ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 4 — 1986

Paradoxe global des transferts et multiplicité des équilibres : deux résultats

Alain TRANNOY *

RÉSUMÉ. – Nous prouvons deux résultats pour les économies d'échanges à l biens, n individus sans poser d'hypothèse de différentiabilité :

1. la non-unicité de l'équilibre en un point de la boîte d'Edgeworth est une condition nécessaire de l'existence d'un paradoxe global des transferts;

2. la non-unicité de l'équilibre en un point intérieur de la boîte d'Edgeworth est une condition suffisante de l'existence d'un paradoxe global des transferts au sens faible.

Global Transfer Paradox and Multiplicity of Equilibra: Two Results

ABSTRACT. – We prove two results for exchange economies with l goods, n individuals without any differentiability assumption:

1. the multiplicity of equilibria for at least one initial allocation is a necessary condition for the existence of the global transfer paradox;

2. the multiplicity of equilibria for at least one initial allocation is a sufficient condition for the existence of the global transfer paradox.

---

* A. TRANNOY : Université de Rennes-I et GREQE, UER de Sciences Économiques, 7, place Hoche, 35000 Rennes. Je remercie Michel LE BRETON et Jean-Luc PRIGENT pour une utile conversation sur le sujet, ainsi que deux rapporteurs pour leurs remarques.

1 Introduction et brève revue de la littérature

Des variations dans l'allocation initiale des ressources entrainent des variations dans les allocations d'équilibre concurrentiel et par là même des variations dans le niveau d'utilité atteint par les différents individus. Une réallocation des ressources bénéficie à certains individus et coûte, en termes d'utilité, à certains autres. C'est à LEONTIEF [1936] que l'on doit l'observation que les distributions de gains et de pertes d'utilité peuvent conduire à un équilibre concurrentiel où le donneur atteint un niveau d'utilité plus élevé et le receveur un niveau d'utilité moindre comparé à celui obtenu dans l'équilibre associé à la distribution avant transfert.

Depuis lors, le thème du paradoxe des transferts revient périodiquement comme un serpent de mer dans la littérature économique. Les articles dans leur grande majorité ont pour but de mieux cerner le lien existant entre le paradoxe des transferts et l'unicité et la stabilité des équilibres, un problème à l'origine soulevé par SAMUELSON [1952]. L'effort de recherche s'est intensifié depuis une dizaine d'années et les investigations se sont orientées dans deux directions.

D'une part, la construction d'exemples, surtout dans le cadre de la théorie du commerce international : citons POLEMARCHAKIS [1983], CHICHILNISKY [1980], [1983] et toute la controverse sur ses articles dans le *Journal of Development Economics*, BHAGWATI, BRECHER et HATTA [1983], YANO [1983], JONES [1984], POSTLEWAITE et WEBB [1984]. Mais l'exemple le plus frappant a sans doute été donné par SAFRA [1983 *b*] qui, en s'inspirant de la méthode proposée par GUESNERIE et LAFFONT [1976], a construit un exemple où dans le cadre d'une économie à n agents et 2 biens, avec des préférences lisses, le paradoxe des transferts survient à un équilibre unique et globalement stable.

D'autre part, des résultats généraux ont été obtenus dans le cadre des économies régulières et lisses. BALASKO [1978] a introduit la distinction pertinente lorsqu'il y a multiplicité des équilibres entre paradoxe local des transferts et paradoxe global. Dans le paradoxe local, on s'impose de rester sur une même sélection lisse des vecteurs de prix d'équilibre, alors que dans le paradoxe global on s'autorise à « sauter » d'une sélection à une autre.

Dans le cas d'une économie à 2 agents et 2 biens, BALASKO [1978] a démontré que le paradoxe local se produit si et seulement si l'équilibre est instable. Notons cependant que ce résultat est démontré pour un ensemble de consommation égal à $\mathbb{R}^l$ et non à $\mathbb{R}^l_+$.

