ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 2 — 1986

Dynamique de l'investissement et de l'emploi avec coûts d'ajustement sur le capital et le travail

Patrick ARTUS, Bernard MIGUS *

RÉSUMÉ. – Cet article présente les fondements et l'estimation de deux modèles de détermination des trajectoires optimales anticipées de l'emploi et du capital des entreprises en présence de coûts d'ajustement sur les deux facteurs de production. Dans un cas on suppose que les entreprises sont toujours contraintes par la demande, dans l'autre cas que la contrainte de débouchés n'est jamais active.

Investment and Employment Dynamics with Adjustment Costs on Capital and Labour

ABSTRACT. – This article presents the foundations and the estimation of two models describing how firms determine the optimal expected paths of employment and of the capital stock when they face adjustment costs on both production factors. In the first model, firms are assumed to be always constrained on their sales, in the second one never to be rationed on the goods market.

* P. ARTUS: Banque de France, 39, rue Croix des Petits Champs, 75001 Paris; B. MIGUS: ENSAE, 3, av. Pierre Larousse, 92240 Malakoff, France

1 Introduction

De nombreux articles présentent comment le capital s'ajuste vers son niveau désiré de long terme en présence de coûts d'justement sur le capital (HAYASHI [1982], ABEL-BLANCHARD [1983], BLANCHARD-SACHS [1982], D'AUTUME-MICHEL [1984]).

On se propose dans cet article d'introduire également un coût d'ajustement sur l'emploi pour prendre en compte la rigidité de ce dernier qui est certainement très grande, au moins dans le cas français. On introduit la possibilité que l'entreprise subisse une contrainte sur ses débouchés, mais sans s'interroger sur une possible transition d'un régime contraint vers un régime non contraint ou réciproquement. Ce type de transition a déjà été étudié par MALGRANGE-VILLA [1984]; un modèle d'investissement avec plusieurs régimes a déjà été développé et estimé par ARTUS-MUET [1983], mais dans le cas statique, sans que l'entreprise puisse anticiper si elle sera contrainte ou non dans le futur.

On analyse ici l'évolution du capital, de l'emploi et de la production dans les cas où la contrainte de débouchés soit n'est jamais active, soit limite de façon permanente la production possible de l'entreprise. Dans ce dernier cas, on introduit une dynamique d'ajustement de la demande anticipée vers son niveau de long terme qui permet d'introduire dans le modèle un effet de la situation conjoncturelle de court terme et de représenter le cycle de productivité. La représentation de la demande anticipée est donc ici un peu plus sophistiquée que dans beaucoup d'articles appliqués où elle ne résulte que d'un lissage des demandes passées observées.

On montre alors qu'il existe une trajectoire optimale stable unique convergeant vers les valeurs de long terme des variables endogènes et on peut estimer les modèles qui ont été développés.

2 Le modèle avec contrainte de débouchés

2.1. Le programme des entreprises

Les entreprises maximisent leur profit intertemporel anticipé et actualisé, sous les contraintes de satisfaction des débouchés et d'accumulation du capital. A chaque période (t_0), elles mènent ce calcul de maximisation qui définit une trajectoire optimale sur $[t_0, \infty[$.

A des fins de simplification des notations, on posera $t_0=0$ dans tout ce qui suit.

Le capital et l'emploi sont soumis à des coûts d'ajustement, calculés de manière à s'annuler sur la trajectoire de croissance équilibrée qui sera définie plus loin. Ces coûts sont pris simplement sous forme quadratique.

Le programme des entreprises s'écrit donc en $t_0=0$:

$$\text{(1)} \quad \operatorname{Max} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j}\left[p_j \bar{D}_j - w_j N_j - p_j^I I_j - \frac{\gamma}{2} p_j^I \frac{(I_j-(g+\delta)K_{j-1})^2}{\bar{I}_j} - \frac{\mu}{2} w_j \frac{(N_j-(1+n)N_{j-1})^2}{\bar{N}_j}\right]$$

sous les contraintes

$$\text{(2)} \qquad \bar{D}_j = f_j(N_j, K_j) \quad \text{(débouchés donnés)}$$

qu'on écrira après inversion sous la forme:

$$\text{(2')} \qquad N_j = e_j(\bar{D}_j, K_j)$$

où les fonctions f et e dépendent du temps (progrès technique) et :

$$\text{(3)} \qquad K_j = K_{j-1}(1-\delta) + I_j \quad \text{(accumulation du capital)}$$

où:

- r: taux d'actualisation, supposé constant;
- w_j: coût salarial anticipé pour t_0+j exogène;
- p_j: prix de production anticipé pour t_0+j, exogène;
- $\bar{D}_j$: demande anticipée en t_0+j, exogène;
- N_j: emploi;
- p_j^I: prix de l'investissement (anticipé, exogène);
- I_j: investissement;
- δ: taux de dépréciation du capital (exogène);
- K_j: capital existant pendant la période t_0+j, incluant l'investissement réalisé pendant (au début) de cette période;
- f_j: fonction de production, reliant (hypothèse putty-putty) la demande totale au capital et à l'emploi;
- γ, μ: coefficients des coûts d'ajustement;
- $\bar{I}$, $\bar{N}$: variables exogènes, homogènes à l'investissement et à l'emploi, servant à rendre homogène la fonction de profit

En croissance équilibrée où les volumes croissant au taux g (égal au taux de croissance anticipé de $\bar{D}$) et l'emploi au taux n (égal à $g-\Pi$, où Π est le taux de croissance exogène de la productivité du travail), on a:

$$K_j = (1+g)K_{j-1}$$

donc :

$$I_j = K_j - (1-\delta) K_{j-1} = (g+\delta) K_{j-1}$$

ainsi que :

$$N_j = (1+n) N_{j-1}$$

En croissance équilibrée, les coûts d'ajustement quadratiques introduits s'annulent. Le niveau du capital et de l'emploi sur le sentier de croissance équilibrée ne dépend donc pas des coûts d'ajustement. Ce programme de maximisation définit une trajectoire optimale sur $[0, \infty[$ pour K et N, étant données les valeurs anticipées des exogènes (p_j, w_j, D_j, p_j^I) et le stock de capital initial (K_{-1}). Les entreprises sont supposées mener ce calcul d'optimisation à chaque période. Il détermine donc le capital à la fin de la période de départ 0 soit K_0. La demande en 0, $\bar{D}_0$ est supposée n'être pas observée au moment où les entreprises décident de leur capital et de leur investissement. On verra plus loin quelle hypothèse est faite sur la manière dont elles calculent $\bar{D}_0$ à partir des valeurs observées de la demande. Si *ex post* la demande réalisée D_0 diffère de la demande anticipée $\bar{D}_0$, on suppose que seul l'emploi pourra s'ajuster pour que (2) soit satisfaite, le capital restant identique à celui qui a été choisi en début de période, K_0. Le coût d'ajustement de l'emploi n'intervient donc qu'au moment de la décision du choix du niveau des facteurs face à la demande anticipée, pas *ex post* une fois la demande observée.

Il y a donc une asymétrie entre le traitement du capital et de l'emploi, malgré la symétrie apparente des coûts d'ajustement. Si *ex post* la prévision de demande faite par l'entreprise s'avère inexacte, celle-ci ne pourra pas modifier le stock de capital mais pourra adapter l'emploi. On utilise donc une solution assez voisine de celle qu'on trouve dans la littérature sur les contrats de travail : les salariés et les entreprises décident du salaire et de l'emploi à l'avance, et *ex post* les salariés doivent fournir tout le travail demandé par les entreprises au salaire fixé. Il convient d'expliciter clairement les conséquences de cette hypothèse.

