ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. - N° 2 — 1986

Processus d'ajustement et croissance : un commentaire

François LEGENDRE, Denis VIDAL *

RÉSUMÉ. – Dans son article « Processus d'ajustement et croissance », publié dans les *Annales de l'INSEE,* n° 49, d'Autume proposait une spécification particulière des processus d'ajustement dynamique. Cette spécification en termes de taux de croissance évitait la présence du taux de croissance de l'économie dans les équations d'un modèle macroéconomique. L'objet de cet article est de montrer que cette solution se généralise sous la forme d'un modèle à corrections d'erreurs d'ordre deux.

The Adjust Process and Growth: a Comment

ABSTRACT. – In his article "Processus d'ajustement et croissance", published in *Les Annales de l'INSEE,* No. 49, d'Autume proposed a particular relation in the dynamic adjustment process. This relation in terms of growth rate made it possible to avoid including the economic growth rate in macroeconomic model equations. The purpose of this article is to show that this solution can be generalized in the form of an error correction mechanism of the second order.

---

* F. LEGENDRE, D. VIDAL : Groupe de Mathématiques Économiques, Université de Paris-I, 12, place du Panthéon, 75231 Paris Cedex 05. Nous remercions MM. les Professeurs C. FOURGEAUD et P.-Y. HÉNIN, directeurs de nos thèses de III^e Cycle. Deux rapporteurs anonymes des *Annales,* A. d'AUTUME et P. MALGRANGE nous ont fait profiter de leurs remarques. Nos remerciements vont aussi à nos collègues de l'Université de Paris-I, Paul KARADÉLOGLOU, Eric VERGNAUD et Thierry LAURENT.

1 Introduction

L'inertie des comportements économiques est fréquemment spécifiée à l'aide d'un modèle d'ajustement partiel (noté MAP). Il se présente de la façon suivante :

$$y-y_{-1}=a(y^*-y_{-1})+u,$$

avec y la quantité effective, y^* la quantité désirée ou cible sur laquelle il convient de s'ajuster et u un terme d'erreur. Le paramètre a (compris entre 0 et 1) reçoit le nom de vitesse d'ajustement.

Le modèle à corrections d'erreurs (HENDRY [1978]), noté MCE, élargit la gamme des processus d'ajustement dynamique à la disposition du modélisateur. Il s'écrit de la sorte :

$$y-y_{-1}=a(y^*-y^*_{-1})+b(y^*_{-1}-y_{-1})+u \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y=a\,\Delta y^*+b\,(y^*-y)_{-1}+u.$$

Dans une première partie, d'une part, nous présenterons une spécification générale des processus d'ajustement dynamique rendant compte du MAP et du MCE; d'autre part, nous en déduirons la forme général du processus d'ajustement ayant les propriétés de « neutralité » recherchées par d'Autume. Nous pourrons alors, dans une seconde partie, relier la solution proposée par celui-ci et celle que nous avons mise en évidence.

2 Processus d'ajustement dynamique et croissance

Pour rendre compte de la liaison dynamique entre une série effective (notée y par la suite en omettant l'indice relatif au temps) et sa cible (ou encore la série désirée notée y^*), nous adoptons la spécification suivante (où u est un terme d'erreur, aléatoire d'espérance nulle) :

(1) $$y-\sum_{i=1}^{I_\alpha}\alpha_i y_{-i}=\beta_0 y^*-\sum_{i=1}^{I_\beta}\beta_i y^*_{-i}+u,$$

soit, en utilisant la notation des polynômes de retards :

$$\mathrm{A}(\mathrm{L})\,y=\mathrm{B}(\mathrm{L})\,y^*+u \qquad \text{et} \qquad \alpha_0=1$$

Le polynôme A (L) est inversible, sinon cette relation ne serait pas stable.

Cette spécification générale demeure incomplète. Il est nécessaire de lui adjoindre une condition supplémentaire assurant l'ajustement de la quantité effective à la cible. Nous adoptons la définition suivante de l'ajustement de y vers y^* :

$$(2) \qquad \mathrm{E}(y_t - y_t^*) = 0, \qquad \forall t,$$

et nous dirons alors que le modèle est sans biais.

Les implications de cette condition (2) ne peuvent être évaluées qu'au prix d'hypothèses sur le comportement de la cible y^*. Supposons que y^* suit un processus de type ARIMA :[1]

$$(3) \qquad \Phi(\mathrm{L})(\Delta^d y^* - \mu) = \Theta(\mathrm{L})\,\varepsilon.$$

$\Phi(\mathrm{L})$ est un polynôme de retards inversible, ε un processus de type « bruit blanc ».

Nous envisagerons deux cas, celui où y^* est stationnaire, puis celui où y^* croît à taux constant.