En dimension supérieure, le lien entre l'instabilité des équilibres et le paradoxe local est plus complexe. Dans le cas d'une économie à 2 agents et l biens SAFRA [1983 *b*] a démontré que le paradoxe local ne peut survenir qu'à un équilibre instable. Dans le cas d'une économie à n agents, ($n \geqslant 3$), 2 biens, SAFRA [1983 *b*] a démontré que tout équilibre instable était sujet au paradoxe local. Dans le cas général n consommateurs et l biens ($n, l \geqslant 3$), l'instabilité de l'équilibre n'est plus ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de l'existence d'un paradoxe local des transferts à ce même équilibre.

Dans le cas n agents et 2 biens, la multiplicité des équilibres en un point de la boîte d'Edgeworth est une condition suffisante de l'existence d'un paradoxe local des transferts à un équilibre localement stable (voir SAFRA [1983 *b*] [1984]). Ce résultat dépend d'une hypothèse qui est génériquement vérifiée par toute économie régulière et lisse : les valeurs des propensions marginales à consommer sont différentes d'un agent à l'autre pour tous les équilibres possibles. Le problème de la manipulation des ressources initiales (voir GALE [1984]) est voisin de celui du paradoxe des transferts. SAFRA [1983 *a* et *b*] a d'ailleurs montré que le rôle de la multiplicité des équilibres était identique pour les deux problèmes pour les économies à n agents et l biens. Néanmoins, là encore, tous les résultats sont prouvés pour un ensemble de consommation égal à $\mathbb{R}^l$.

Pour le paradoxe global, nous ne disposons que des résultats obtenus par BALASKO dans le cas de deux biens et deux agents. Le paradoxe global survient si et seulement si l'équilibre considéré n'est pas unique.

Dans cette note, nous présentons deux résultats concernant le paradoxe global des transferts dans le cas général à n agents et l biens : premièrement, nous montrons que l'existence d'un paradoxe des transferts bilatéraux (c'est-à-dire un transfert d'un individu i à un individu j) implique la multiplicité des équilibres en un point au moins de la boîte d'Edgeworth; deuxièmement, nous montrons que la non-unicité de l'équilibre en un point intérieur de la boîte d'Edgeworth implique l'existence d'un paradoxe des transferts au sens faible (c'est-à-dire que l'individu peut gagner à transférer ses ressources en un équilibre mais n'est pas assuré de le faire à cause de la multiplicité des équilibres).

Ces deux propositions sont démontrées sous des hypothèses habituelles de monotonicité et de stricte quasi-concavité des fonctions d'utilité des consommateurs mais sans aucune hypothèse de différentiabilité.

2 Notations, définitions, hypothèses

Nous considérons des économies d'échanges avec l biens, $k=1, \ldots, l$, n individus, $i=1, \ldots, n$. Nous choisissons le bien 1 comme numéraire. Soit, $\mathrm{P}=\{p\in \mathring{\mathbb{R}}^l_+ \mid p_1=1\}$ l'espace des prix normalisés strictement positifs.

L'ensemble de consommation X_i est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^l_+$ et le préordre de préférence de l'individu i peut être représenté par une fonction d'utilité U_i: $\mathbb{R}^l_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés de continuité, de monotonicité et de stricte quasi-concavité. Les fonctions d'utilité sont fixées.

Les ressources initiales de l'économie sont fixes et égales à $r\in\mathbb{R}^l_+$. Soit :

$$\mathrm{X}=\left\{\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n)\in(\mathbb{R}^l_+)^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \omega_i=r\right\}$$

l'ensemble des allocations possibles des ressources entre les n individus. Nous supposerons $X_i = \{\omega_i \in \mathbb{R}^l_+ \mid \omega_i \leqslant r\}$.

