Concurrence par les prix et variété des produits

Paul CHAMPSAUR, Jean-Charles ROCHET *

RÉSUMÉ. – On trouve dans la littérature deux explications polaires de la variété des produits ou qualités offerts sur un marché. Soit cette variété résulte du nombre d'entreprises existant sur le marché, chacune d'entre elles n'offrant qu'un seul produit ou qualité. Soit il existe une situation de monopole, l'unique entreprise offrant une variété de produits, c'est-à-dire choisissant sa gamme, afin de mieux exploiter la diversité de ses clients.

Cet article est une contribution au développement d'une approche intermédiaire, qui permette l'analyse de situations d'oligopole sans que pour autant la gamme offerte par chaque entreprise soit restreinte *a priori*.

Price Competition and Product Variety

ABSTRACT. – The literature provides two polar explanations for the variety of products of quantities offered on the market. Either this variety results from the number of firms, each of which supplies a single product or quality. Or else there is a monopoly offering a variety of products, that is, choosing its catalogue of goods in order better to exploit the diversity of its clientele.

This article is a contribution to the development of an intermediary approach permitting an analysis of oligopoly situation without any *a priori* restriction on the variety of products by the individual firm.

* P. CHAMPSAUR : Direction de la Prévision, Paris; J. C. ROCHET : Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique et CEREMADE, Université Paris-IX - Dauphine.

1 Introduction

On trouve dans la littérature théorique deux explications très différentes de la façon dont sont déterminées la variété et les caractéristiques des produits offerts à la vente. Dans une première approche chaque entreprise potentielle est contrainte à n'offrir qu'un seul produit. La variété des produits effectivement offerts est alors régie par le processus d'entrée et de sortie du marché, et en particulier, en cas de libre entrée, par le nombre maximal d'entreprises qui peuvent survivre. Ont notamment contribué à cette approche SPENCE [1976], DIXIT et STIGLITZ [1977] et, plus récemment, SHAKED et SUTTON [1982]. Dans l'autre approche au contraire, une entreprise n'est pas limitée à un seul produit et en offre toute une gamme. Mais, à la suite de MUSSA et ROSEN [1978], l'attention s'est concentrée uniquement sur l'analyse d'une situation de monopole (PHLIPS et SCHULER [1981], GABSZEWICZ, SHAKED, SUTTON et THISSE [1982], MASKIN et RILEY [1984]). Ces auteurs ont pu formaliser une idée fort ancienne (voir par exemple WALRAS [1875]), à savoir qu'un monopole a intérêt à différencier ses produits les uns par rapport aux autres, de façon à mieux exploiter la diversité de ses clients. Ainsi la recherche d'une possibilité de discrimination accrue incite un monopole à offrir une variété de produits plus grande que celle requise par la seule efficacité économique.

Bien sûr le recours à des approches aussi contrastées peut trouver son origine dans des hypothèses très différentes concernant la structure des coûts. Ainsi un coût fixe très élevé attaché à la production de toute nouvelle qualité décourage l'offre de nombreuses qualités différentes par une même entreprise. De façon analogue, un coût fixe élevé attaché à l'activité d'une entreprise quelle que soit sa gamme, c'est-à-dire une forte barrière à l'entrée, favorise une situation monopolistique. Cependant il semble difficile de justifier pourquoi, si des firmes offrant chacune un seul produit peuvent survivre en assez grand nombre, comme chez SPENCE [1976] ou DIXIT et STIGLITZ [1977], l'existence d'entreprises offrant plusieurs qualités doive être exclue. Cet article est une contribution au développement d'une approche intermédiaire, approche qui permette l'analyse de situations d'oligopole (nous nous limiterons au cas d'un duopole) sans que pour autant la gamme offerte par chaque entreprise soit restreinte *a priori*.

Suivant une tradition bien établie qui remonte à HOTELLING [1929], nous formalisons les interactions entre les décisions de qualité et de prix prises par les entreprises concurrentes comme résultant d'un jeu non coopératif à deux étapes. Les entreprises choisissent d'abord leurs gammes de qualités (première étape). Elles le font en supposant que les décisions de prix ultérieures (deuxième étape) constitueront un équilibre de NASH. Autrement dit, dans la deuxième étape, les décisions de qualité sont fixées et il y a concurrence par les prix (à la BERTRAND). Quand, lors de la première étape, une entreprise décide quelle gamme de qualités offrir, elle doit tenir compte de deux effets opposés. Une meilleure discrimination des acheteurs ayant des caractéristiques différentes pousse à élargir la gamme de qualités comme dans une situation de monopole. Au contraire, la concurrence par les prix abaisse la marge bénéficiaire sur des qualités voisines vendues par des entreprises différentes, incitant chacune d'elles à différencier ses produits par rapport à ceux des concurrents (différentiation à la CHAMBERLIN) et donc à réduire sa gamme. Quel équilibre s'établit entre ces deux tendances ? C'est la question à laquelle cet article cherche à répondre.