Plaçons-nous *ex ante* sur un chemin de croissance équilibrée. Sur ce chemin, il n'y a pas pas de coûts d'ajustement. Si la demande constatée est supérieure à la demande anticipée, en raison de l'hypothèse faite la quantité de travail est accrue par rapport à la quantité optimale prévue. La variation du travail effectivement fourni par rapport au travail prévu se fait sans doute essentiellement sous la forme d'heures supplémentaires (si la demande était basse, sous la forme de chômage technique). On voit dans l'expression du profit que l'entreprise subit alors un coût salarial et un coût d'ajustement. La simplification faite consiste en ce que ce coût d'ajustement est identique à celui encouru en cas de variation de l'emploi : on ne distingue pas entre emploi et horaire dans la fourniture des heures travaillées :

– si la demande constatée est plus forte que la demande anticipée, la quantité de travail est accrue, et la base de référence pour le calcul des coûts d'ajustement dans la trajectoire optimale de la période suivante monte. Ceci impliquera à court terme une quantité de travail plus élevée sur cette trajectoire. L'entreprise est donc supposée ne pas désirer ramener rapidement le taux d'utilisation de l'emploi à sa valeur normale : l'inertie due aux coûts d'ajustement est la même ici pour l'horaire et pour l'emploi;

— si la demande constatée est très forte par rapport à la demande anticipée, il est possible que l'entreprise n'ait pas intérêt à satisfaire toute la demande, puisque la productivité marginale du travail décroît avec le supplément d'utilisation du travail; il y a un seuil de demande au-delà duquel la demande est rationnée (on passe en excès de demande sur le marché des biens). Nous avons supposé que ce seuil n'était jamais atteint, et nous nous sommes placés dans cette partie délibérément dans la situation d'excès d'offre de biens.

On a souhaité dans cet article garder des spécifications assez simples. L'objectif des entreprises pourrait être compliqué en introduisant un facteur supplémentaire (l'horaire de travail) et des coûts de variation de l'utilisation des facteurs de son niveau normal (cf. un exemple dans le cas du capital dans ARTUS-LAROQUE-MICHEL [1984]). On a voulu, pour pouvoir traiter rigoureusement le problème de maximisation, n'avoir que deux facteurs de production. On a refusé d'incorporer *ex post* dans le modèle un mécanisme d'ajustement de l'emploi qui ne résulte pas du comportement d'optimisation de l'entreprise.

Enfin, on n'a pas su introduire d'estimations de déséquilibre dans le processus d'estimation de modèle dynamique utilisé, qui est déjà complexe, ce qui explique qu'on a exclu *a priori* la possibilité de situation d'excès de demande de biens pour le modèle contraint *ex ante*.

2.2. Conditions d'optimalité

On utilise (2′) pour identifier N_j dans (1) et traiter un problème portant sur le seul capital, en remplaçant également I_j par son expression dans (3).

Il faut donc maximiser :

$$(1') \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j}\Bigg[p_j \bar{D}_j - w_j e_j(\bar{D}_j, K_j) - p_j^I(K_j-(1-\delta)K_{j-1}) \\ - \frac{\gamma}{2} p_j^I \frac{(K_j-(1+g)K_{j-1})^2}{\bar{I}_j} \\ - \frac{\mu}{2} w_j \frac{(e_j(\bar{D}_j, K_j)-(1+n)e_j(\bar{D}_{j-1}, K_{j-1}))^2}{\bar{N}_j}\Bigg]$$

Dérivant par rapport à K_j, on obtient :

$$(4) \quad -w_j e'_K(\bar{D}_j, K_j) - p_j^I + p_{j+1}^I \frac{1-\delta}{1+r} \frac{\gamma p_j^I}{\bar{I}_j}(K_j-(1+g)K_{j-1}) \\ + \frac{(1+g)}{1+r} \frac{\gamma p_{j+1}^I}{\bar{I}_{j+1}}(K_{j+1}-(1+g)K_j) - \frac{\mu w_j}{\bar{N}_j}(e(\bar{D}_j, K_j) \\ -(1+n)e(\bar{D}_{j-1}, K_{j-1}))e'_K(\bar{D}_j, K_j) + \frac{\mu w_{j+1}}{\bar{N}_{j+1}} \frac{(1+n)}{(1+r)}(e(\bar{D}_{j+1}, K_{j+1}) \\ -(1+n)e(\bar{D}_j, K_j))e'_K(\bar{D}_j, K_j) = 0$$

où pour simplifier on a supprimé l'indice temporel de la fonction d'emploi e.

(4) exprime la nullité du profit actualisé associé à l'opération qui consiste à augmenter le capital de dK en j, puis à revendre en $j+1$ cet investissement supplémentaire [dont il subsiste $dK\,(1-\delta)$]. Cette opération permet de réduire l'emploi en j (gain: $-w e'_K$, $e'_K<0$), coûte le prix d'achat du capital diminué de sa valeur de revente $\left(-p_j^I+\dfrac{1-\delta}{1+r}p_{j+1}^I\right)$, accroît le coût d'ajustement du capital en $+j$ (si le capital s'accroissait dans la situation de référence, le diminue sinon) $\left[\text{terme } -\dfrac{\gamma p_j^I}{\bar{I}_j}(K_j-(1+g)K_{j-1})\right]$, le réduit corrélativement en $j+1$ réduit le coût d'ajustement du travail en j, puisque le surcroît de capital permet d'utiliser moins de travail, et l'accroît en $j+1$.

On verra en Annexe 1 que le hessien de (1′) est bien tel qu'on a un maximum.

2.3. Croissance équilibrée

Sur un sentier de croissance équilibrée, on a:

$$K_j=K_0(1+g)^j; \qquad \bar{D}_j=\bar{D}_0(1+g)^j; \qquad N_j=N_0(1+n)^j;$$

la fonction de production inversée e est telle que:

$$e_j(\bar{D}_0(1+g)^j, K_0(1+g)^j)=N_0(1+n)^j; \tag{5}$$

e_j croît au taux $1+n$.

(4) s'écrit alors très simplement :

$$-e'_{jK}(\bar{D}_0(1+g)^j, K_0(1+g)^j)=\frac{p_j^I}{w_j}-\frac{1-\delta}{1+r}\frac{p_{j+1}^I}{w_{j+1}} \tag{6}$$

e'_{jK}, en raison de (5), croît au taux $\dfrac{1+n}{1+g}$; il en suit que $\dfrac{p}{w}$ doit croître à ce même taux. Si ρ représente le taux de croissance des prix (p et p^I), on a donc:

$$\frac{p_j^I}{w_j}=\left(\frac{1+n}{1+g}\right)^j\frac{p_0^I}{w_0}$$

D'où la condition d'optimalité en croissance équilibrée:

$$e'_{jK}(\bar{D}_0, K_0)=\frac{p_0^I}{w_0}\left(1-\frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho)\right), \tag{7}$$

c'est-à-dire l'expression tout à fait usuelle dans le cas statique avec un coût d'usage du capital défini comme

$$p_0^I\left(1-\frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho)\right)\approx p_0^I(r-\rho+\delta)$$

On supposera par la suite que les prix et salaires anticipés croissent à taux constant, à partir du prix observé et donc que pour toutes les trajectoires on a :

$$p_j = p_0(1+\rho)^j, \qquad p_j^I = p_0^I(1+\rho)^j, \qquad w_j = w_0\frac{(1+\rho)^j(1+g)^j}{(1+n)^j}$$

Le traitement de la demande anticipée est plus complexe, comme on va voir ci-dessous.