Soit $p \in P$ et $\omega_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, donnés. Le problème de la maximisation de $U_i(x_i)$ dans $\beta(p, \omega_i) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leqslant p \cdot \omega_i\}$ a une solution unique $d_i(p, \omega_i)$, représentant la fonction de demande de l'individu i, d_i: $P \times \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}^l_+$. Nous aurons besoin des notations suivantes :

$$H(p, \omega_i) = \{x_i \in X_i \mid px_i = p\,\omega_i\}$$

$$\beta^+(p, \omega_i) = \{x_i \in X_i \mid px_i \geqslant p\,\omega_i\}.$$

Puisque nous raisonnons à fonctions d'utilité et à ressources fixes, une économie d'échanges est entièrement décrite par le vecteur de ressources initiales $\omega \in X$. Nous rappelons que $p \in P$ est un vecteur prix d'équilibre associé à l'économie d'échanges ω si et seulement si l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(p, \omega_i) - r = 0 \quad \text{est satisfaite.}$$

La correspondance de Walras $W: X \to P$ associe à chaque vecteur des ressources initiales ω l'ensemble des vecteurs prix d'équilibre. Les trois définitions suivantes concernent le paradoxe global des transferts.

Définition 1 : Il y a un paradoxe des transferts entre ω et ω' pour l'individu i si $\exists p \in \{W(\omega)\}$ et $\exists p' \in \{W(\omega')\}$ tel que

$$\omega'_i \leqslant \omega_i \qquad \text{avec} \quad \omega'_i \neq \omega_i \quad \text{et} \quad U_i(d_i(p, \omega_i)) < U_i(d_i(p', \omega'_i)).$$

Définition 2 : Il y a un paradoxe des transferts entre ω et ω' pour l'individu i si il y a un paradoxe faible des transferts pour l'individu i et si $\# W(\omega) = \# W(\omega') = 1$.

Avec le paradoxe faible des transferts, l'individu peut gagner en termes d'utilité à transférer une partie de ses ressources à d'autres individus; avec le paradoxe des transferts, l'individu est sûr de gagner.

Définition 3 : Il y a un paradoxe (respectivement : faible) des transferts bilatéraux entre ω et ω' pour l'individu i si il y a un paradoxe (respectivement : faible) et si il existe $n-2$ individus : $j = 1, \ldots, n-2$ avec $\omega'_j = \omega_j$.

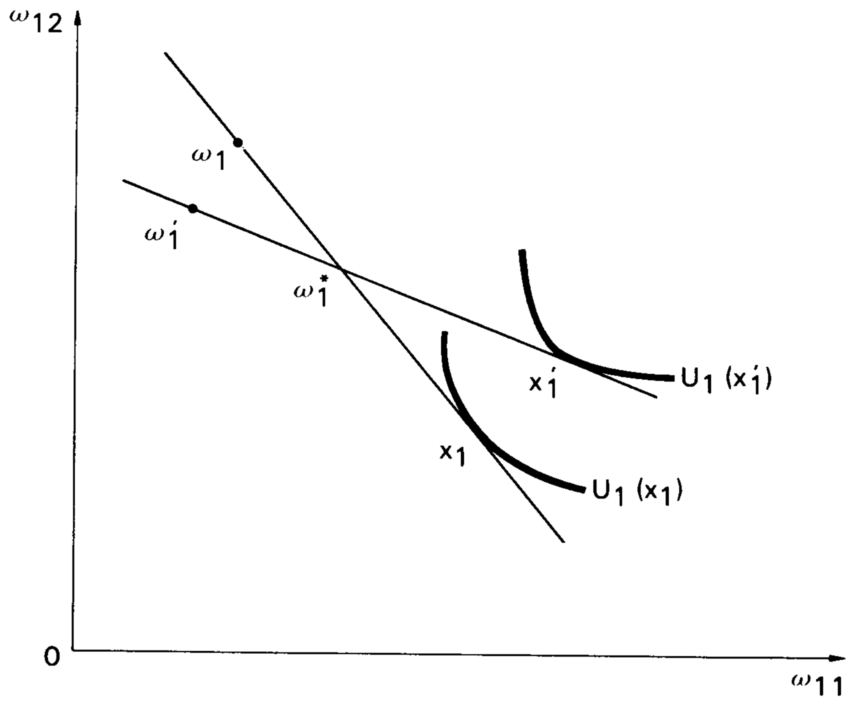
3 Non-unicité de l'équilibre : condition nécessaire du paradoxe des transferts bilatéraux

PROPOSITION 1 : Si il existe un paradoxe des transferts bilatéraux entre ω et ω' pour l'individu i, alors il existe une économie d'échanges $\omega'' \in X$ avec $\# W(\omega'') > 1$.