Le modèle économique que nous utilisons (il est présenté dans la section 2) est celui de MUSSA et ROSEN [1978] qui l'avaient interprété comme un modèle de différentiation verticale (toutes les qualités potentielles sont ordonnées de la même façon par tous les acheteurs si elles sont vendues à un même prix). En fait, il apparaît que la distinction importante pour notre analyse ne réside pas entre différentiation verticale, définie comme ci-dessus, et différentiation horizontale. Afin de clarifier l'effet de la concurrence entre au moins deux entreprises sur leur capacité à discriminer parmi leur clientèle, nous faisons des hypothèses qui garantissent que la différentiation des produits soit un phénomène robuste au sens où elle resterait présente dans une allocation efficace des ressources. Nous excluons donc le cas extrême où toutes les qualités sont ordonnées de la même façon par tous les acheteurs si elles sont vendues à des prix égaux à leurs coûts marginaux respectifs (cas que nous appelons : « différentiation verticale pure »). Un modèle de différentiation verticale pure fut introduit pour la première fois par GABSZEWICZ et THISSE [1979, 1980] et le concept fut précisé par SHAKED et SUTTON [1983].

Notre analyse débute par un réexamen de la situation de monopole (section 3). Nous complétons les résultats de MUSSA et ROSEN [1978] et MASKIN et RILEY [1984] en précisant le rôle des contraintes qui limitent le pouvoir du monopole. Habituellement on fait l'hypothèse que, s'il estime les prix demandés par le monopole trop hauts, un consommateur n'achète rien. Dans le modèle de MUSSA et ROSEN, ceci équivaut à supposer que le consommateur achète une qualité très basse à un prix exogène faible. Le monopole a alors intérêt à offrir une gamme de qualités qui, par rapport à la gamme correspondant à une allocation efficace des ressources, est élargie du côté des qualités basses. Nous examinons la situation symétrique où les consommateurs ont pour alternative l'achat d'une qualité élevée à un prix exogène. Comme on pouvait s'y attendre, le monopole a alors intérêt à élargir sa gamme du côté des qualités élevées.

Nous étudions ensuite l'équilibre de prix (section 4) dans une situation de duopole à gammes de qualités fixées et en se restreignant au cas où la gamme de qualité de chaque entreprise est un intervalle dans l'échelle des qualités possibles. Nous précisons les conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de prix. Il se trouve que l'existence repose sur les conditions qui garantissaient qu'un monopole ait intérêt à discriminer complètement ses clients. L'équilibre de prix possède des propriétés qui rappellent à la fois les situations de monopole étudiées auparavant et l'équilibre d'une situation de duopole plus simple où chaque entreprise ne pourrait produire qu'une qualité. En un tel équilibre, il ne peut plus y avoir discrimination complète des consommateurs. Toute discrimination, s'il en existe, est cantonnée aux extrémités de l'échelle des caractéristiques des consommateurs et des qualités.

Les propriétés de l'équilibre de prix ont des conséquences importantes sur les choix des gammes de qualités, choix qui sont examinés dans la section 5. En particulier il n'est jamais dans l'intérêt des deux entreprises d'avoir des gammes qui se recouvrent ni même qui soient contigües. Il y a donc toujours, à un équilibre de duopole, un ensemble de qualités intermédiaires qui ne sont pas produites alors qu'elles le seraient aussi bien en situation de monopole que si chaque qualité était offerte à son coût marginal. L'incitation pour une firme à se différencier par rapport au concurrent peut même être si puissante qu'elle ôte à chaque firme les moyens d'opérer une discrimination parmi ses clients, la forçant ainsi à ne produire qu'une qualité. Un exemple illustrant la possibilité d'un tel phénomène est donné dans la section 6.

