'utilisation des rangs

Les avantages liés à l'utilisation des autocorrélations de rangs sont ceux qui sont, de façon générale, liés aux méthodes de rangs : distributions indépendantes des densités sous-jacentes ; possibilité d'obtenir des tests de niveau exact quelle que soit la longueur de la série observée ; bonne convergence vers la distribution normale asymptotique (voir HALLIN et MÉLARD [1986 *a*]), meilleure que celle des autocorrélations classiques et comparable à celle des autocorrélations corrigées préconisées par DUFOUR et ROY [1985] ; enfin, grande robustesse vis-à-vis de la présence d'observations aberrantes [voir HALLIN et MÉLARD [1986 *b*] pour une illustration].

On pourrait craindre que ces avantages ne s'obtiennent au détriment de la puissance : ainsi que le montrent les comparaisons données ci-dessous, ce n'est pas le cas, au moins asymptotiquement. Le test de la proposition 3 sera comparé successivement, du point de vue de l'efficacité asymptotique, à ses compétiteurs paramétriques et non paramétriques principaux : les tests de Durbin-Watson et du rapport de von Neumann (appliqués aux $Z_t^{(n)}$), les tests de type « portemanteau » de Box-Pierce et Ljung-Box, le test invariant localement optimal décrit par DUFOUR et KING [1986], la version non paramétrique du rapport de von Neumann (BARTELS [1982]), les autocorrélations de rangs de types van der Waerden, Wilcoxon et Laplace (HALLIN *et al.* [1985]; HALLIN et MÉLARD [1986*b*]), et les tests de rangs de type « portemanteau » (HALLIN *et al.* [1987]; DUFOUR et ROY [1986*a*]).

La plupart de ces tests permettent la prise en considération d'un terme de tendance linéaire. Comme nous l'avons déjà indiqué, les résultats de SWENSEN [1985] suggèrent que la considération de cette tendance n'affecte pas la distribution asymptotique des autocorrélations de rangs et reste donc sans effet sur les puissances asymptotiques données ci-dessous. Néanmoins, nous n'étudierons pas ici en détail cet aspect du problème.

Tous les tests considérés ci-dessous sont pris dans la version unilatérale conçue pour une contre-hypothèse de la forme $\rho > \rho_0$, et sont comparés au test de rangs unilatéral (8) de la proposition 3. Les tests qui sont par essence des tests bilatéraux, comme les tests de type portemanteau, sont comparés au test de rangs (11).

5.2. Tests de Durbin-Watson et de von Neumann

Ces deux tests, effectués à partir des $Z_t^{(n)}$, sont asymptotiquement équivalents au test du coefficient d'autocorrélation d'ordre un, qui rejette $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$ lorsque $n^{1/2} r_1^{(n)}$ est supérieur au quantile d'ordre $1-\alpha$ de la variable normale réduite, $k_{1-\alpha}$. Ce dernier test conduit, sous une contre-hypothèse du type $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, à une puissance asymptotique de $1-\Phi(k_{1-\alpha}-\Delta)$; voir HALLIN *et al.* [1985] et HALLIN et PURI [1988]. Une comparaison avec la puissance asymptotique (10) de la proposition 3 montre que l'efficacité asymptotique relative (A.R.E.) du test de rangs (8) par rapport aux tests de Durbin-Watson et du rapport de von Neumann vaut

$$(15) \qquad 144\left[\int_0^1 u\,\varphi[\mathrm{F}^{-1}(u)]\,du \int_0^1 v\,\mathrm{F}^{-1}(v)\,dv\right]^2 / (1-\rho_0^2).$$

Cette efficacité dépend à la fois de ρ_0 et de la densité f sous-jacente aux observations; lorsque $|\rho_0| \to 1$, elle devient arbitrairement grande. A titre indicatif, nous en donnons quelques valeurs ci-dessous.

TABLEAU 1

A.R.E. du test (8) par rapport au test de Durbin-Watson, pour des densités normale, logistique et double exponentielle.

	Type de densité f		
	Normale	Logistique	Double exponentielle
A.R.E.	$\dfrac{9}{\pi^2(1-\rho_0^2)}$	$\dfrac{1}{1-\rho_0^2}$	$\dfrac{81}{64(1-\rho_0^2)}$

On remarquera que l'efficacité asymptotique est supérieure à 1 dès que $\rho_0^2 > 1-(9/\pi^2) \approx 0{,}088$ dans le cas gaussien, toujours supérieure à 1 dans le cas logistique et toujours supérieure à $81/64 \approx 1{,}266$ dans le cas d'une double exponentielle. Elle n'est jamais inférieure à $9/\pi^2 \approx 0{,}912$ dans le cas gaussien.