2.4. Demande anticipée

On a essayé dans ce papier de représenter de manière un peu plus raffinée qu'usuellement l'évolution de la demande anticipée. Les entreprises investissent en début de période, puisque le capital obtenu après investissement est utilisé pour produire en cours de période. On suppose donc qu'elles doivent déterminer les valeurs anticipée de la demande sur [0, ∞[à partir de l'observation de ses valeurs passées sur]$-\infty$, -1]. On distingue d'abord la demande anticipée tendancielle $\bar{\bar{D}}$, qui représente la tendance de moyen terme de la demande, et qui est obtenue à partir d'un retard assez long sur les valeurs observées :

$$\bar{\bar{D}}_{-1} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} D_{-i}(1+\bar{g})^{i-1}; \qquad \bar{\bar{D}}_{+j} = \bar{\bar{D}}_{-1}(1+g)^{j+1}$$

où $\bar{g}$ est le taux de croissance moyen de la demande sur les M dernières périodes. A partir de la date -1, cette demande de moyen terme croît au taux de croissance anticipé de la demande, soit g. A court terme, la demande observée peut s'écarter de cette tendance. On suppose que les entreprises anticipent qu'elle va la rejoindre progressivement selon :

(8) $$\bar{D}_j = \theta\,\bar{D}_{j-1}(1+g) + (1-\theta)\,\bar{\bar{D}}_j$$

On introduit ainsi un mécanisme de type correction d'erreur sur la demande : si la demande à court terme s'écarte de la demande de long terme, on suppose que la demande anticipée va converger vers la demande de long terme (au lieu de s'en écarter durablement dans le cas où la demande anticipée serait représentée par un simple retard sur la demande passée).

Dans toute la suite, pour alléger l'écriture, on utilise comme variables des variables transformées, obtenues en divisant les variables de départ par leur valeur en croissance équilibrée, utilisant les taux de croissance anticipés des différentes variables sur la période [0, ∞[, soit le taux n pour l'emploi N, le taux g pour la demande $\bar{D}$, le capital K et l'investissement I, le taux ρ pour les prix (p et p^I), le taux $n-\rho\ -g$ pour le salaire W; les variables transformées sont notées N', $\bar{D}'$, K', I', p', p'^I, w'.

Donc, (8) peut s'écrire, en itérant et en passant aux variables transformées $\bar{D}'_j = \dfrac{\bar{D}_j}{(1+g)^j}$, $\bar{\bar{D}}'_j = \dfrac{\bar{\bar{D}}_j}{(1+g)^j}$:

(9) $$\bar{D}'_j - \bar{\bar{D}}'_j = \theta^{j+1}(\bar{D}'_{-1} - \bar{\bar{D}}'_{-1})$$

La demande en -1 étant observée, $\bar{D}'_{-1}=D'_{-1}$ (D: demande constatée); on peut également noter que par construction $\bar{\bar{D}}'_j=\bar{\bar{D}}'_{-1}$, puisque la demande tendancielle croît au taux g.

Ainsi, par (9), l'évolution de la demande à court terme, qui sera très importante pour déterminer le niveau d'investissement, dépend de sa tendance de moyenne période, et de la vitesse anticipée par les entreprises (paramétrée par θ) de retour de la demande sur sa tendance après des déviations de court terme.

Il y a évidemment une forte dissymétrie entre le traitement des anticipations de demande, qui est sophistiqué, et celui des anticipations de prix et de salaire qui est très simple (les prix et salaires anticipés croissent à taux constant). A nouveau, on pourrait concevoir un modèle plus général (à dynamique compliquée) où toutes les anticipations auraient une composante de long terme et une composante de court terme.

2.5. Solution

Il s'agit d'intégrer (4), qui est une équation aux différences du second ordre en K et où apparaît $\bar{D}$ qui, comme on vient de le voir, s'écarte de la tendance de long terme de la demande $\bar{\bar{D}}$.

On linéarise (4) autour de la trajectoire optimale de croissance équilibrée définie par (7) calculée pour la demande tendancielle $\bar{\bar{D}}'_{-1}$.

On note K′ le capital (constant en variables transformées) sur cette trajectoire.

Écrite en variables transformées, (4) devient:

$$(4') \quad -w_0 e'_K(\bar{D}'_j, K'_j)-p_0$$
$$-p_0(1+\rho)\frac{1-\delta}{1+r}-\frac{\gamma p_0^I}{\bar{I}_0}(K'_j-K'_{j-1})+\frac{\gamma p_0^I}{\bar{I}_0}\frac{(1+\rho)(1+g)}{1+r}(K'_{j+1}-K'_j)$$
$$-\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}(e(\bar{D}_j, K'_j)-e(\bar{D}'_{j-1}, K'_{j-1}))\, e'_K(\bar{D}'_j, K'_j)$$
$$+\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}\frac{(1+\rho)(1+g)}{1+r}(e(\bar{D}'_{j+1}, K'_{j+1})-e(\bar{D}'_j, K'_j))\, e'_K(\bar{D}'_j, K'_j)=0$$

Après linéarisation, il vient :

$$(10) \quad (K'_{j+1}-K')\left(\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0(1+\eta)}e'^2_K+\frac{\gamma p_0^I}{\bar{I}_0(1+\eta)}\right)$$
$$+(K'_j-K')\left(-w_0 e''_{K^2}-\frac{\gamma P_0^I}{\bar{I}_0}\left(1+\frac{1}{(1+\eta)}\right)-\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'^2_K\left(1+\frac{1}{1+\eta}\right)\right)$$
$$+(K'_{j-1}-K')\left(\frac{\gamma p_0^I}{\bar{I}_0}+\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'^2_K\right)$$
$$=(\bar{D}'_{j+1}-\bar{\bar{D}}'_{j-1})\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0(1+\eta)}e'_D e'_K$$
$$+(\bar{D}'_j-\bar{\bar{D}}^1_{-1})\left(-w_0 e''_{KD}-\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'_D e'_K\left(1+\frac{1}{1+\eta}\right)\right)$$
$$+(\bar{D}'_{j-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'_D e'_K$$

où $1+\eta=\dfrac{1+r}{(1+\rho)(1+g)}$ et où toutes les dérivées sont prises au point $(\bar{D}'_{-1}, K')$.

On verra en Annexe 2 la résolution de (10).

On obtient :

$$(11)\quad K'_j-K'=(K'_{-1}-K')\lambda_1^{j+1}+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}(\theta^{j+1}-\lambda_1^{j+1})$$

où λ_1 est la seule solution stable (respectant la condition de transversalité) du polynôme caractéristique du membre de gauche de (10), et où θ est le coefficient d'ajustement de la demande vu en (9). On suppose (cf. les raisons en Annexe 2) que $\theta<\lambda_1$, c'est-à-dire que la vitesse anticipée de retour de la demande vers son niveau tendanciel est plus grande que la vitesse d'ajustement du capital vers son objectif de long terme, ce qui semble assez naturel.

On a alors $\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}>0$, où A, B et C sont les coefficients du membre de droite de (10), E, F et G ceux du membre de gauche de (10).

Puisque $\theta<\lambda_1$, on voit que si la demande est déprimée à court terme $(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1}<0)$, le capital est accru par rapport à une trajectoire où $\bar{D}'_{-1}=\bar{\bar{D}}'_{-1}$. La raison en est la suivante : la demande rejoint rapidement son niveau de long terme (car θ est petit). L'emploi initial $(e(D_{-1}, K_{-1}))$ est inférieur à l'emploi nécessaire pour satisfaire la demande tendancielle $(e(\bar{\bar{D}}, K_{-1}))$. L'emploi devra passer rapidement de $e(D_{-1}, K_{-1})$ à $e(\bar{\bar{D}}, K_{-1})$, (car θ est petit) causant un fort coût d'ajustement, que les entreprises peuvent réduire en accroissant initialement leur capital par rapport à la trajectoire optimale de référence. Seul le capital K'_0 est issu de (1), car en $t=1$ les entreprises calculent une nouvelle trajectoire optimale sur $[1, \infty[$. On utilisera donc pour l'estimation (11) avec $j=0$. On peut toutefois observer que $\theta^{j+1}-\lambda_1^{j+1}$ (le terme correctif) vaut bien sûr 0 pour $j=-1$, puis décroît, enfin croît pour tendre vers 0. L'écart à la trajectoire de référence s'accroît donc d'abord avant de disparaître progressivement. Il est intéressant d'étudier l'effet de l'introduction de cette flexibilité des anticipations de demande sur l'évolution à court terme de la productivité du travail.