Preuve (voir figure 1).

FIGURE 1

Illustration de la preuve de la proposition 1 dans le cas de 2 biens



Sans perte de généralité, le paradoxe concerne l'individu 1 qui a transféré une partie de ses ressources à l'individu n. Soit x et x' les allocations d'équilibre relativement à p et à p'. Par hypothèse $U_1(x_1) < U_1(x'_1)$.

— Puisque $\omega'_1 < \omega_1 \in \beta(p, \omega_1)$, $x'_1 \notin \beta(p, \omega_1)$ à cause de l'optimalité de la demande.

— Soit

$$\varphi : \quad [0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$\lambda \to \varphi(\lambda) = p\,\omega_1 - p(\lambda\omega'_1 + (1-\lambda)\,x'_1)$$

$$\varphi(0) < 0; \qquad \varphi(1) > 0; \qquad \text{donc} \quad \exists\,\lambda \mid \varphi(\lambda) = 0$$

c'est-à-dire,

$$\exists\,\lambda \mid \omega_1^* = \lambda\omega'_1 + (1-\lambda)\,x'_1 \in \mathrm{H}(p, \omega_1) \cap \mathrm{H}(p', \omega'_1).$$

Maintenant prouvons que l'on peut trouver $\omega_2^*, \ldots, \omega_i^*, \ldots, \omega_n^*$ tel que ω^* soit allocation initiale des ressources avec (p, x) et (p', x') comme équilibres concurrentiels. ω^* doit satisfaire

(1) $$\sum_{i=2}^{n} \omega_i^* = r - \omega_1^*$$

(2) $$px_i = p\omega_i^*, \qquad i = 2, \ldots, n$$

(3) $$px'_i = p'\,\omega_i^*, \qquad i = 2, \ldots, n$$

(1) et (2) [respectivement : (1) et (3)] entraînent que (p, x) [respectivement : (p', x')] est équilibre par rapport à ω^*.

$\omega_i^* = \omega_i = \omega'_i$, $i = 2, \ldots, n-1$ satisfait (2) et (3) par hypothèse du transfert bilatéral. Le lecteur pourra vérifier aisément que $\omega_n^* = r - \omega_1^* - \sum_{i=2}^{n-1} \omega_i$ satisfait (2) et (3) pour l'individu n. □

4 Non-unicité de l'équilibre : condition suffisante pour l'existence d'un paradoxe faible des transferts

PROPOSITION 2 : Si il existe une économie d'échanges $\omega \in \mathring{\mathrm{X}}$ avec $\# \mathrm{W}(\omega) > 1$, alors il existe ω' et $\omega'' \in \mathrm{X}$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avec un paradoxe faible des transferts pour l'individu i.

Preuve (voir figure 2).

Soit (p, x) et (p', x') les deux équilibres correspondants à ω. $\exists\, i$ avec $\mathrm{U}_i(x'_i) \neq \mathrm{U}_i(x_i)$. En effet, si $\mathrm{U}_i(x'_i) = \mathrm{U}_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ cela entraîne $px'_i > px_i$, $i = 1, \ldots, n$, et donc $\sum_{i=1}^{n} px'_i > pr$ d'où $x' \notin \mathrm{X}$, ce qui est impossible puisque x' est équilibre.

Sans perte de généralité, supposons $U_1(x'_1) > U_1(x_1)$. $x'_1 \notin \beta(p, \omega_1)$ à cause de l'optimalité de la demande.

Comme $\omega \in \mathring{X}$, $\exists$ une boule ouverte $B(\omega_1, \varepsilon) \subset \mathring{X}_1$.