Notre analyse repose de manière importante sur l'hypothèse de concurrence par les prix à la BERTRAND. Si les entreprises ne s'attendent pas à ce que les prix se déterminent ainsi, elles choisiront leurs gammes de qualité de façon très différente de ce qui est décrit dans cet article. Ce point a été relevé par DIXIT [1979], mais dans un modèle excluant qu'une entreprise produise plus d'une qualité. La principale conséquence d'un comportement de prix moins concurrentiel est précisément d'inciter les entreprises à choisir des gammes plus larges et, selon toute vraisemblance, en recouvrement. Ce serait le cas si, par exemple, le choix d'une gamme était mis en œuvre par des investissements de capacité irréversibles, ce qui conduit à un équilibre à la COURNOT (voir KREPS et SCHEIKMAN [1983]). Le relation entre structure de marché et variété de produits est alors beaucoup plus complexe. Pour une première approche, voir GAL-OR [1983].

2 Le modèle

Nous nous placerons dans le cadre du modèle de MUSSA et ROSEN [1978], généralisé par MASKIN et RILEY [1984]. Ce modèle décrit le marché d'un produit fondamentalement unique, mais qui peut être différencié en un certain nombre de variétés, distinguables par les consommateurs, Les attributs d'une variété particulière seront résumés par un indice q. Une telle différentiation peut bien sûr s'expliquer dans certains cas par des considérations technologiques (externalités positives ou rendements croissants dans le processus de production). Nous nous concentrerons ici sur les raisons de nature *commerciale* qui peuvent pousser une entreprise à élargir la gamme des produits qu'elle offre. Aussi avons-nous adopté l'hypothèse neutre que les coûts de production sont additifs : $c(q)$ désignera le coût de production d'une unité de la variété q. Ce coût est donc supposé indépendant des niveaux de production de la variété q elle-même, ainsi que de ceux des autres variétés.

Bien que traité comme divisible au niveau agrégé, le produit sera supposé indivisible au niveau du consommateur (on peut penser par exemple à un bien d'équipement). Chaque consommateur choisit alors une variété q parmi celles qui sont offertes et achète une unité du bien q au prix p. Ce choix est fait en accord avec un préordre de préférences sur les couples (q, p) que l'on représentera par une fonction d'utilité quasi linéaire :

$$u(\theta, q) - p \qquad (1)$$

où θ est un paramètre unidimensionnel reflétant les goûts du consommateur considéré. Avec une telle formalisation, l'allocation efficace des ressources est obtenue quand le prix de chaque variété est égal à son coût unitaire de production. Le consommateur de caractéristique θ choisit alors la variété $q_c(\theta)$ qui maximise le surplus $\{u(\theta, q)-c(q)\}$. Par souci de simplicité, nous adopterons dans cet article la spécification suivante de ce surplus :

(2) $$u(\theta, q)-c(q)=\theta q-\frac{1}{2}q^2$$

Pour une présentation plus générale du modèle nous renvoyons à CHAMPSAUR-ROCHET [1985].

Un avantage de cette spécification (2) est qu'elle permet d'illustrer simplement comment deux approches traditionnellement distinctes de la différentiation des produits peuvent être traitées dans le même modèle. La première approche est celle de la *différentiation verticale*, où les variétés sont ordonnées de la même manière par tous les consommateurs (si on les vend au même prix). On a l'habitude alors de parler de q comme d'un indice de *qualité*, tous les consommateurs étant d'accord sur le fait qu'un indice q plus élevé indique une meilleure qualité. La spécification adoptée par MUSSA et ROSEN en fournit un exemple simple :

(3) $$u(\theta, q)=\theta q$$

où $\theta \geqslant 0$.

Si l'on complète (3) par une spécification quadratique de la fonction de coût :

(4) $$c(q)=\frac{1}{2}q^2$$

on obtient l'expression du surplus donnée par (2).

La deuxième approche s'intéresse à la *différentiation spatiale* ou plus généralement *horizontale*. Dans cette approche, issue des travaux de HOTELLING, les producteurs et consommateurs sont localisés sur un segment de droite et les paramètres q et θ indiquent alors leurs localisations respectives. Le coût de production unitaire c est le même pour tous les producteurs. En achetant à l'entreprise localisée en q, le consommateur situé en θ doit faire face à un coût de transport égal à $\frac{1}{2}(\theta-q)^2$. En d'autres termes on a :

(5) $$u(\theta, q)=u_0-\frac{1}{2}(\theta-q)^2$$

où u_0 est le prix de réservation brut (coûts de transport non compris) associé au bien considéré, paramètre supposé indépendant de θ. Le surplus associé $\{u(\theta, q)-c\}$ est alors bien, à une constante près, donné là encore par (2). La dénomination de *différentiation horizontale*, un peu plus générale que celle de différentiation spatiale, recouvre exactement les cas où (par opposition avec le cas précédent) les consommateurs ne classent pas les différentes variétés de la même manière si on les vend au même prix.