5.3. Tests de type portemanteau (Ljung-Box-Pierce)

Les diverses versions du test de Box-Pierce (appliqué ici aux $Z_t^{(n)}$) sont toutes équivalentes asymptotiquement au test rejetant $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$ lorsque $n \sum_{i=1}^{k} (r_i^{(n)})^2$ est supérieur à $\chi^2_{k;\,1-\alpha}$, le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la variable khi-carré à k degrés de liberté. La puissance asymptotique de cette dernière procédure vaut

$$1-F_k[\chi^2_{k;\,1-\alpha};\ \Delta^2(1-\rho_0^{2k})/2(1-\rho_0^2)], \tag{16}$$

où $F_k(.\,;\lambda^2)$ est la fonction de répartition d'une variable khi-carré non centrale à k degrés de liberté et de paramètre de non-centralité λ^2; ceci découle des résultats de HALLIN *et al.* [1987] et HALLIN et PURI [1988].

Les puissances asymptotiques (16) et (13) peuvent être comparées, mais se prêtent mal au calcul explicite d'une efficacité relative asymptotique pour $k>1$. Notons cependant que le test de Box-Pierce est peu adapté au présent problème, dans la mesure où chaque augmentation de k « coûte » un degré de liberté dans (16), alors que le paramètre de non-centralité est borné par $\Delta^2/2(1-\rho_0^2)$. Une « petite » valeur de k $(k=1{,}2)$ donne, pour les valeurs de ρ_0 proches de 1 ou de -1, un test peu puissant en raison de la non-considération des dépendances sérielles d'ordre supérieur à k; une « grande » valeur de k exploite l'information contenue dans ces dépendances d'ordre supérieur, mais au prix d'une augmentation généralement prohibitive du nombre de degrés de liberté. La forme (16) de la puissance asymptotique montre d'ailleurs que, pour $k \to \infty$, le test de Box-Pierce est asymptotiquement équivalent, du point de vue de la puissance, au test trivial rejetant l'hypothèse avec une probabilité constante α. Ce problème ne se présente pas si le test (8) est utilisé, celui-ci tirant parti de toutes les autocorrélations disponibles sans que le nombre de degrés de liberté (un, en l'occurrence) soit affecté.

5.4. Test gaussien localement optimal

DUFOUR et KING [1986] ont dérivé récemment le test localement le plus puissant pour $H_g^{(n)}(\rho_0)$, lorsque g est la densité gaussienne standardisée, pour une contre-hypothèse unilatérale gaussienne de dépendance sérielle positive, dans la classe des tests invariants de niveau α. Une version asymptotique de ce test consiste à rejeter $H_{\cdot}^{(n)}(\rho_0)$ lorsque

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} r_i^{(n)} > k_{1-\alpha}[(1-\rho_0^{2(n-1)})/(1-\rho_0^2)]^{1/2}. \tag{17}$$

Sa puissance asymptotique pour la contre-hypothèse $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$ s'obtient aisément, toujours à partir des résultats de HALLIN *et al.* [1985] et de HALLIN et PURI [1988], et vaut

$$1 - \Phi[k_{1-\alpha} - \Delta(1-\rho_0^2)^{-1/2}]. \tag{18}$$

L'efficacité asymptotique relative du test (8) par rapport au test paramétrique (17), pour une densité sous-jacente f et uniformément en Δ, vaut par conséquent $144\left[\int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du \int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv\right]^2$.

TABLEAU 2

A.R.E. du test (8) par rapport au test (17) pour des densités normale, logistique et double exponentielle.

	Type de densité f		
	Normale	Logistique	Double exponentielle
A.R.E.	$9/\pi^2 \approx 0{,}912$	1	$81/64 \approx 1{,}266$

5.5. Version non paramétrique du rapport de von Neumann (BARTELS [1982]) et test d'autocorrélation de rangs d'ordre un (WALD et WOLFOWITZ [1943])

Ces tests, fondés sur les rangs des $Z_t^{(n)}$, sont asymptotiquement équivalents au test qui rejette $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$ pour les valeurs de $(n-1)^{1/2}\tilde{r}_1^{(n)}$ supérieures à $k_{1-\alpha}$, quantile d'ordre $1-\alpha$ de la variable $N(0, 1)$. Leur puissance asymptotique s'obtient donc à partir de la proposition 2 et vaut

$$1 - \Phi[k_{1-\alpha} - 12\,\Delta \int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du \int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv]$$

sous $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$. L'efficacité asymptotique relative du test (8) par rapport aux tests de Bartels et de Wald et Wolfowitz est donc $(1-\rho_0^2)^{-1}$. Cette efficacité, toujours supérieure à l'unité, tend vers l'infini lorsque $|\rho_0| \to 1$.

5.6. Tests de rangs de type portemanteau (HALLIN *et al.* [1987], DUFOUR et ROY [1985])

Ces tests reposent sur la statistique de rangs quadratique $\sum_{i=1}^{k}(n-i)(\tilde{r}_i^{(n)})^2$, ou sur des statistiques asymptotiquement équivalentes. Leur puissance asymptotique, pour une contre-hypothèse $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ vaut, dans les mêmes notations qu'en (16),

$$(19)\quad 1-F_k\left[\chi^2_{k;1-\alpha};\ 72\,\Delta^2(1-\rho_0^{2k})\left[\int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du\int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv\right]^2 /(1-\rho_0^2)\right];$$

voir HALLIN *et al.* [1987] et HALLIN et PURI [1988]. Si on compare les puissances (19) et (10), on peut formuler des remarques analogues à celles faites en 5.3 sur les tests paramétriques de type portemanteau.