Si les anticipations de demande se réalisent $(D'_0=\bar{D}'_0)$, on a

$$N'_0=e(\bar{D}'_0, K'_0)\qquad (e'_D>0,\ e'_K<0)$$

On suppose qu'en -1 on se trouvait à l'équilibre stationnaire $(\bar{D}'_{-1}=\bar{\bar{D}}'_{-2})$.

En 0, les salaires et prix anticipés ne changent pas, mais la demande tendancielle anticipée croît, passant de $\bar{\bar{D}}'_{-2}$ à $\bar{\bar{D}}'_{-1}=\varphi\,\bar{\bar{D}}'_{-2}$, $\varphi>1$.

On a alors :

$$\bar{D}'_0=\theta\,\bar{\bar{D}}'_{-2}+(1-\theta)\,\bar{\bar{D}}'_{-1}=\frac{\theta+(1-\theta)\,\varphi}{\varphi}\bar{\bar{D}}'_{-1}$$

$$(\bar{\bar{D}}'_{-1}<\bar{D}'_0<\bar{\bar{D}}'_{-2})$$

(11) implique que :

$$(12)\quad \frac{K'_0}{\bar{D}'_0} = \frac{(1-\lambda_1)\,\varphi+\lambda_1}{(1-\theta)\,\varphi+\theta}\left(\frac{\bar{K}'}{\bar{\bar{D}}'_{-1}}\right) + \frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}(\theta-\lambda_1)\frac{1-\varphi}{\theta+(1-\theta)\,\varphi}$$

où $\left(\frac{\bar{K}'}{\bar{\bar{D}}'_{-1}}\right)$ est l'inverse de la productivité du capital à l'équilibre stationnaire.

Si la demande anticipée était supposée rester au niveau de la demande de long terme, on aurait $\bar{D}'_j = \bar{\bar{D}}'_{-1}$ pour tout $j\,(\theta=0)$

$$(13)\quad \frac{K'_0}{\bar{D}'_0} = \left(\frac{\bar{K}'}{\bar{\bar{D}}'_{-1}}\right)\left(\frac{(1-\lambda_1)\,\varphi+\lambda_1}{\varphi}\right) - \frac{C}{G}\lambda_1\frac{1-\varphi}{\varphi} \qquad (G<0)$$

Le terme $-\frac{C}{G}\lambda_1\frac{1-\varphi}{\varphi}$ est positif, $\frac{(1-\lambda_1)\,\varphi+\lambda_1}{\varphi} < 1$; on peut donc avoir $\frac{K'_0}{\bar{D}'_0} > \frac{\bar{K}'}{\bar{\bar{D}}'_{-1}}$ si le terme $\frac{-C}{G}\lambda_1\frac{1-\varphi}{\varphi}$ est suffisamment grand.

A l'extrême inverse, pour la valeur maximale permise de $\theta\,(\theta=\lambda_1)$, on a $\frac{K'_0}{\bar{D}'_0} = \left(\frac{\bar{K}'}{\bar{\bar{D}}'_{-1}}\right)$.

Lorsque les anticipations de demande sont très rigides $(\theta=\lambda_1)$ et s'ajustent lentement à la demande de long terme, il n'y a pas de fluctuation de la productivité du capital; lorsque la demande s'ajuste rapidement à la demande de long terme (θ petit), si $-e'_D\,e'_K/[(\bar{N}_0\,\gamma\,p_0/\mu\,w_0\,\bar{I}_0)+e'^2_K]$ est grand $\left(\text{fort coût d'ajustement de l'emploi } \frac{\mu}{\bar{N}_0}\right)$ la productivité du capital décroît lorsque la demande croît. Si la fonction de production f est homogène de degré 1, les productivités du capital et du travail varient en sens inverse. [1] L'introduction du schéma d'ajustement à la demande de long terme permet donc d'introduire un cycle de productivité (hausse de la productivité du travail lorsque la demande croît) si le coût d'ajustement de l'emploi est suffisamment grand.

Il faut noter que le cycle de productivité défini ici diffère de celui qui est habituellement introduit dans les modèles macroéconomiques : *ex post*, ici, l'emploi s'ajuste librement pour que la demande réalisée soit satisfaite; *ex ante*, il apparaît un cycle de productivité quand on calcule la productivité à partir de la demande de court terme anticipée (il y a donc cycle de productivité en anticipations parfaites).

Le cycle de productivité particulier ne résulte pas simplement de l'inertie de l'emploi (la présence du terme de coût d'ajustement paramétré par μ)

mais de la combinaison de l'inertie de l'emploi (si $\mu=0$, $\lambda_1=0$ et il n'y a pas de cycle de productivité) et de la prise en compte de la situation conjoncturelle de court terme dans les anticipations ($\bar{D}' \neq \bar{\bar{D}}'$).

On peut également voir en Annexe 2 que l'inertie du capital (λ_1) croît avec les coûts d'ajustement sur les deux facteurs (γ et μ) ainsi qu'avec la demande de long terme anticipée $\bar{\bar{D}}'$.

3 Le modèle sans contrainte de débouchés

3.1. Le programme des entreprises

Les entreprises réalisent ici leur investissement « notionnel » puisque la quantité de biens vendue est égale à l'offre de biens. Le capital et l'emploi sont toujours soumis aux mêmes coûts d'ajustement que dans le cas précédent; les notations sont les mêmes.

Le programme des entreprises à la date 0 s'écrit :

$$(14) \quad \text{Max} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)_j}\left[p_j f_j(N_j, K_j) - w_j N_j - p_j^I I_j - \frac{\gamma}{2} p_j^I \frac{(I_j-(g+\delta)K_{j-1})^2}{\bar{I}_j} - \frac{\mu}{2} w_j \frac{(N_j-(1+n)N_{j-1})^2}{\bar{N}_j}\right]$$

Sous la contrainte

$$(3) \qquad K_j = K_{j-1}(1-\delta) + I_j$$

1. Puisque $\bar{\bar{D}}'_0 = f(N'_0, K'_0)$ soit (homogénéité de degré 1) $1 = f\left(\frac{N'_0}{\bar{\bar{D}}'_0}, \frac{K'_0}{\bar{\bar{D}}'_0}\right)$.

3.2. Conditions d'optimalité

Remplaçant dans (14) I_j par son expression (3), dérivant par rapport à K_j et N_j, on obtient les conditions d'optimalité; exprimées en transformant les variables comme précédemment en prenant leur rapport à leur taux de croissance tendanciel :

$$(15)\quad f_K(N'_j, K'_j) = \frac{p_0^I}{p_0}\left(1 - \frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho) + \frac{\gamma}{\bar{I}_0}(K'_j - K'_{j-1}) - \frac{\gamma}{\bar{I}_0}\frac{1+q}{1+r}(1+\rho)\,(K'_{j+1} - K'_j)\right)$$

$$(16)\quad f_N(N'_j, K'_j) = \frac{w_0}{p_0}\left(1 + \frac{\mu}{\bar{N}_0}(N'_j - N'_{j-1}) - \frac{\mu}{\bar{N}_0}\frac{(1+g)(1+\rho)}{(1+r)}(N'_{j+1} - N'_j)\right)$$

L'équation (15) traduit le fait que l'emploi d'une unité de capital supplémentaire à la période j est de profit nul (compte tenu du coût d'achat, de la valeur de revente, du coût d'ajustement supplémentaire en j et de la réduction de ce dernier en $j+1$); l'équation (16) indique que l'utilisation d'une unité de travail supplémentaire en j est de profit nul.

En croissance équilibrée, on retrouve les conditions usuelles :

$$f_K = \frac{p^I}{p}\left(1 - \frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho)\right), \qquad f_N = \frac{w}{p}$$

La concavité à l'optimum de l'hamiltonien par rapport à K et N résulte du même argument que dans l'Annexe 1.