Soit $\bar{\omega}_1 \in B(\omega_1, \varepsilon) \cap \beta(p, \omega_1) \cap \beta^+(p', \omega_1) \neq \emptyset$.

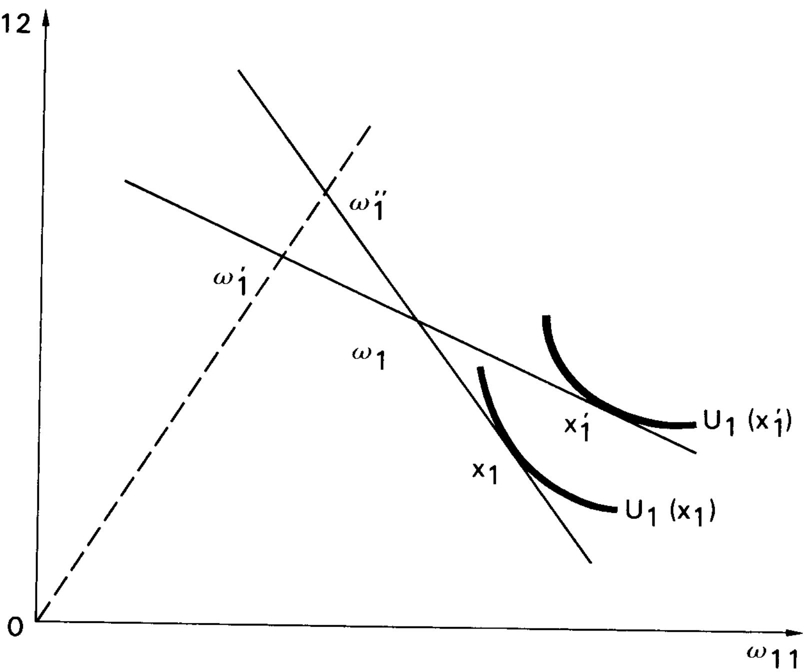
Considérons la demi-droite d'équation $x_1 = \lambda \bar{\omega}_1$. Elle intersecte $H(p, \omega_1)$ et $H(p', \omega_1)$ pour des valeurs de λ égales respectivement à

$$\frac{p\,\omega_1}{p\,\bar{\omega}_1} > 1, \qquad \frac{p'\,\omega_1}{p'\,\bar{\omega}_1} < 1.$$

Soit $\omega''_1 = \dfrac{p\,\omega_1}{p\,\bar{\omega}_1}\,\bar{\omega}_1$; $\omega'_1 = \dfrac{p'\,\omega_1}{p'\,\bar{\omega}_1}\,\bar{\omega}_1$; l'on a $\omega''_1 \gg \omega'_1$.

FIGURE 2

Illustration de la preuve de la proposition 2 dans le cas de 2 biens



x_1 (respectivement : x'_1) est équilibre du consommateur pour le vecteur p et le vecteur de ressources initiales ω''_1 (respectivement : ω'_1).

On peut vérifier aisément qu'il est toujours possible de trouver ω''_i $i = 2, \ldots, n$ (respectivement : ω'_i $i = 2, \ldots, n$) tel que (p, x) [respectivement : (p', x')] soit un équilibre relativement à ω'' (respectivement ω') et il se produit bien un paradoxe faible des transferts de ω' à ω'' pour l'individu 1. □

D'après la démonstration, il existe un paradoxe faible des transferts pour tous les individus dont le niveau d'utilité diffère entre deux équilibres.

5 Conclusion

Notons d'abord que la proposition 1 clot par une réponse affirmative un problème ouvert soulevé par SAFRA [1983 *b*, p. 49].

« L'unicité de l'équilibre pour toute allocation initiale des ressources implique-t-elle la non-existence du paradoxe local des transferts »?

En effet, avec l'unicité de l'équilibre, la non-existence du paradoxe global est ici équivalente à la non-existence du paradoxe local.