Dans la mesure où tous nos résultats (dépendant essentiellement de la fonction de surplus) s'appliquent aux deux approches évoquées ci-dessus, la distinction entre différenciations verticale et horizontale ne nous paraît plus devoir être considérée comme fondamentale. Nous conserverons, néanmoins, le vocabulaire plus familier de la différenciation verticale, parlant de q comme d'un indice de qualité. Par contre l'hypothèse cruciale dont nous avons besoin et qui est implicite dans (2), est la robustesse du phénomène de différenciation des produits. Plus précisément, nous nous plaçons dans un contexte où l'organisation efficace de l'économie conduit à allouer des qualités différentes à des consommateurs différents. En d'autres termes la fonction $q_c(\theta)$ est injective. Dans la spécification (2) que nous avons adoptée on a en fait :

(6) $$q_c(\theta)=\theta$$

Dans ce cas particulièrement simple, le paramètre de goût d'un consommateur s'interprète comme l'indice de la qualité qu'il recevrait si l'organisation de l'économie était efficace. Ceci doit être nettement contrasté avec le modèle de GABSZEWICZ et THISSE [1979] (voir également SHAKED-SUTTON [1982] et [1983]) dans lequel l'efficacité requiert que la production soit limitée à une qualité unique. La différenciation des produits est alors introduite par les entreprises dans le seul but de segmenter leur clientèle. Ce type d'hypothèse, que nous appelons différenciation verticale pure, conduit à des résultats assez différents des nôtres (voir par exemple SHAKED-SUTTON [1983]).

Chaque entreprise doit décider de la gamme de qualités qu'elle va offrir (représentée par un sous-ensemble Q de $\mathbb{R}_+$), et de sa politique tarifaire, représentée par une application $\mathbf{p}$ de Q dans $\mathbb{R}_+$, associant un prix à chaque qualité offerte. Un consommateur de caractéristique θ, s'il est client de cette entreprise, choisira une qualité q qui maximise $\{u(\theta, q)-\mathbf{p}(q)\}$ sur Q. Il n'est pas restrictif de supposer que chaque entreprise ne considère que des couples (Q, $\mathbf{p}$) tels qu'un tel maximum existe toujours et tels que chaque qualité dans Q est susceptible d'être choisie par au moins un consommateur.

Cet espace de stratégies n'est pas facile à manipuler. En fait, comme en théorie de la taxation optimale, il convient d'adopter une approche duale, c'est-à-dire de décrire la stratégie d'une entreprise en termes de qualités plutôt que de prix. Introduisons la fonction d'utilité indirecte associée à (Q, $\mathbf{p}$) :

$$V(\theta)=\operatorname*{Max}_{q\in Q}\{u(\theta, q)-\mathbf{p}(q)\}$$

Nous démontrons en annexe le résultat suivant :

LEMME 1 : Soient $\mathbf{q}$ et V deux applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et Q l'image de $\mathbf{q}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists\, \mathbf{p} : Q \to \mathbb{R}$ tel que, pour tout θ :

$$V(\theta)=\operatorname*{Max}_{q\in Q}\{u(\theta, q)-\mathbf{p}(q)\}$$

$$\mathbf{q}(\theta)\in\operatorname*{Arg\,Max}_{q\in Q}\{u(\theta, q)-\mathbf{p}(q)\}$$

(ii) $\mathbf{q}$ est croissante et, pour tout θ :

$$V(\theta) = V(0) + \int_0^\theta \mathbf{q}(s)\,ds.$$

En d'autres termes, une fonction croissante $\mathbf{q} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et un niveau d'utilité indirecte $V(0)$ fournissent une description équivalente des décisions d'une entreprise. L'ensemble Q des qualités offertes est simplement l'image de $\mathbf{q}$ et le barème des prix est défini sans ambigüité par :

$$\mathbf{p}(q) = \theta q - V(0) - \int_0^\theta \mathbf{q}(s)\,ds \tag{7}$$

où θ est tel que $\mathbf{q}(\theta) = q$. Cette représentation duale va se révéler très performante.