Si, comme UZAWA [1969] ou MALGRANGE-VILLA [1984], on supposait que la fonction de production est homogène de degré 1, et que de plus il n'y a pas de coût d'ajustement sur l'emploi, (16) déterminerait le rapport capital-travail optimal et (15) le taux de croissance optimal du capital. Les rendements d'échelle sont ici décroissants (ce qui sera vérifié par l'estimation), et le problème ne se décompose pas comme il est indiqué ci-dessus. Il est de plus clair sur (15)-(16), que la seule solution de croissance équilibrée optimale est la solution stationnaire (en variables transformées). Ceci résulte de l'écriture des coûts d'ajustement dans (15) (où I_j croît au taux g et N_j au taux n, et où le numérateur s'annule quand K croît au taux g et N au taux n) qui diffère de celle d'Uzawa où intervient $\frac{I}{K}$ et non $\frac{I}{\bar{I}}$. Il faut voir que tout le problème (15) peut-être transformé par homothétie en un problème où les taux de croissance tendanciels sont différents.

3.3. Solution

Il faut donc, comme précédemment, linéariser (15′) (16′) autour de la solution stationnaire (en variables transformées) et intégrer.

Les valeurs de l'emploi et du capital sur la solution stationnaire seront notées N′ et K′.

Comme précédemment,

$$1+\eta=\frac{1+r}{(1+g)\,(1+\rho)}$$

On obtient :

$$(17)\quad f''_{\mathrm{KN}}(\mathrm{N}', \mathrm{K}')\,(\mathrm{N}'_j-\mathrm{N}')+(\mathrm{K}'_{j+1}-\mathrm{K}')\frac{p_0^{\mathrm{I}}}{p_0}\frac{\gamma}{\bar{\mathrm{I}}_0}\frac{1}{1+\eta}$$

$$+(\mathrm{K}'_j-\mathrm{K}')\left[f''_{\mathrm{K}^2}(\mathrm{N}', \mathrm{K}')-\frac{p_0^{\mathrm{I}}}{p_0}\frac{\gamma}{\bar{\mathrm{I}}_0}-\frac{p_0^{\mathrm{I}}}{p_0}\frac{\gamma}{\bar{\mathrm{I}}_0}\frac{1}{1+\eta}\right]$$

$$+(\mathrm{K}'_{j-1}-\mathrm{K}')\left(\frac{p_0^{\mathrm{I}}}{p_0}\frac{\gamma}{\bar{\mathrm{I}}_0}\right)=0$$

$$(18)\quad f''_{\mathrm{KN}}(\mathrm{N}', \mathrm{K}')\,(\mathrm{K}'_j-\mathrm{K}')(\mathrm{N}'_{j+1}-\mathrm{N}')\left(\frac{w_0}{p_0}\frac{\mu}{\bar{\mathrm{N}}_0}\frac{1}{(1+\eta)}\right)$$

$$+(\mathrm{N}'_j-\mathrm{N}')\left(f''_{\mathrm{N}^2}(\mathrm{N}', \mathrm{K}')-\frac{w_0}{p_0}\frac{\mu}{\bar{\mathrm{N}}_0}-\frac{w_0}{p_0}\frac{\mu}{\bar{\mathrm{N}}_0}\frac{1}{(1+\eta)}\right)$$

$$+(\mathrm{N}'_{j-1}-\mathrm{N}')\left(\frac{w_0}{p_0}\frac{\mu}{\bar{\mathrm{N}}_0}\right)=0$$

Ceci peut s'écrire :

$$(19)\qquad \begin{pmatrix}\mathrm{N}'_{j+1}-\mathrm{N}'\\ \mathrm{N}'_j-\mathrm{N}'\\ \mathrm{K}'_{j+1}-\mathrm{K}'\\ \mathrm{K}'_j-\mathrm{K}'\end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix}\mathrm{N}'_j-\mathrm{N}'\\ \mathrm{N}'_{j-1}-\mathrm{N}'\\ \mathrm{K}'_j-\mathrm{K}'\\ \mathrm{K}'_{j-1}-\mathrm{K}'\end{pmatrix}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -f''_{N^2}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{N}_0}{\bar{\mu}}(1+\eta) & -(1+\eta) & -f''_{KN}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{N}_0}{\bar{\mu}}(1+\eta) & 0 \\ +(1+\eta)+1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -f''_{KN}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}(1+\eta) & 0 & -f''_{K^2}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}(1+\eta) & -(1+\eta) \\ & & +(1+\eta)+1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique $D(\lambda)$, où λ représente les valeurs propres. du système dynamique (19) s'écrit :

$$\text{(20)} \qquad D(\lambda) = -\lambda^2 (f''_{KN})^2 \frac{p_0}{p_0^I}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}\frac{\bar{N}_0}{\mu}(1+\eta)^2$$
$$+\left(\lambda^2+\lambda\left(f''_{N^2}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{N}_0}{\mu}(1+\eta)-(1+\eta)-1\right)+1+\eta\right)$$
$$\times\left(\lambda^2+\lambda\left(f''_{K^2}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}(1+\eta)-(1+\eta)-1\right)+(1+\eta)\right)$$

On montre en Annexe 3 que $D(\lambda)$ a deux zéros entre 0 et 1 et que les deux autres racines correspondent à des dynamiques divergentes.

Soit B la matrice des coordonnées des vecteurs propres de A dans la base $(N'_{j+1}-N',\ N'_j-N',\ K'_{j+1}-K',\ K'_j-K')$. B est telle que les deux premiers vecteurs propres correspondent aux valeurs propres divergentes.

On a donc :

$$\text{(21)} \qquad B\begin{pmatrix} N'_{j+1}-N' \\ N'_j-N' \\ K'_{j+1}-K' \\ K'_j-K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3\lambda_3^{j+1} \\ c_4\lambda_4^{j+1} \end{pmatrix}$$

où λ_3 et λ_4 sont les valeurs propres stables.

Le système de quatre équations de (21) prises au point $j=-1$ permet de calculer les constantes d'intégration c_3 et c_4, $N'_{-1}-N'$, $K'_{-1}-K'$ étant connus au moment de la décision des entreprises.

Connaissant c_3 et c_4, ainsi que λ_3 et λ_4 qui viennent du calcul des zéros de $D(\lambda)$, (21) prise au point $j=0$ permet de calculer K'_0-K' et N'_0-N' en fonction de $c_3\lambda_3$ et $c_4\lambda_4$, K'_1-K' et N'_1-N' étant éliminés, car ils seront déterminés sur une trajectoire optimale sur $[1, \infty[$ et non sur la trajectoire $[0, \infty[$ considérée ici.

4 Estimation

4.1. Spécification

Pour pouvoir estimer les modèles, il est nécessaire de spécifier la fonction de production f. On a retenu une fonction de type Cobb-Douglas, qui, devant vérifier les conditions de croissance équilibrée (5), s'écrit :

$$\bar{D}_j = Q_0 N_j^{\alpha} K_j^{\beta} (1+g)^{(1-\beta)j} (1+n)^{-\alpha j} \tag{22}$$

D'où

$$N_j = \left(\frac{\bar{D}_j}{Q_0}\right)^{1/\alpha} K_j^{-\beta/\alpha} (1+g)^{-[(1-\beta)/\alpha]j} (1+n)^j \tag{23}$$

pour la fonction e

Ceci permet d'identifier toutes les expressions qui apparaissent dans les développements précédents en passant en variables transformées.