SAFRA [1983 *b*] prouve effectivement la proposition 1 [1] pour des économies régulières et lisses mais sa démonstration repose d'une manière essentielle sur un résultat qui n'est vrai que lorsque l'ensemble de consommation n'est pas borné inférieurement : l'unicité du prix d'équilibre pour toute allocation initiale des ressources implique la constance du prix d'équilibre (voir BALASKO [1980]).

La proposition 2 peut être comparée avec le résultat obtenu par SAFRA [1983] [2] qui prouve que dans le cadre des économies régulières et lisses la multiplicité des équilibres en un point de la boîte d'Edgeworth est une condition suffisante pour que l'ensemble des allocations avec un paradoxe local des transferts ait un intérieur non vide.

Dans TRANNOY [1986] l'on trouvera une application du résultat de la proposition 1 à la théorie de l'équité vu comme un état de non-envie dans une économie de distribution.

1. Théorème 5.1, p. 38 (analogue du théorème 5.1, p. 11, SAFRA [1983 *a*]).

2. Théorème 5.3, p. 40 (analogue du théorème 6.1, p. 12, SAFRA [1983 *a*]) toujours avec $\mathbb{R}^l$ comme ensemble de consommation.

• Références bibliographiques

BALASKO, Y. (1978). — « The Transfer Problem and the Theory of Regular Economies », *International Economic Review*, 19, p. 687-694.

BALASKO, Y. (1980). — « Number and Definiteness of Economic Equilibria », *Journal of Mathematical Economics*, 7, p. 215-225.

BHAGWATI, J., BRECHER, A. et HATTA, T. (1983). — « The Generalized Theory of Transfers and Welfare: Bilateral Transfers in a Multilateral World », *American Economic Review*, 73, n° 4, p. 606-618.

CHICHILNISKY, G. (1980). — « Basic Goods, the Effects of Commodity Transfers and the International Economic Order », *Journal of Development Economics*, 7, n° 4, p. 505-519.

CHICHILNISKY, G. (1983). — « The Transfer Problem with Three Agents Once Again: Characterization, Uniqueness and Stability », *Journal of Development Economics*, 13, n° 2, p. 237-247.

GALE, D. (1974). — « Exchange Equilibrium and Coalitions: an Example », *Journal of Mathematical Economics*, 1, p. 63-66.

GUESNERIE, R. et LAFFONT, J. J. (1978). — « Advantageous Reallocations of Initial Resources », *Econometrica*, 46, p. 835-841.

JONES, R. (1984). — « The Transfer Problem in a Three Agent Setting », *Canadian Journal of Economics*, 17, p. 1-14.

LEONTIEF, W. (1936). — « Note on the Pure Theory of Transfer » dans *Exploration in Economics*, Taussig Festschrift Volume, New York, p. 84-92.

POLEMARCHAKIS, H. M. (1983). — « On the Transfer Problem », *International Economic Review*, 24, p. 749-760.

POSTLEWAITE, A. et WEBB, M. (1984). — « The Possibility of Recipient-Harming, Donor-Benefiting Transfers with More Than Two Countries », *Journal of Development Economics*, 16, p. 357-364.

SAFRA, Z. (1983 *a*). — « Manipulation by Reallocating Initial Endowments », *Journal of Mathematical Economics*, 12, p. 1-17.

SAFRA, Z. (1983 *b*). — « The Transfer Paradox: Stability, Uniqueness and Smooth Preferences », *miméo*.

SAFRA, Z. (1984). — « On the Frequency of the Transfer Paradox », *Economics Letters*, 15, p. 209-212.

SAMUELSON, P. A. (1952). — « The Transfer Problem and Transport Costs: the Terms of Trade when Impediments are Absent », *Economic Journal*, 62, p. 278-304.

TRANNOY, A. (1986). — « Théorie économique de la mesure de l'inégalité », *Thèse*, Université de Rennes-I.

YANO, M. (1983). — « Welfare Aspects of the Transfer Problem », *Journal of International Economics*, 15, p. 277-289.