Pour terminer, il nous faut introduire la distribution des caractéristiques des consommateurs, que nous supposerons connue de chaque entreprise. Les consommateurs forment un continu et leur paramètre de goût est distribué sur un intervalle $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, en accord avec une densité $f(\theta)$ qui est continûment dérivable et strictement positive sur cet intervalle. Nous noterons F la fonction de répartition associée :

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(s)\,ds \tag{8}$$

avec $F(\theta) = 0$ si $\theta < \underline{\theta}$ et $F(\theta) = 1$ si $\theta > \overline{\theta}$.

3 Le cas d'un monopole

Avant d'envisager le cas d'un duopole, il convient d'examiner la situation d'une entreprise unique. La première analyse convainquante de cette question a été proposée par MUSSA et ROSEN [1978], puis généralisée par MASKIN et RILEY [1984]. Ces auteurs ont mis en lumière l'analogie formelle entre la différenciation des produits et la discrimination par les prix dans le cas d'un produit homogène. Ces deux stratégies, applicables dans des contextes différents, permettent au monopole d'atteindre le même but, à savoir la segmentation de sa clientèle. Cependant, les auteurs cités plus haut ont également montré que la stratégie optimale du monopole ne consistait pas nécessairement à obtenir une segmentation parfaite de sa clientèle. Nous nous proposons ici de compléter cette analyse par un examen plus précis des contraintes qui limitent le pouvoir du monopole.

Jusqu'ici nous avons supposé qu'un consommateur achetait toujours un des produits sur le marché. Une telle hypothèse (prix de réservation infini) permet de simplifier l'analyse dès que l'on s'intéresse à la concurrence par les prix entre plusieurs entreprises. Elle est cependant inadéquate pour analyser la situation d'un monopole, qui pourrait en effet facturer des prix arbitrairement élevés. Il faut donc prendre en compte ce que SALOP [1979] appelle les « biens extérieurs » (outside goods), c'est-à-dire les substituts vers lesquels peuvent se tourner les consommateurs lorsque les prix pratiqués par le monopole sont trop élevés. L'approche de MUSSA-ROSEN [1978] consiste à supposer implicitement que ce substitut est une qualité très basse q_0. Nous allons montrer qu'on obtient des résultats très différents si l'on suppose au contraire que le substitut est une qualité élevée q_∞. Autrement dit, la stratégie optimale de l'entreprise, en termes de prix et de qualités, dépend crucialement du côté de l'échelle des qualités où s'exerce la concurrence.

3.1. Concurrence par le bas

C'est le cas analysé par MUSSA et ROSEN [1978], dans lequel le substitut est une qualité inférieure q_0, vendue à un prix donné p_0. Désignons par $\Delta V(\theta)$ le gain d'utilité du consommateur θ s'il est client du monopole plutôt qu'acheteur du substitut :

$$(9) \qquad \Delta V(\theta) = V(\theta) - [\theta q_0 - p_0]$$

Dès que $q_0 < \mathbf{q}(\theta)$, ce que nous supposerons, $\Delta V(\theta)$ est croissante. Il existe donc un unique $\hat{\theta}$ dans $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ tel que :

$$(10) \qquad \Delta V(\hat{\theta}) = 0$$

avec la convention que :

$$(11) \qquad \begin{cases} \hat{\theta} = \underline{\theta} & \text{si} \quad \Delta V(\theta) > 0 \quad \text{sur } [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \\ \hat{\theta} = \bar{\theta} & \text{si} \quad \Delta V(\theta) < 0 \quad \text{sur } [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \end{cases}$$

La clientèle du monopole est alors représentée par l'intervalle $[\hat{\theta}, \bar{\theta}]$, et sa part de marché vaut $(1 - F(\hat{\theta}))$ [éventuellement 1 ou 0 dans les cas correspondant à (11)]. De toute façon il est clairement optimal pour le monopole de choisir $V(0)$ de telle manière que $\Delta V(\hat{\theta}) = 0$, ce qu'on supposera désormais. Par une adaptation très simple du lemme 1 on obtient :

$$(12) \qquad V(\theta) = [u(\hat{\theta}, q_0) - p_0] + \int_{\hat{\theta}}^{\theta} \mathbf{q}(s)\, ds$$

et donc :

$$(13) \qquad \mathbf{p}(\mathbf{q}(\theta)) = u(\theta, \mathbf{q}(\theta)) + (p_0 - u(\hat{\theta}, q_0)) - \int_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} \mathbf{q}(s)\, ds$$