Dans le cas du régime contraint (partie 1), le capital optimal en croissance équilibrée [défini par (7)] s'écrit :

$$K' = \bar{D}'^{1/(\alpha+\beta)} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)} \left[\frac{w_0}{p_0^{\mathrm{I}}(1-[(1-\delta)/(1+r)](1+\rho))}\right]^{\alpha/(\alpha+\beta)} Q_0^{-1/(\alpha+\beta)} \tag{24}$$

Dans le cas du régime non contraint (partie 2) le capital et l'emploi optimaux en croissance équilibrée sont donnés par :

$$K' = \alpha^{\alpha/1-(\alpha+\beta)} \beta^{(1-\alpha)/(1-(\alpha+\beta))} \left(\frac{w_0}{p_0}\right)^{-\alpha/(1-(\alpha+\beta))} \left(\frac{c_0}{p_0}\right)^{-(1-\alpha)/(1-(\alpha+\beta))} \tag{25}$$

$$N' = \alpha^{(1-\beta)/(1-(\alpha+\beta))} \beta^{\beta/(1-(\alpha+\beta))} \left(\frac{w_0}{p_0}\right)^{-(1-\beta)/(1-(\alpha+\beta))} \left(\frac{c_0}{p_0}\right)^{-\beta/(1-(\alpha+\beta))}$$

où $c_0 = p_0^{\mathrm{I}}\left(1 - \frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho)\right)$ est le coût d'usage du capital.

4.2. Séries

Les différents modèles ont été estimés pour la France, sur séries trimestrielles pour la période 1963-1982. Les séries utilisées concernent l'ensemble des entreprises non financières. Ce sont :

– D et Q : valeur ajoutée des entreprises non financières;

– p : prix de cette valeur ajoutée;

– w : coût salarial par tête (incluant les cotisations sociales des entreprises);

– N : emploi dans les entreprises non financières;

– K : capital net des entreprises non financières;

– p^{I} : prix de l'investissement;

– r : taux d'intérêt sur les obligations privées.

Pour passer aux variables transformées il est nécessaire de disposer des taux de croissance anticipés des diverses variables.

Les taux de croissance anticipés des volumes (g) et de l'emploi (n) ont été calculés par moyenne mobile à partir des taux de croissance observés de la valeur ajoutée et des effectifs. La longueur de la moyenne mobile a fait l'objet d'un balayage lors de l'estimation, ce qui a finalement conduit à retenir des moyennes mobiles sur les six derniers trimestres.

Le taux de croissance anticipé des prix ne pouvait pas être pris égal à une moyenne mobile sur le taux de croissance observé des prix, car on n'aurait pas alors toujours eu $1+r>(1+\rho)(1+g)$.

Suivant METRIC [1981, p. 288], on a retenu pour les anticipations des hausses de prix (à long terme) une variable calculée en retenant 90 % de la hausse passée des prix (toujours mesurée en moyenne sur 6 trimestre) et en lui retranchant 1,5 point par an.

Cette nouvelle variable, plus basse systématiquement que l'inflation constatée, conduit bien à $1+r>(1+\rho)(1+g)$ en tout point, ce qui est nécessaire pour la stabilité des trajectoires optimales.

4.3. Modèle avec contrainte de débouchés

L'entreprise étant supposée réviser sa trajectoire optimale à chaque période, l'équation à estimer pour le capital est (11) où on fait $j=0$, ce qui détermine le capital à la fin de la période de décision, soit, en ajoutant un terme aléatoire ε_K, supposé normal, centré, d'écart-type σ_K :

$$(26) \quad K'_0=K'+(K'_{0-1}-K')\lambda_1+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\theta^2+B\theta+C}{E\theta^2+F\theta+G}(\theta-\lambda_1)+\varepsilon_K$$

où λ_1 est la racine comprise entre 0 et 1 du membre de gauche de (10), K' est le niveau de long terme du capital [voir (24)], $\bar{D}$ et $\bar{\bar{D}}$ sont définis en $1-d$; A, B, C, E, F, G en $1-e$.

Les paramètres à estimer sont :

– α et β, les coefficients du capital et du travail dans la fonction de production Cobb-Douglas;

— Q_0, la constante de la fonction de production;

— M, le retard maximal utilisé pour constituer la série de demande tendancielle; après balayage, M a été fixé à neuf trimestres;

— θ, la vitesse d'ajustement anticipée de la demande vers son niveau tendanciel [voir (8)];

— $\mu/\bar{N}_0$ et $\gamma/\bar{I}_0$, les coefficients des coûts d'usage du capital et de l'emploi.

La procédure d'estimation est la suivante :

pour des valeurs données des paramètres,

— on calcule les coefficients puis les racines du polynôme caractéristique de (10),

— on choisit celle qui est inférieure à 1 (λ_1);

— on calcule les coefficients du second membre de (10);

— on peut alors calculer la vraisemblance du système à estimer, qui est, pour le capital l'équation (26) et pour l'emploi, qui, à court terme, s'ajuste de façon à pouvoir satisfaire la demande réelle (et non anticipée), l'équation équivalente à (23) en variables transformées, et où de plus un terme aléatoire ($\varepsilon_N \sim (0, \sigma_N)$) a été ajouté, soit :

$$N'_0 = Q_0^{-1/\alpha} D_0'^{1/\alpha} K_0'^{-\beta/\alpha} + \varepsilon_N \tag{27}$$

La vraisemblance de (26)-(27) est maximée de façon itérative en revenant sur les paramètres.

Les résultats se trouvent dans la première colonne du tableau.

TABLEAU I

	Modèle avec contrainte de débouchés	Modèle sans contrainte
Coefficients de la fonction de production :		
α	0,42	0,52
	(12,1) *	(14,7)
β	0,43	0,33
	(11,4)	(8,8)
Q_0	4,51	5,36
	(155,6)	(163,8)
Coûts d'ajustement :		
$\mu/\bar{N}_0$	0,001 0	0,002 7
	(3,2)	(3,8)
$\gamma/\bar{I}_0$	0,000 48	0,000 92
	(1,7)	(2,7)
Ajustement de la demande :		
θ	0,26	
	(1,9)	
Équation pour K' :		
Écart-type (% moyen de K')	0,24 %	0,35 %
DW	1,33	0,71
Équation pour N :		
Écart-type (% moyen de N')	0,63 %	0,32 %
DW	1,30	0,46

* entre parenthèses sous les coefficients : les *t* de Student.

Les coefficients de la fonction de production montrent des rendements d'échelle légèrement décroissants ($\alpha+\beta=0,85$).

Les coefficients estimés des coûts d'ajustement sont tels qu'une hausse de 1 % en un trimestre de l'emploi accroîtrait le coût salarial de 0,74 %, et qu'une hausse de 1 % en un trimestre du capital réduirait le profit d'un montant équivalent à 3,14 % de la valeur du capital, ou encore 12,52 % de la valeur de la production (soit encore 27,79 % du coût salarial).

Le coût d'ajustement du capital paraît donc beaucoup plus important que le coût d'ajustement de l'emploi, et justifie la forte inertie obtenue dans l'ajustement du capital.

La valeur propre λ_1 obtenue a une valeur moyenne de 0,970, ce qui indique un délai moyen d'ajustement du capital de 8 ans.

Les valeurs extrêmes obtenues sur la période pour λ_1 sont 0,962 et 0,987.

L'autre valeur propre, correspondant à une dynamique instable, varie entre 1,030 et 1,043.

λ_1 montre des valeurs particulièrement élevées en 1975, 1980-1981-1982, années de faible croissance, où l'ajustement du capital aurait donc été très lent; λ_1 a ses plus faibles valeurs de 1966 à 1972.

θ est trouvé égal à 0,26. L'ajustement de la demande anticipée de court terme vers son niveau tendanciel est donc rapide.

Le terme $\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}(\theta-\lambda_1)$ qui multiplie $\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1}$ [voir (26)] vaut en moyenne $-0,196$.

La valeur propre inférieure à 1 du dénominateur $E\,\theta^2+F\,\theta+G$ varie entre 0,87 et 0,92, θ lui est toujours inférieur et $\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}$ est toujours positif (cf. Annexe 2).

4.4. Modèle sans contrainte de débouchés

Les équations à estimer pour le capital et l'emploi sont tirées du système (21) comme il est expliqué en 3.3; ceci conduit pour chaque période, au système (28) :

$$(28)\qquad \begin{aligned} K'_0-K'&=k_0(K'_{-1}-K')+k_1(N'_{-1}-N') \\ N'_0-N'&=n_0(K'_{-1}-K')+n_1(N'_{-1}-N') \end{aligned}$$

où K' et N', niveaux optimaux à long terme du capital et de l'emploi, sont donnés par (25).