Cas 1, $d=0$. y^* est donc d'espérance constante. De la spécification initiale (1) du processus d'ajustement, on déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y-y^*) &= \mathrm{E}[\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{L})\{(\mathrm{B}(\mathrm{L})-\mathrm{A}(\mathrm{L}))y^* + u\}]\\ &= \mathrm{A}^{-1}(1)(\mathrm{B}(1)-\mathrm{A}(1))\,\mu.\end{aligned}$$ [2]

La propriété suivante en découle :

$$(4) \qquad [\text{Le modèle d'ajustement est sans biais}] \iff [\mathrm{A}(1) = \mathrm{B}(1)]$$

La condition (4) est une classique condition d'homogénéité, vérifiée par le MAP et le MCE. On la suppose, pour la suite de l'exposé, toujours vérifiée.

Cas 2, $d=1$. Dans ce cas, y^* croît régulièrement[3]. La contrainte (4) n'assure plus la « convergence » du modèle d'ajustement. Elle signifie, cependant, que 1 est racine de l'équation $\mathrm{B}(\mathrm{L})-\mathrm{A}(\mathrm{L})=0$. Nous pouvons factoriser le polynôme $\mathrm{B}(\mathrm{L})-\mathrm{A}(\mathrm{L})$ de la façon suivante :

$$\mathrm{B}(\mathrm{L})-\mathrm{A}(\mathrm{L}) = -(\mathrm{L}-1)\,\mathrm{C}(\mathrm{L}) = \Delta \mathrm{C}(\mathrm{L}).$$

L'espérance de l'écart entre la quantité effective et la cible s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y-y^*) &= \mathrm{E}\{\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{L})(\mathrm{C}(\mathrm{L})\,\Delta y^* + u)\}\\ &= \mathrm{A}^{-1}(1)\,\mathrm{C}(1)\,\mu.\end{aligned}$$

1. y^* suit un ARIMA $(\mathrm{I}_\varphi, d, \mathrm{I}_\theta)$, processus autorégressif d'ordre I_φ, intégré à l'ordre d et incluant une partie moyenne mobile d'ordre I_θ. Nous utilisons ici la formalisation de KLOEK [1984].

2. Il est commode, dès que l'opérateur L n'est plus pertinent (s'il s'applique à une constante par exemple), de lui substituer l'unité.

3. Plus précisément, y^* est le logarithme d'une quantité croissant au taux μ.

Dans un contexte de croissance, il est nécessaire d'imposer la contrainte supplémentaire suivante :

(5) [Le modèle d'ajustement est sans biais] $\Leftrightarrow$ [$C(1)=0$]

Cette condition signifie donc que 1 est racine double de l'équation $B(L)-A(L)=0$. Le polynôme $B(L)-A(L)$ peut s'écrire sous la forme $\Delta^2 D(L)$.

Une illustration suggestive peut être obtenue en fixant à deux l'ordre des polynômes $A(L)$ et $B(L)$ [4]. Le polynôme $D(L)$ est de degré zéro, soit :

$$B(L)-A(L)=\Delta^2 D(L)=\Delta^2 d_0$$

En explicitant le polynôme $A(L)$, nous obtenons l'expression suivante :

$$y-y^*-\alpha_1(y-y^*)_{-1}-\alpha_2(y-y^*)_{-2}=d_0\,\Delta^2 y^*+u.$$

En transformant cette dernière expression, nous aboutissons au modèle d'ajustement dynamique suivant :

$$\begin{aligned}\Delta^2 y=&(d_0+1)\Delta^2 y^*+(1+\alpha_2)\Delta(y^*-y)_{-1}\\&+(1-\alpha_1-\alpha_2)(y^*-y)_{-1}+u.\end{aligned}$$

Ce modèle coïncide avec le modèle à corrections d'erreurs d'ordre deux, d'expression générale suivante: [5]

$$\Delta^2 y=a\,\Delta^2 y^*+b\,\Delta(y^*-y)_{-1}+c\,(y^*-y)_{-1}+u.$$

Il convient de spécifier, dès lors que la cible n'est pas stationnaire, le processus d'ajustement sous la forme d'un MCE d'ordre deux qui permet la « convergence » des deux quantités y et y^*.

3 Comparaison avec la solution proposée par d'Autume

D'Autume, dans l'article déjà évoqué, critique les spécifications utilisées par Deleau, Malgrange et Muet [1981] (notés DMM par la suite) pour assurer l'existence de solutions à taux de croissance constant dans leur maquette représentative des modèles macroéconomiques. En utilisant l'exemple du cycle de productivité, d'Autume résume la solution adoptée par DMM par le système suivant :

$$\begin{aligned}&n^*=b+q^*\\&n=\lambda(n_{-1}+g)+(1-\lambda)n^*, \qquad 0<\lambda<1\\&q^*=\beta(q^*_{-1}+g)+(1-\beta)q, \qquad 0<\beta<1\end{aligned}$$

où n^* représente les effectifs désirés, b la productivité du travail, q^* la production normale, q la production effective et n les effectifs réels (toutes ces variables sont en logarithmes).