5.7. Tests d'autocorrélation de rangs de types van der Waerden, Wilcoxon et Laplace (HALLIN et PURI [1988])

Ces tests ont une forme semblable à (8), à cette différence près que les autocorrélations de type van der Waerden, Wilcoxon ou LAPLACE (HALLIN *et al.* [1987]) remplacent les $\tilde{r}_i^{(n)}$. Ils sont à puissance asymptotiquement maximale pour la contre-hypothèse $H_g^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, $\Delta>0$ arbitraire, où g représente, selon le cas, la densité gaussienne, logistique ou double exponentielle. Leur puissance asymptotique contre $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ vaut

$$1-\Phi\left[k_{1-\alpha}-\Delta\int_0^1 \varphi_g[G^{-1}(u)]\,\varphi_f[F^{-1}(u)]\,du \times\int_0^1 G^{-1}(v)\,F^{-1}(v)\,dv\,[(1-\rho_0^2)\,I(g)]^{-1/2}\right],$$

où g représente la densité standardisée gaussienne (van der Waerden), logistique (Wilcoxon) ou double exponentielle (Laplace), $\varphi_g=-g'/g$, G est la fonction de distribution cumulative associée à g et $I(g)$ est l'information de Fisher associée à g. L'efficacité asymptotique relative de (8) par rapport à ces tests est donc

$$(20)\quad \frac{144\left[\int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du\int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv\right]^2 I(g)}{\left[\int_0^1 \varphi_g[G^{-1}(u)]\,\varphi_f[F^{-1}(u)]\,du\int_0^1 G^{-1}(v)\,F^{-1}(v)\,dv\right]^2}.$$

Les valeurs de (20) pour les densités f normale, logistique et double exponentielle sont données dans le tableau 3 ci-dessous.

TABLEAU 3

A.R.E. du test (8) par rapport aux tests de types van der Waerden, Wilcoxon et Laplace (Hallin et Puri [1988]) pour les densités normale, logistique et double exponentielle.

Test	Type de densité		
	Normale	Logistique	Double exponentielle
van der Waerden	0,912	0,955	1,032
Wilcoxon	0,963	0,912	0,853
Laplace.............	1,488	1,230	0,632

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons développé une approche non paramétrique pour l'inférence concernant le paramètre d'un processus autorégressif d'ordre un. Pour tout processus AR (1) avec $|\rho|<1$ dont les innovations sont i. i. d. (ou échangeables), nous avons étudié comment tester toute hypothèse de la forme $H_0 : \rho=\rho_0$. Comme la famille de tests obtenue permet de considérer n'importe quelle valeur admissible ρ_0, on peut alors exploiter la dualité entre les tests et les régions de confiance afin de construire des régions de confiance non paramétriques : l'ensemble des valeurs admissibles ρ_0 qui ne sont pas rejetées par un test de niveau α constitue une région de confiance de niveau $1-\alpha$ pour ρ.

Le test proposé pour tester $H_0 : \rho=\rho_0$ est basé sur les autocorrélations de rangs des observations transformées sous l'hypothèse nulle. Si les innovations du processus sont i. i. d. continues, la distribution (sous H_0) des autocorrélations de rangs, de même que la distribution de la statistique du test ne dépendent pas de la forme de la densité des innovations. Sous la même condition, nous avons établi les moments exacts des autocovariances de rangs $\sum_{p+1}^{n} R_t^+ R_{t-p}^{(n)}$ ainsi que la distribution asymptotique des autocorrélations de rangs. Utilisant des conditions supplémentaires de régularité sur la forme de la densité des innovations, nous avons ensuite obtenu la distribution asymptotique des autocorrélations de rangs pour des contre-hypothèses locales et nous avons dérivé des tests asymptotiquement optimaux pour de telles contre-hypothèses (unilatérales ou bilatérales). De plus, nous avons montré que la distribution asymptotique de la statistique sur laquelle reposent les tests est normale, à la fois sous H_0 et sous des contre-hypothèses locales. Par conséquent, on peut obtenir des points critiques asymptotiquement corrects en se servant des tables de la loi $N(0, 1)$. Enfin, nous avons étudié la fonction de puissance locale des tests suggérés et calculé leur efficacité asymptotique relative par rapport à plusieurs autres tests disponibles, paramétriques et non paramétriques : test de von Neumann (ou de Durbin-Watson), tests de type « portemanteau » paramétriques et non paramétriques, tests invariants localement optimaux, version non paramétrique du test de von Neumann, tests d'autocorrélation de rangs de type van der Waerden, Wilcoxon et Laplace. Dans tous les cas considérés, nous avons trouvé que l'efficacité asymptotique relative des tests suggérés est au pire un peu inférieure à 1. Dans la plupart des cas, elle est supérieure à 1 et peut converger vers $+\infty$ lorsque $|\rho_0|$ s'approche de 1.