Le bénéfice de l'entreprise vaut :

$$(14) \qquad B = \int_{\hat{\theta}}^{\bar{\theta}} [\mathbf{p}(\mathbf{q}(\theta)) - c(\mathbf{q}(\theta))]\, f(\theta)\, d\theta$$

ce qui donne, en utilisant (13) et en intégrant par parties :

$$(15) \qquad B=\int_{\hat{\theta}}^{\bar{\theta}} [\varphi(\theta, \mathbf{q}(\theta))-\varphi(\theta, q_0)+p_0-c(q_0)]\, f(\theta)\, d\theta$$

où $\varphi(\theta, q)$ est définie par :

$$(16) \qquad \varphi(\theta, q)=\left(\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}\right)q-\frac{1}{2}q^2$$

Le programme du monopoleur concurrencé par le bas s'écrit alors :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \displaystyle\max_{\theta,\, q(.)} \int_{\hat{\theta}}^{\bar{\theta}} \{\varphi(\theta, \mathbf{q}(\theta))-\varphi(\theta, q_0)+p_0-c(q_0)\}\, f(\theta)\, d\theta \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \mathbf{q}(.) \text{ croissante et } \mathbf{q}(\hat{\theta})\geqslant q_0 \end{cases}$$

φ étant concave par rapport à q, l'optimisation en $\mathbf{q}$ (.) donne :

$$(17) \qquad \mathbf{q}(\theta)=\theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$$

sous réserve que cela définisse une fonction croissante. Si tel n'est pas le cas, MUSSA et ROSEN ont montré que la solution optimale était constante sur certains intervalles, ce qui correspond à une segmentation incomplète du marché. Il est intéressant de remarquer que l'hypothèse de croissance du second membre de (17) permet également d'assurer la quasi-concavité de la fonction objectif de $(\mathscr{P})$ par rapport à la part de marché $(1-F(\hat{\theta}))$. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, la meilleure stratégie du monopole en termes de prix peut très bien être une fonction discontinue de (p_0, q_0) (voir CHAMPSAUR-ROCHET [1985]). Nous ferons donc désormais l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1 : La fonction $\theta \to \theta-\dfrac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ est strictement croissante.

Cette hypothèse, qui équivaut à la convexité de la fonction $\dfrac{1}{1-F(\theta)}$ est vérifiée si la densité $f(\theta)$ ne décroît pas trop lorsque θ augmente. Elle équivaut donc au fait qu'un monopoleur concurrencé par le bas ait intérêt à procéder à une segmentation parfaite de son marché. Dans ce cas, la stratégie du monopoleur est alors exactement donnée par :

$$(17) \qquad q_M(\theta) \overset{(\text{def})}{=} \theta-\frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$$

Remarquons que la gamme des produits proposés par le monopole est un intervalle $Q_M=[q_M(\underline{\theta}), q_M(\bar{\theta})]$. De plus $q_M(\bar{\theta})=q_c(\bar{\theta})$ et $q_M(\theta)<q_c(\theta)$ pour tout $\theta<\bar{\theta}$. En d'autres termes, sous l'influence d'une concurrence par le bas, le monopole est amené à introduire des qualités basses qui n'appartiennent pas à la gamme efficace $Q_c=[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$

3.2. Concurrence par le haut

La description de ce cas sera exactement symétrique. Soit le substitut de qualité élevée q_∞ vendu au prix p_∞. En modifiant simplement l'analyse précédente on obtient le programme du monopole concurrencé par le haut :

$$(\mathscr{P}')\begin{cases} \underset{\hat\theta,\, \mathbf{q}(.)}{\text{Max}} \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\hat\theta} \{\Psi(\theta, \mathbf{q}(\theta)) - \Psi(\theta, q_\infty) + p_\infty - c(q_\infty)\}\, f(\theta)\, d\theta \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \mathbf{q}(.) \text{ croissante,} \qquad \mathbf{q}(\hat\theta) \leqslant q_\infty \end{cases}$$

Ici la clientèle du monopole correspond à l'intervalle $[\underline{\theta}, \hat\theta]$, sa part de marché vaut $F(\hat\theta)$ et la fonction Ψ est définie par :

$$\Psi(\theta, q) = \left(\theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)}\right) q - \frac{1}{2} q^2 \tag{19}$$

Par analogie avec l'hypothèse 1 nous introduisons :

Hypothèse 2 : la fonction $\theta \to \theta + \dfrac{F(\theta)}{f(\theta)}$ est strictement croissante.