Comme il a été vu en 3.3, k_0, k_1, n_0, n_1, ne sont pas des constantes mais doivent être calculées à chaque période à partir des coordonnées des vecteurs propres de (19) dans le système (N'_0, N'_{-1}, K'_0, K'_{-1}) et des valeurs propres non divergentes de (19) [notées λ_3 et λ_4 dans (21)] ces coordonnées et valeurs propres dépendant de l'ensemble des exogènes et paramètres du modèle.

Les paramètres à estimer sont ici en nombre plus réduit que dans le cas précédent, car la demande anticipée n'intervient pas.

Ce sont α, β et Q_0 (coefficient de la Cobb-Douglas) et $\mu/\bar{N}_0$, $\gamma/\bar{I}_0$ (coûts d'ajustement).

L'estimation du modèle sans contrainte sur l'ensemble de la période fournit des résultats qu'on peut sans doute qualifier de peu crédibles.

La précision des équations est bonne (voir seconde colonne du tableau), mais le coefficient moyen de $K'_{-1}-K'$ dans l'équation pour K'_0-K' [voir (28)] est 0,995, tandis que le coefficient moyen de $N'_{-1}-N'$ dans l'équation pour N'_0-N' est 0,998. (La valeur moyenne de k_1 est 0,0024, la valeur moyenne de n_1 est $-0{,}0004$.)

Le système (28) se réduit presque à $K'_0=K'_{-1}$, $N'_0=N'_{-1}$, ce qui indique que les valeurs de long terme K′ et N′ calculées par (25) ne sont sans doute pas les objectifs du capital et de l'emploi.

Cette inertie obtenue dans l'estimation se reflète dans la hausse des coefficients des coûts d'ajustement $\mu/\bar{N}_0$ et $\gamma/\bar{I}_0$ (voir tableau).

On retrouve le résultat connu selon lequel les équations de capital et d'emploi du « vrai modèle néo-classique » (MUET [1979]), où n'intervient pas la production anticipée, donnent de très mauvais résultats empiriques. Ces mauvais résultats sont ici d'une nature différente : il ne s'agit pas de valeurs anormales sur les paramètres des prix relatifs des facteurs ou de la fonction de production, ceux-ci étant ici raisonnables, mais de délais d'ajustement extrêmement longs pour les facteurs de production.

On pourrait certes avancer que dans le régime non contraint les évolutions de prix relatifs sont incorporées très lentement dans les décisions des entreprises. Cette lenteur est cependant telle ici (délais moyens d'ajustement de 50 ans pour le capital et 125 ans pour le travail !) qu'elle reflète certainement la non-pertinence du modèle non contraint en moyenne sur la période.

5 Conclusion

Dans ce papier, on a pu dériver explicitement les trajectoires optimales de l'emploi et du capital dans les cas où l'entreprise est contrainte ou non sur ses débouchés.

Les résultats obtenus indiquent que les coûts d'ajustement du capital sont beaucoup plus importants que ceux de l'emploi, et que le modèle où les contraintes de débouchés n'interviennent pas donne de mauvais résultats. On pourrait généraliser le modèle en introduisant un schéma d'anticipation plus sophistiqué que dans les modèles usuels d'investissement non seulement pour les débouchés, mais aussi pour les coûts des facteurs mais évidemment la spécification du modèle deviendrait compliquée.

On pourrait aussi affiner la fonction de production en distinguant emploi et horaire tant dans leur contribution à la production que dans les coûts d'ajustement qu'ils font subir aux entreprises lors de leurs variations.

Calcul du hessien de (1′)

La dérivée seconde de (1′) par rapport à K_j est :

$$-\frac{w_j}{(1+r)^j}e''_{K^2}-\frac{\mu w_j}{\bar{N}_j}(N_j-(1+n)N_{j-1})\,e''_{K^2}+\frac{\mu w_{j+1}}{\bar{N}_{j+1}}(N_{j+1}-(1+n)N_j)\,e''_K$$

$$(e''_{K^2}>0)$$

Sa négativité est assurée si :

$$\frac{w_j}{(1+r)^j}e''_{K^2}\left[\frac{\mu(N_j-(1+n)N_{j-1})}{\bar{N}_j}-\frac{w_{j+1}}{w_j}\frac{\mu}{1+r}.\frac{(N_{j+1}-(1+n)N_j)}{\bar{N}_{j+1}}+1\right]>0.$$

A l'optimum, ceci est vérifié.

En effet, si on différentiait directement (1) par rapport à N_j on obtiendrait :

$$-\frac{w_j}{(1+r)^j}-\mu\frac{w_j}{\bar{N}_j}\frac{1}{(1+r)^j}(N_j-(1+n)N_{j-1})$$
$$+\frac{\mu w_{j+1}}{\bar{N}_{j+1}}\frac{(1+n)}{(1+r)^{j+1}}.(N_{j+1}-(1+n)N_j)+\eta_j=0,$$

où $\eta_j\geqslant 0$ est le multiplicateur associé à (2′) [où $N_j\geqslant e(\bar{D}_j, K_j)$]. D'où la positivité à l'optimum du terme entre crochets et la négativité de la dérivée seconde.

Résolution de l'équation aux différences (10)

Considérons tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre. On voit que le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est tel que :

$$P(0) = \frac{\gamma p_0^{\mathrm{I}}}{\bar{\mathrm{I}}_0} + \frac{\mu w_0}{\bar{\mathrm{N}}_0} e_{\mathrm{K}}'^2 > 0$$

$$P(1) = -w_0 e_{\mathrm{K}}''^2 < 0.$$

et donc qu'il y a au moins une racine entre 0 et 1. Par ailleurs, le produit des racines est égal à $\frac{1+r}{(1+\rho)(1+g)}$. Si $1+r \geqslant (1+\rho)(1+g)$ (le taux d'intérêt nominal est supérieur ou égal au taux de croissance de la production en valeur), ce qu'on supposera par la suite, le produit des racines est supérieur à 1. Il en résulte qu'il y a obligatoirement une racine comprise entre 0 et 1 et une racine supérieure à 1. La condition de transversalité (non-divergence du capital à long terme) conduit à ne retenir que la racine comprise entre 0 et 1, notée λ_1. En effet, puisque le produit des racines est égal à $\frac{1+r}{(1+\rho)(1+g)}$ la racine supérieure à 1 est supérieure à $\frac{1+r}{(1+\rho)(1+g)}$.

En variables transformées, le programme (1) s'écrit :

$$\mathrm{Max} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\eta)^j} \Bigg[p_0 \bar{\mathrm{D}}_j' - w_0 - p_0^{\mathrm{I}} \mathrm{I}_j' + \frac{\gamma}{2} p_0^{\mathrm{I}} \frac{1}{\bar{\mathrm{I}}_0} (\mathrm{K}_j' - \mathrm{K}_{-1}')^2 - \frac{\mu}{2} \frac{w_0}{\bar{\mathrm{N}}_0} (\mathrm{N}_j' - \mathrm{N}_{-1}')^2 \Bigg].$$

La condition de transversalité habituelle s'écrit :

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{(1+\eta)^j} \mathrm{K}_j' = 0,$$

ce qui impose bien d'exclure la racine supérieure à $1+\eta = \frac{1+r}{(1+\rho)(1+g)}$.

La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc :

$$\mathrm{K}_j' - \mathrm{K}' = \tilde{\mathrm{A}}\, \bar{\lambda}_1^{j+1}.$$

Utilisant (9), on peut écrire le second membre comme :

$$\theta^{j+2}(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{\mu w_0}{N_0(1+\eta)}e'_D e'_K+\theta^{j+1}(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})$$

$$\times\left(-w_0 e''_{KD}-\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'_D e'_K\left(1+\frac{1}{1+\eta}\right)\right)$$

$$+\theta^{j}(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{\mu w_0}{\bar{N}_0}e'_D e'_K,$$

qu'on notera $\theta^j(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})(A\,\theta^2+B\,\theta+C)$.