Il est intéressant de noter aussi que la distribution exacte de la statistique de test proposée peut être établie en principe par les procédures d'énumération usuelles dans le domaine des tests de rangs. Lorsque cette énumération est trop longue, on peut toujours obtenir un test exact « randomisé » en tirant au hasard un nombre plus limité de permutations des rangs et en évaluant le point critique à partir de la distribution empirique ainsi produite.

Dans la section 2 [équation (1')], nous avons noté que les tests de rangs pour $\rho = \rho_0$ demeurent exactement applicables même si le modèle AR(1) contient une constante inconnue γ. Ceci provient du fait que le vecteur des rangs demeure invariant si on additionne une même constante à toutes les observations. Si on désirait considérer un modèle avec un terme de tendance plus complexe, tel un modèle de régression avec erreurs AR(1), cette propriété ne tiendrait plus. Les statistiques de rangs calculées à partir des résidus d'une régression ne sont pas libres, i.e. ont une distribution qui dépend de la forme de la densité des erreurs, même sous l'hypothèse nulle. Toutefois, les résultats de SWENSEN [1985] suggèrent que, sous des conditions très générales, l'estimation préalable de paramètres de régression n'affecte pas le comportement asymptotique des statistiques de rangs. Les méthodes développées ici demeureraient donc asymptotiquement valables mais ne seraient qu'approximativement non paramétriques pour des échantillons finis. Nous n'avons pu étudier ce problème en détail dans le cadre de cet article et le réservons pour des travaux ultérieurs.

Démonstration des propositions 1 et 2

Les démonstrations qui figurent ici, ainsi que celles de l'appendice 2, constituent essentiellement une application de résultats plus généraux concernant la distribution asymptotique des statistiques de rangs sérielles linéaires sous une hypothèse nulle de bruit blanc et sous une contre-hypothèse contiguë de type *processus linéaire général* — de type $AR(\infty)$ dans le cas qui nous concerne. Nous n'avons pas voulu mettre l'accent sur les aspects techniques liés aux notions de contiguïté et d'exhaustivité asymptotique, et certains détails sont délibérément omis, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux textes cités.

Considérons la suite de contre-hypothèses $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ figurant dans la proposition 2 : sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, les résidus $Z_t^{(n)}$ satisfont au modèle ARMA (1, 1)

(21) $$Z_t-(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)Z_{t-1}=\varepsilon_t-\rho_0\,\varepsilon_{t-1};$$

ce modèle ARMA (1, 1) admet une forme $AR(\infty)$

(22) $$Z_t-n^{-1/2}\Delta\sum_{i=1}^{\infty}\rho_0^{i-1}Z_{t-i}=\varepsilon_t.$$

(22) constitue un cas particulier des modèles linéaires généraux du second ordre considérés dans la section 2 de Hallin et Puri [1988] et, notamment, dans leur proposition 2.1. Cette proposition permet de caractériser la distribution asymptotique de toute *statistique de rangs sérielle linéaire*, catégorie à laquelle appartiennent les $\tilde{r}_i^{(n)}$, sous $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$ aussi bien que sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$; elle fournit par conséquent la démonstration simultanée des deux propositions qui nous intéressent ici. Cette distribution asymptotique fait intervenir la notion de *fonction génératrice de scores*.

Rappelons qu'une fonction $J(u_0, \ldots, u_i)$, définie sur $[0, 1]^{i+1}$, est une *fonction génératrice de scores* pour une statistique de rangs sérielle linéaire $S^{(n)}(\mathbf{R}^{(n)})$ si

$$S^{(n)}(\mathbf{R}^{(n)})=(n-i)^{-1}\sum_{t=i+1}^{n}a^{(n)}(R_t^{(n)}, R_{t-1}^{(n)}, \ldots, R_{t-i}^{(n)})+o_P(n^{-1/2})$$

et

$$\lim_{n\to\infty} E[J(F(Z_1^{(n)}), \ldots, F(Z_{i+1}^{(n)}))-a^{(n)}(R_1^{(n)}, \ldots, R_{i+1}^{(n)})]^2=0,$$

où $R_t^{(n)}$ est le rang de $Z_t^{(n)}$ dans une série $Z_1^{(n)}, \ldots, Z_n^{(n)}$ de variables aléatoires indépendantes (ou échangeables) dont chacune a pour fonction de répartition $F(.)$.