Cette hypothèse, qui équivaut à la convexité de la fonction $\dfrac{1}{F(\theta)}$, est vérifiée si la densité $f(\theta)$ ne croît pas trop avec θ. Elle équivaut au fait qu'un monopoleur concurrencé par le haut ait intérêt à procéder à une segmentation complète de son marché. Dans ce cas sa stratégie est alors exactement donnée par :

$$q^M(\theta) \overset{\text{(def)}}{=} \theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)} \tag{20}$$

Dans ce cas également, la gamme des produits proposés par le monopole est un intervalle $Q^M = [q^M(\underline{\theta}), q^M(\bar\theta)]$ plus grand que Q_c. Cependant ici, sous l'influence d'une concurrence par le haut, l'élargissement de la gamme des qualités offertes correspond à l'introduction de qualités élevées. Notons enfin la relation suivante, dont on verra l'importance par la suite :

$$\forall\, \theta \in]\underline{\theta}, \bar\theta[, \quad q_M(\theta) < q_c(\theta) < q^M(\theta) \tag{21}$$

4 Concurrence par les prix dans le cas de deux entreprises

Plaçons-nous maintenant dans le cadre d'un duopole : les entreprises seront repérées par un indice $i = 1, 2$. L'approche habituelle consiste à adopter la formulation d'un jeu non coopératif en deux étapes. En effet, alors qu'un changement de stratégie de prix peut être presque instantané, toute modification de la gamme des produits offerts est plus lente et plus coûteuse. Par conséquent, quand une entreprise choisit son barême tarifaire p_i, elle prend comme données les gammes de qualités offertes, y compris par elle-même. A tout couple (Q_1, Q_2) de gammes de qualités on peut donc associer un jeu de prix $G(Q_1, Q_2)$. Si ce jeu a un équilibre de NASH unique, on note $B_1(Q_1, Q_2)$ et $B_2(Q_1, Q_2)$ les bénéfices correspondants des deux entreprises. Ces deux fonctions définissent alors un jeu non coopératif où la stratégie d'une entreprise est la gamme de qualités qu'elle choisit de mettre sur le marché.

La résolution complète du jeu $G(Q_1, Q_2)$ pour des Q_1 et Q_2 arbitraires serait extrêmement délicate. Nous adopterons l'hypothèse simplificatrice que Q_1 et Q_2 sont des intervalles $Q_1=[q_1^-, q_1]$ et $Q_2=[q_2, q_2^+]$ avec, par convention $q_1^- < q_2$. Nous étudierons dans un premier temps le cas d'intervalles disjoints $(q_1 < q_2)$, puis le cas d'intervalles se recouvrant partiellement $(q_1 \geqslant q_2)$, en montrant la continuité des fonctions $B_i(Q_1, Q_2)$ au passage par $q_1 = q_2$. L'étude de ces deux fonctions nous permettra de mettre en évidence dans la partie 4 quelques propriétés importantes du jeu de qualités.

4.1. Le cas d'intervalles disjoints

Soient donc $Q_1=[q_1^-, q_1]$ et $Q_2=[q_2, q_2^+]$ avec $q_1 < q_2$. Confronté avec les deux barèmes $\mathbf{p}_1$ sur Q_1 et $\mathbf{p}_2$ sur Q_2, le consommateur θ choisit une qualité lui donnant un niveau d'utilité indirect maximum $V(\theta)$. Afin de préciser comment $V(\theta)$ est relié aux stratégies des deux entreprises, notons $V_i(\theta)$ le surplus qu'atteindrait le consommateur s'il était un client forcé de l'entreprise i :

$$V_i(\theta) = \underset{q \in Q_i}{\mathrm{Max}} \{ u(\theta, q_i) - \mathbf{p}_i(q_i) \}$$