Dans ce système, les variables retardées sont « actualisées » au taux g, taux de croissance des grandeurs en volume de l'économie. Cette formulation assure une solution de long terme où les quantités réelles coïncident avec les quantités désirées (ou normales).

Cependant, une telle spécification soulève deux réserves. D'une part, l'existence d'une solution de long terme n'est assurée que pour une valeur particulière de g. D'autre part, il faut admettre que les agents connaissent préalablement ce taux de croissance de l'économie. Pour pallier ces restrictions, d'Autume propose la solution alternative suivante :

$$\begin{aligned} n^* &= b+q \\ g &= \beta g_{-1} + (1-\beta)\Delta n^*, \qquad 0<\beta<1 \\ n &= g + \lambda n_{-1} + (1-\lambda) n^*_{-1}, \qquad 0<\lambda<1. \end{aligned}$$

La seconde équation, déterminant le taux de croissance normale de la cible, utilisé ensuite dans l'équation d'ajustement, constitue l'apport principal de d'Autume. Ce système après élimination de g conduit à l'équation suivante :

$$(n-n^*) - (\lambda+\beta)(n-n^*)_{-1} + \lambda\beta(n-n^*)_{-2} = -\beta\Delta^2 n^*.$$

Cette équation doit nécessairement pouvoir s'exprimer sous la forme d'un MCE d'ordre deux reliant n et n^*, expression la plus générale des processus d'ajustement assurant la coïncidence de n et n^* quel que soit le taux de croissance de la cible. En transformant le terme à gauche du signe égal de la sorte :

$$\Delta^2(n-n^*) + (1-\lambda\beta)\Delta(n-n^*)_{-1} + (1-\lambda)(1-\beta)(n-n^*)_{-1} = -\beta\Delta^2 n^*,$$

nous obtenons effectivement :

$$\Delta^2 n = (1-\beta)\Delta^2 n^* + (1-\lambda\beta)\Delta(n^*-n)_{-1} + (1-\lambda)(1-\beta)(n^*-n)_{-1}.$$

Cette dernière formule intègre l'ensemble des termes constitutifs du modèle à corrections d'erreurs d'ordre deux. Elle ne présente cependant que deux degrés de liberté en accord avec le système de départ de d'Autume.

4. Ordre minimum pour que le polynôme $B(L)-A(L)$ puisse admettre au moins 1 comme racine double.

5. Ce modèle, dans une terminologie due au contrôle optimal, distingue trois réponses : la réponse proportionnelle, la réponse intégrale et la réponse intégrée à l'ordre deux.

4 Conclusion

Dans un contexte de croissance, le modèle à corrections d'erreurs d'ordre deux satisfait, au même titre que la formulation proposée par d'Autume, aux conditions permettant l'obtention de solutions de long terme cohérentes dans un modèle macroéconomique. Il apparaît donc comme sa généralisation.

• Références bibliographiques

AUTUME, d'A. (1983). — « Processus d'ajustement et croissance », *Annales de l'INSEE*, n° 49, p. 113-121.

DAVIDSON, J., HENDRY, D., SRBA, F. et YEO, S. (1978). — « Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship between Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom », *The Economic Journal*, n° 88, p. 661-692.

DELEAU, M., MALGRANGE, P. et MUET, P.-A. (1981). — « Une maquette représentative des modèles macroéconomiques », *Annales de l'INSEE*, n° 42, p. 53-91.

KLOEK, T. (1984). — « Dynamic Adjustment when the Target is Nonstationary », *International Economic Review*, 25, n° 2, p. 315-326.

ERRATUM

Une erreur de maquette s'est glissée dans l'article de Tony Lancaster et Andrew Chesher « Residuals Tests and Plots with a Job Matching Illustration » publié dans le n° 59/60 des Annales de l'INSEE. Les titres des figures doivent être maintenus dans l'ordre où ils apparaissent mais les figures elles-mêmes doivent être mises dans l'ordre suivant : 9, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 1, 3, 2.

An error slipped into the article by Tony Lancaster and Andrew Chesher "Residuals Tests, and Plots with a Job Matching Illustration", published in number 59/60 of the Annales de l'INSEE. The titles of the figures should be kept in the same order, but the figures themselves should be placed in the following one: 9, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 1, 3, 2.