Il est facile de vérifier que $\tilde{r}_i^{(n)}$ admet ici pour fonction génératrice la fonction $J(u_0, \ldots, u_i)$ définie par

(23) $$J_{(1)}(u, v)=12uv-6(u+v)+3, \qquad (u, v)\in[0, 1]^2,$$

où nous avons posé $u=u_0$ et $v=u_1$; en effet, la différence

$$n^{1/2}\left[\tilde{r}_i^{(n)}-\sum_{t=i+1}^{n} J_{(1)}\left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1}, \frac{R_{t-i}^{(n)}}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.+[n(n-1)]^{-1}\sum\sum_{1\leq t_1\neq t_2\leq n} J_{(1)}\left(\frac{t_1}{n+1}, \frac{t_2}{n+1}\right)\right]$$

tend vers zéro en probabilité sous $H_.^{(n)}(\rho_0)$, et, toujours sous $H_.^{(n)}(\rho_0)$,

$$J_{(1)}(F(Z_t^{(n)}), F(Z_{t-i}^{(n)}))-J_{(1)}\left(\frac{R_t^{(n)}}{n+1}, \frac{R_{t-i}^{(n)}}{n+1}\right) \tag{24}$$

tend vers zéro en moyenne quadratique. De même, toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \tilde{r}_i^{(n)}$ admet pour fonction génératrice

$$\begin{aligned} J_{(k)}(u_1, \ldots, u_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [12 u_i u_{i+1} - 6(u_i+u_{i+1})+3], \\ &(u_1, \ldots, u_{k+1}) \in [0, 1]^{k+1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Par abus de langage, nous dirons que $J_{(1)}(u, v)$ est la fonction génératrice de scores de $\tilde{r}_i^{(n)}$. Remarquons qu'il serait plus correct de dire que $J_{(1)}(u, v)$ est *une* fonction génératrice pour $\tilde{r}_i^{(n)}$. La définition donnée ci-dessus est en effet de nature asymptotique et n'entraîne nullement l'unicité de $J(.)$. En particulier, la fonction $\bar{J}_{(1)}(u, v)=12uv+3$, plus simple, pourrait être utilisée comme fonction génératrice de scores pour $\tilde{r}_i^{(n)}$ au même titre que $J_{(1)}(u, v)$. Nous préférons cette dernière pour des raisons d'ordre purement technique. Il s'agit en effet de la fonction $J^*(u, v)$ de Hallin *et al.* [1985, équation (4.12)] qui apparaît dans les résultats de normalité asymptotique et, notamment, dans la proposition 2.3 de Hallin et Puri [1988]. En vertu de cette dernière proposition, $\sum_{i=1}^{k} (n-i)^{1/2} \alpha_i \tilde{r}_i^{(n)}$ admet, sous $H_.^{(n)}(\rho_0)$, une distribution asymptotique normale, de moyenne nulle et de variance

$$\begin{aligned} V^2 &= \int_{[0, 1]^{k+1}} \left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i [12 u_i u_{i+1} - 6(u_i+u_{i+1})+3]\right]^2 du_1 \ldots du_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \int_{[0, 1]^4} [12 u_i u_{i+1} - 6(u_i+u_{i+1})+3] \\ &\qquad [12 u_j u_{j+1} - 6(u_j+u_{j+1})+3]\, du_i\, du_{i+1}\, du_j\, du_{j+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Les coefficients α_i étant arbitraires, ceci établit la proposition 1, conformément à l'argument classique de Cramér-Wold. L'application de la même proposition 2.3 sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ conduit à une distribution asymptotique normale ayant même variance V^2, ce qui établit la normalité et la matrice de covariance unité de la distribution asymptotique de la proposition 2. Les moyennes asymptotiques $\Delta\mu_i(\rho_0; f)$ des $(n-i)^{1/2}\,\tilde{r}_i^{(n)}$ s'obtiennent plus aisément si on considère de façon individuelle chaque $\tilde{r}_i^{(n)}$ et sa fonction génératrice (24); la considération de la distribution asymptotique liée des $(n-i)^{1/2}\,\tilde{r}_i^{(n)}$ et de la log-vraisemblance, ainsi que l'application du troisième lemme de Le Cam (HÁJEK et SIDÁK [1967]), donnent alors la moyenne

$$12 \sum_{j=1}^{k} \delta_{ij} (\Delta\rho_0^{j-1}) \int_0^1 u\,\varphi[F^{-1}(u)]\,du \int_0^1 v\,F^{-1}(v)\,dv,$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, ce qui constitue le résultat annoncé. □

Démonstration des lemmes 4 et 5 et de la proposition 3

Démonstration du lemme 4. Notons $L^{(n)}_{\Delta;k}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$, la fonction de vraisemblance de $\mathbf{Z}^{(n)}$ sous la « troncature d'ordre k » de $H^{(n)}_f(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, c'est-à-dire sous l'hypothèse, notée $H^{(n)}_{f;k}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, où $\mathbf{Z}^{(n)}$ satisfait à la troncature d'ordre k de la forme AR(∞) de (22):

$$Z_t - n^{-1/2}\Delta\sum_{i=1}^{k}\rho_0^{i-1}Z_{t-i}=\varepsilon_t. \tag{27}$$

On a, en vertu de la décomposition (2.3) de la log-vraisemblance et de la proposition 2.2 de Hallin et Puri [1988], sous $H^{(n)}_f(\rho_0)$ aussi bien que sous $H^{(n)}_f(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$,

$$\log[L^{(n)}_{\Delta}(\mathbf{Z}^{(n)})]-\log[L^{(n)}_{\Delta;k}(\mathbf{Z}^{(n)})]=o^{k,n}_{\mathrm{P}}(1), \tag{28}$$

où $o^{k,n}_{\mathrm{P}}(1)$ désigne une quantité qui tend vers zéro, pour $k\to\infty$, *uniformément en n:*

$\forall\varepsilon'>0$, $\varepsilon''>0$, $\exists K(\varepsilon',\varepsilon'')$ tel que $P[|o^{k,n}_{\mathrm{P}}|>\varepsilon']<\varepsilon''$, $\forall k>K(\varepsilon',\varepsilon'')$, $\forall n$.