Une solution particulière de (10) [dont le premier membre sera noté :

$$E(K'_{j+1}-K')+F(K'_j-K')+G(K'_{-1}-K')]$$

peut être trouvée sous la forme :

$$K'_j-K'=x\,\theta^{j+1}$$

si θ est différent de λ_1, racine comprise entre 0 et 1 du polynôme caractéristique de (10).

On a alors :

$$E\,x\,\theta^2+F\,x\,\theta+G\,x=(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})(A\,\theta^2+B\,\theta+C)$$

D'où $x=(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}$.

Pour que le signe de x soit non ambigu, on supposera par la suite que $\theta<\lambda_1$ (donc que $E\,\theta^2+F\,\theta+G>0$) et que $\theta<\bar{\lambda}_1$, racine comprise entre 0 et 1 de $A\,\theta^2+B\,\theta+C$ (une seule racine $\bar{\lambda}_1$ existe car $C>0$ et $A+B+C<0$). Donc $\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}>0$. Il n'est pas possible de classer λ_1 et $\bar{\lambda}_1$.

Cette condition $\theta<\lambda_1$ et $\theta<\bar{\lambda}$, signifie que la vitesse anticipée de retour de la demande vers son niveau tendanciel est grande, en particulier plus grande que celle d'ajustement du capital vers son objectif de long terme, ce qui semble assez naturel.

Sous ces conditions, $\dfrac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}>0$.

La solution générale de l'équation avec second membre s'écrit :

$$K'_j-K'=\tilde{A}\,\lambda_1^{j+1}+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}\theta^{j+1}.$$

La valeur de $\tilde{A}$ sera fixée en tenant compte de la valeur initiale de K′. On doit avoir :

$$K'_{-1}-K'=\tilde{A}+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}$$

D'où la solution générale finale :

$$K'_{-1}-K'=\left(K'_{-1}-K'-(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}\right)\lambda_1^{j+1}$$

$$+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}\theta^{j+1}$$

$$=(K'_{-1}-K')\,\lambda_1^{j+1}+(\bar{D}'_{-1}-\bar{\bar{D}}'_{-1})\frac{A\,\theta^2+B\,\theta+C}{E\,\theta^2+F\,\theta+G}(\theta^{j+1}-\lambda_1^{j+1})$$

On peut analyser comment varie la valeur propre λ_1 qui représente l'inertie du capital.

Le polynôme caractéristique du membre de gauche de (10) s'écrit :

$$\frac{\lambda^2}{1+\eta}-\left(1+\frac{1}{1+\eta}+\frac{w_0\,e_K''^2}{(\mu\,w_0/\bar{N}_0)\,e_K'^2+\gamma\,(p_0^I/\bar{I}_0)}\right)\lambda+1=0.$$

La solution inférieure à 1 (λ_1) croît avec les paramètres des coûts d'ajustement (γ et μ) : plus ceux-ci sont élevés, plus le capital est inerte. e_K' est donné par (7) $\left(-e_K'=\frac{p_0^I}{w_0}\left(1-\frac{1-\delta}{1+r}(1+\rho)\right)\right)$; si la demande D croît, normalement $e_K''^2$ baisse, et λ_1 est également accru.

ANNEXE 3

Etude de la dynamique de (19)

Le produit des racines de $D(\lambda)$ est : $(1+\eta)^2 > 1$ si on fait la même hypothèse que précédemment, c'est-à-dire $1+r > (1+g)(1+\rho)$.

La somme des racines est l'opposé du coefficient de λ^3, soit :

$$2+2\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} - f''_{N^2}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{N}_0}{\mu}\frac{(1+r)}{(1+g)(1+\rho)} - f''_{K^2}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} > 4.$$

On note que :

$$D(0) = \frac{(1+r)}{(1+g)(1+\rho)} \cdot \frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} > 1$$

(c'est le produit des racines)

$$D(1) = (f''_{N^2} f''_{K^2} - (f''_{KN})^2)\left(\frac{p_0}{p_0^I}\frac{p_0}{w_0}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}\frac{\bar{N}_0}{\mu}\frac{(1+r)^2}{(1+g)^2(1+\rho)^2}\right) > 0$$

si la fonction de production f vérifie les conditions usuelles (c'est vrai en particulier pour la fonction de Cobb-Douglas retenue).

Considérons l'élément de $D(\lambda)$:

$$\lambda^2 + \lambda\left(f''_{K^2}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} - \frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} - 1\right) + \left(\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)}\right)$$

note $Q(\lambda)$.

$$Q(0) = \frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} > 0;$$

$$Q(1) = f''_{K^2}\frac{p_0}{p_0^I}\frac{\bar{I}_0}{\gamma}\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)} < 0.$$

Le produit des racines Q(0) étant supérieur à 1, Q(λ) a une racine unique entre 0 et 1, notée $\bar{\lambda}_Q$.

$$D(\bar{\lambda}_Q) = -\bar{\lambda}_Q^2 (f''_{KN})^2 \frac{p_0}{p_0^I} \frac{p_0}{w_0} \frac{\bar{I}_0}{\gamma} \frac{\bar{N}_0}{\mu} \frac{(1+r)^2}{(1+g)^2(1+\rho)^2} < 0.$$

D a donc au moins 2 zéros entre 0 et 1. Comme la somme des racines de D est supérieure à $2+2\frac{1+r}{(1+g)(1+\rho)}$, D a seulement deux zéros entre 0 et 1. Les deux autres racines correspondent à des dynamiques divergentes et les constantes d'intégration associées seront donc nulles.

• Références bibliographiques

ABEL, A. B. et BLANCHARD, O. J. (1983). – «An Intertemporal Model of Saving and Investment», *Econometrica*, 51.

ARTUS, P. (1984). – « Comment fonctionne le marché du crédit : diverses analyses dans un cadre de déséquilibre », *Revue économique*, n° 4.

ARTUS, P, LAROQUE, G. et MICHEL, G. (1984). – « Estimation of a Quaterly Macroeconomic Model with Quantity Rationing», *Econometrica*, p. 1387-1414.

ARTUS, P. et MUET, P. A. (1983). – « Investissement, contrainte de débouchés, d'emploi, contraintes financières : estimation d'un modèle à plusieurs régimes ». *Document de travail*, OFCE, n° 83-03.

D'AUTUME, A. et MICHEL, P. (1984). – « Évaluation du capital en présence de contraintes anticipées sur les achats de biens d'équipement », *Annales de l'INSEE*, n° 54, p. 101-114.

BLANCHARD, O. J. et SACHS, J. (1982). – « Anticipations, Recessions and Policy: an Intertemporal Disequilibrium Model», *Annales de l'INSEE*, n° 47-48, p. 117-144.

HAYASHI F. (1982). – « Tobin's Marginal *q* and Average *q*: A Neoclassical Interpretation», *Econometrica*, 50, p. 213-224.

LAFFONT, J. J. et MONFORT, A. (1976). – « Économétrie des modèles d'équilibre avec rationnement », *Annales de l'INSEE*, n° 24, p. 3-39.

MALGRANGE, P. et VILLA, P. (1984). – « Comportement d'investissement avec coûts d'ajustement et contraintes quantitatives », *Annales de l'INSEE*, n° 53, p. 31-60.

METRIC (1981). – *« Une modélisation de l'économie française »*, INSEE, Paris.

MUET, P. A. (1979). – «Modèles économétriques de l'investissement : une étude comparative sur données annuelles », *Annales de l'INSEE*, n° 35, p. 85-132.

UZAWA (1969). – «Time Preference and the Penrose Effect in a Two Class Model of Economic Growth», *Journal of Political Economy*, 77, p. 628-654.