Notons $\tilde{L}^{(n)}_{\Delta;k}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{n-1}$, la fonction de vraisemblance induite sous $H^{(n)}_{f;k}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ par le vecteur des autocorrélations de rangs $n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)}=[(n-1)^{1/2}\tilde{r}^{(n)}_1, \ldots, \tilde{r}^{(n)}_{n-1}]'$: $\tilde{L}^{(n)}_{\Delta;k}(\mathbf{r})$ est une fonction de vraisemblance de type discret, dont les valeurs, en nombre fini, s'obtiennent en intégrant $L^{(n)}_{\Delta;k}(\mathbf{z})$ sur les domaines appropriés de $\mathbb{R}^n$. La décomposition (28) implique donc pour $\tilde{L}^{(n)}_{\Delta;k}$ une décomposition analogue :

$$\log[\tilde{L}^{(n)}_{\Delta}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]-\log[\tilde{L}^{(n)}_{\Delta;k}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]=o^{k,n}_{\mathrm{P}}(1), \tag{29}$$

sous $H^{(n)}_f(\rho_0)$ aussi bien que sous $H^{(n)}_f(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, où $o^{k,n}_{\mathrm{P}}(1)$ jouit des mêmes propriétés de convergence uniforme que dans (28).

Le modèle tronqué (27) est un modèle AR(k). On sait (Hallin et Puri [1988] proposition 4.1) que, sous une telle contre-hypothèse, la distribution asymptotique des $(n-i)^{1/2}\tilde{r}^{(n)}_i$, $i>k$, est la même que sous l'hypothèse nulle; quant à la distribution asymptotique des $(n-i)^{1/2}\tilde{r}^{(n)}_i, i\leqslant k$, elle est la même que sous $H^{(n)}_f(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$. Elle est donc fournie par la proposition 2 plus haut. Par conséquent on a, sous $H^{(n)}_f(\rho_0)$ comme sous $H^{(n)}_f(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$,

$$\begin{aligned}
&\log[\tilde{L}^{(n)}_{\Delta;k}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]-\log[\tilde{L}^{(n)}_{0}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]\\
&\quad=\log\left[(2\pi)^{-k/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}((n-i)^{1/2}\tilde{r}^{(n)}_i-\Delta\mu_i(\rho_0;f))^2\right]\right]\\
&\quad\quad-\log\left[(2\pi)^{-k/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}((n-i)^{1/2}\tilde{r}^{(n)}_i)^2\right]\right]+o_{\mathrm{P}}(1)
\end{aligned} \tag{30}$$

$$=\Delta \sum_{i=1}^{k} \mu_i(\rho_0; f)(n-i)^{1/2}\tilde{r}_i^{(n)} - \Delta^2 \sum_{i=1}^{k} (\mu_i(\rho_0; f))^2/2 + o_P(1)$$

$$=\Delta\mu_1(\rho_0; f) \sum_{i=1}^{k} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$$

$$-[\Delta\mu_1(\rho_0; f)]^2 (1-\rho_0^{2(k-1)})/[2(1-\rho_0^2)] + o_P(1),$$

où $o_P(1)$ tend vers zéro, en probabilité, lorsque $n \to \infty$ (k fixe). La distribution asymptotique conjointe des $(n-i)^{1/2}\tilde{r}_i^{(n)}$, fournie par les propositions 1 et 2, permet d'établir la normalité asymptotique du rapport de vraisemblance logarithmique (30), lorsque $n \to \infty$ (k fixe) : la moyenne en est $-c_k^2/2$ sous $H_f^{(n)}(\rho_0)$, $c_k^2/2$ sous $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, où

$$c_k = \Delta\mu_1(\rho_0; f)(1-\rho_0^{2(k-1)})^{1/2}/(1-\rho_0^2)^{1/2}, \tag{31}$$

et la variance vaut c_k^2 dans les deux cas.

Lorsque $k \to \infty$, c_k converge vers la constante c donnée en (14). La convergence dans (29) étant uniforme en n, le théorème 7.7.1 d'ANDERSON [1971] s'applique, ce qui achève la démonstration du lemme 4. □

Démonstration du lemme 5. Pour obtenir la distribution asymptotique annoncée, il suffit d'établir, pour la statistique $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$, une décomposition analogue à (28) et (29) :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{k} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)} = o_P^{k,n}(1), \tag{32}$$

où $o_P^{k,n}(1)$ tend vers zéro en probabilité, lorsque $k \to \infty$, uniformément en n, sous $H_\cdot^{(n)}(\rho_0)$ et $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$. En effet, la normalité asymptotique de $\sum_{i=1}^{k} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}$ pour $n \to \infty$, et l'application du théorème 7.7.1 d'ANDERSON [1971] fournissent le résultat cherché.

Afin d'établir (32), considérons la variance du membre de gauche :

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=k+1}^{n-1} (n-i)^{1/2} \rho_0^{i-1} \tilde{r}_i^{(n)}\right]$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n-1} \rho_0^{2(i-1)} + \sum_{k+1 \leqslant i \neq j \leqslant n-1}\sum \rho_0^{i+j-2} \mathrm{Cov}[(n-i)^{1/2}\tilde{r}_i^{(n)}, (n-j)^{1/2}\tilde{r}_j^{(n)}]$$

$$\leqslant \frac{\rho_0^{2k}}{1-\rho_0^2} + \left(\sum_{i=k+1}^{n-1} |\rho_0|^{i-1}\right)^2 \leqslant \frac{\rho_0^{2k}}{1-\rho_0^2} + \left(\frac{\rho_0^k}{1-|\rho_0|}\right)^2.$$

Cette dernière quantité tend vers zéro, pour $k \to \infty$, uniformément en n, ce qui établit (32) et complète la démonstration du lemme. □

Démonstration de la proposition 3.

(i) Notons $\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0)$ et $\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$ les images des hypothèses $H_f^{(n)}(\rho_0)$ et $H_f^{(n)}(\rho_0 + n^{-1/2}\Delta)$, $\Delta > 0$, induites par le vecteur $n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)}$. Le lemme 4 implique que la puissance asymptotique du test de Neyman pour

$\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0)$ par rapport à $\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$ est donnée par (10). En vertu du lemme 5, le test (8) est de niveau asymptotique α, et atteint, sous $H_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$, la puissance asymptotique (10). Ce test est donc à puissance asymptotiquement maximale pour $\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0)$ contre $\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta)$; comme en outre il ne dépend ni de Δ ni de f, la partie (i) de la proposition 3 est établie.

(ii) La partie (ii) se démontre de façon analogue.

(iii) Le caractère maximin-optimal du test bilatéral (11) découle de l'*exhaustivité asymptotique*, au sens de Le Cam-Hájek [voir Hallin et Puri [1988] pour une définition], de la statistique $\sum_{i=1}^{n}(n-i)^{1/2}\rho_0^{i-1}\tilde{r}_i^{(n)}$ pour le test de $\tilde{H}_.^{(n)}(\rho_0)$ contre toute suite de contre-hypothèses du type

$$\bigcup_{\Delta^2\geqslant d^2}\tilde{H}_f^{(n)}(\rho_0+n^{-1/2}\Delta), \tag{33}$$

où $d\neq 0$ est un réel quelconque. Cette exhaustivité asymptotique s'établit selon un raisonnement en tous points semblable à celui de la démonstration de la proposition 3.2 de Hallin et Puri [1988], elle-même inspirée de celle du théorème VII 1.1 de Hájek et Šidák [1967]; le point de départ en est la convergence en probabilité, pour $n\to\infty$, uniformément en Δ pour $\Delta^2\geqslant d^2$ et sous $H_f^{(n)}(\rho_0)$, de

$$\log[\tilde{L}_\Delta^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})/\tilde{L}_0^{(n)}(n^{1/2}\tilde{\mathbf{r}}^{(n)})]-c(1-\rho_0^2)^{1/2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{1/2}\rho_0^{i-1}\tilde{r}_i^{(n)}-\frac{c^2}{2}\right],$$

expression analogue à l'équation (10) de Hájek et Šidák [1967, p. 246].

La conséquence fondamentale de cette exhaustivité asymptotique est que tout test asymptotiquement maximin pour la réduction par $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{1/2}\rho_0^{i-1}\tilde{r}_i^{(n)}$ du problème considéré, (i. e. tester $\tilde{H}_.^{(n)}(\rho_0)$ contre (33)) est également asymptotiquement maximin pour le problème non réduit. Or le lemme 5 montre que le problème réduit possède une forme asymptotique particulièrement simple. La statistique

$$(1-\rho_0^2)^{1/2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{1/2}\rho_0^{i-1}\tilde{r}_i^{(n)}$$

est en effet asymptotiquement normale, de variance unité sous l'hypothèse nulle $\tilde{H}_.^{(n)}(\rho_0)$ comme sous la contre-hypothèse (33). Sous $\tilde{H}_.^{(n)}(\rho_0)$, sa moyenne asymptotique est nulle et, sous (33), elle a une valeur absolue supérieure à $d\mu_1(\rho_0;f)(1-\rho_0^2)^{-1}$. Le test (11) est le test maximin classique pour cette situation. Grâce à l'exhaustivité asymptotique de la statistique utilisée, il est également asymptotiquement maximin pour $\tilde{H}_.^{(n)}(\rho_0)$ par rapport à (33); comme il ne dépend ni de d ni de f, et qu'il satisfait les conditions de niveau asymptotique sous $H_.^{(n)}(\rho_0)$, il est encore asymptotiquement maximin pour $H_.^{(n)}(\rho_0)$ par rapport à (12), ce qui achève la démonstration de la proposition 3. □

• Références bibliographiques

ANDERSON, T. W. (1971). – *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley, New York.

BARTELS, R. (1982). – « The Rank Version of Von Neumann's Ratio Test for Randomness », *Journal of the American Statistical Association*, 77, p. 40-46.

BLATTBERG, R. C. et GONEDES, N. (1964). – « A Comparison of the Stable and Student Distribution as Statistical Models for Stock Prices », *Journal of Business*, 47, p. 244-280.

DUFOUR, J.-M. (1981). – « Rank Tests for Serial Dependence », *Journal of Time Series Analysis*, 2, p. 117-128.

DUFOUR, J.-M. et KING, M. L. (1986). – « Optimal Invariant Tests for the Autocorrelation Coefficient in Linear Regressions with Autocorrelated Errors », *Document de travail*, Département de sciences économiques, Université de Montréal.

DUFOUR, J.-M., LEPAGE, Y. et ZEIDAN, H. (1982). – « Nonparametric Testing for Time Series: A Bibliography », *Canadian Journal of Statistics*, 10, p. 1-38.

DUFOUR, J.-M. et ROY, R. (1985). – « Some Robust Exact Results on Sample Autocorrelations and Tests of Randomness », *Journal of Econometrics*, 29, p. 257-273.

DUFOUR, J.-M. et ROY, R. (1986*a*). – « Generalized Portmanteau Statistics and Tests of Randomness », *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 15, p. 2953-2972.

DUFOUR, J.-M. et ROY, R. (1986*b*). – « L'échangeabilité en séries chronologiques: quelques résultats exacts sur les autocorrélations et les statistiques portemanteau », *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 28, p. 19-40.

DWASS, M. (1957). – « Modified Randomization Tests for Nonparametric Hypotheses », *Annals of Mathematical Statistics*, 28, p. 181-187.

EDGINGTON, F. S. (1980). – *Randomization Tests*, Marcel Dekker, New York.

FAMA, E. F. (1965). – « The Behaviour of Stock Market Prices », *Journal of Business*, 38, p. 34-105.

GIDDY, D. H. et DUFEY, G. (1975). – « The Random Behavior of Flexible Exchange Rates », *Journal of International Business Studies*, 6, p. 1-32.

HÁJEK, J. et ŠIDÁK, Z. (1967). – *Theory of Rank Tests*, Academic Press, New York.

HALLIN, M., INGENBLEEK, J.-Fr. et PURI, M. L. (1985). – « Linear Serial Rank Tests for Randomness Against ARMA Alternatives », *Annals of Statistics*, 13, p. 1156-1181.

HALLIN, M., INGENBLEEK, J.-Fr. et PURI, M. L. (1987). – « Linear and Quadratic Serial Rank Tests for Randomness against Serial Dependence », à paraître dans *Journal of Time Series Analysis*.

HALLIN, M. et MÉLARD, G. (1986*a*). – « Les statistiques de rangs dans l'identification de modèles de séries chronologiques », *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 28, p. 117-129.

HALLIN, M. et MÉLARD, G. (1986*b*). – « Rank-Based Tests for Randomness against First-Order Serial Dependence », *Document de travail*, Centre d'Économie Mathématique et d'Économétrie, Université Libre de Bruxelles.

HALLIN, M. et PURI, M. L. (1988). – « Optimal Rank-Based Procedures for Time Series Analysis: Testing an ARMA Model against Other ARMA Models », à paraître dans *Annals of Statistics*.

KENDALL, M. et STUART, A. (1977). — *The Advanced Theory of Statistics*, Volume 1, Fourth Edition, Macmillan, New York.

KING, M. L. (1986). — « Testing for Autocorrelation in Linear Regression Models: A Survey », à paraître dans M. L. KING et D. E. A. GILES (eds.) *Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane*, Routledge and Kegan Paul, Londres.

KNOKE, J. D. (1977). — « Testing for Randomness against Autocorrelation: Alternative Tests », *Biometrika*, 64, p. 523-529.

LE CAM, L. (1960). — « Locally Asymptotically Normal Families of Distributions », *University of California Publications in Statistics*, 3, p. 37-98.

MANDELBROT, B. (1963). — « The Variation of Certain Speculative Prices », *Journal of Business*, 36, p. 394-419.

MANDELBROT, B. (1967). — « The Variation of Some Other Speculative Prices », *Journal of Business*, 40, p. 393-413.

PRAETZ, P. D. (1972). — « The Distribution of Share Price Changes », *Journal of Business*, 45, p. 49-55.

SWENSEN, A. R. (1985). — « The Asymptotic Distribution of the Likelihood Ratio for Autoregressive Time Series with a Regression Trend », *Journal of Multivariate Analysis*, 16, p. 54-70.

WALD, A. et WOLFOWITZ, J. (1943). — « On Exact Tests for Randomness in the Nonparametric Case Based on Serial Correlation », *Annals of Mathematical Statistics*, 14, p. 378-388.