Soit $\mathbf{q}_i(\theta)$ la qualité correspondante choisie par θ. Comme $\mathbf{q}_i(\theta)$ appartient par définition à Q_i, on a pour tout θ :

$$\mathbf{q}_1(\theta) < \mathbf{q}_2(\theta) \tag{22}$$

D'autre part, en adaptant le lemme 1 on prouve facilement que $V_i(\theta)$ est presque partout différentiable et qu'alors :

$$V_i'(\theta) = \mathbf{q}_i(\theta), \qquad i = 1, 2 \tag{23}$$

On en déduit immédiatement que $\{V_2(\theta) - V_1(\theta)\}$ est une fonction strictement croissante de θ et donc qu'il existe un $\hat{\theta}$ unique tel que :

$$V_2(\hat{\theta}) = V_1(\hat{\theta}) \tag{24}$$

avec la convention

$$\hat{\theta} = \underline{\theta} \quad \text{si } V_2(\theta) > V_1(\theta), \qquad \forall\, \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

$$\hat{\theta} = \bar{\theta} \quad \text{si } V_1(\theta) > V_2(\theta), \qquad \forall\, \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$$

Le partage du marché entre les deux entreprises est alors défini par $\hat{\theta}$ avec :

$$\forall \theta \in]\underline{\theta}, \hat{\theta}], \quad V_1(\theta) \geqslant V_2(\theta) \text{ (clients de 1)}$$

$$\forall \theta \in [\hat{\theta}, \bar{\theta}[, \quad V_2(\theta) \geqslant V_1(\theta) \text{ (clients de 2)}$$

Finalement on a : $\forall \theta$, $V(\theta) = \text{Sup}\{V_1(\theta), V_2(\theta)\}$.

La politique de prix de son concurrent étant fixée, le choix stratégique d'une entreprise peut être représenté par une fonction $\mathbf{q}_i : \mathbb{R}_+ \to Q_i$ (qu'on appellera stratégie de vente) et un niveau d'utilité $V_i(0)$, ou ce qui revient au même, une valeur $\hat{\theta}$ du consommateur indifférent entre les deux entreprises. Par une adaptation facile des arguments de la section 2 on obtient la meilleure réponse $\mathbf{q}_2^*$ de l'entreprise 2 à une stratégie donnée de 1 comme la solution du programme suivant :

$$(\mathscr{P}_2) \quad \left| \begin{array}{l} \underset{\theta,\, q_2(.)}{\text{Max}}\ B_2 = \displaystyle\int_{\hat{\theta}}^{\bar{\theta}} \{\varphi(\theta, \mathbf{q}_2(\theta)) - \varphi(\theta, \mathbf{q}_1(\hat{\theta})) \\ \qquad\qquad + p_1(\mathbf{q}_1(\hat{\theta})) - c(\mathbf{q}_1(\hat{\theta}))\}\, f(\theta)\, d\theta \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \mathbf{q}_2(.) \text{ croissante, } \forall \theta \in [\hat{\theta}, \bar{\theta}],\ \mathbf{q}_2(\theta) \in Q_2 \end{array} \right.$$

Mis à part la contrainte que $q_2(\theta)$ doit appartenir à Q_2, on retrouve le programme définissant la stratégie optimale q_M du monopole concurrencé par le bas. La stratégie de vente optimale $\mathbf{q}_2^*$ se déduit donc facilement de q_M :

Proposition 2 : Sous l'hypothèse 1, la meilleure stratégie de vente de l'entreprise 2 est définie par :

$$\mathbf{q}_2^*(\theta) = \text{Proj}_{Q_2}(q_M(\theta)) \tag{25}$$

N.B. : Si $Q = [a, b]$ est un intervalle et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$\begin{aligned} \text{Proj}_Q(x) &= x \quad \text{si} \quad x \in Q \\ &= a \quad \text{si} \quad x < a \\ &= b \quad \text{si} \quad x > b \end{aligned}$$

Remarquons que la stratégie de vente optimale de l'entreprise 2, que nous notons $\mathbf{q}_2^*(.)$, ne dépend pas de la stratégie de l'entreprise 1. L'interaction entre les stratégies des deux entreprises se fait uniquement par l'intermédiaire de $\hat{\theta}$ et donc du niveau général des prix des qualités de la gamme Q_2 par rapport à ceux des qualités de la gamme Q_1. Par contre les prix relatifs dans chacune des gammes sont toujours les mêmes, donnés implicitement par (25) et son équivalent pour l'entreprise 1 (cf. Proposition 2).

La maximisation de B_2 par rapport à $\hat{\theta}$ donne :

$$p_2(q_2^*(\hat{\theta})) = c(\mathbf{q}_2^*(\hat{\theta})) + (\mathbf{q}_2^*(\hat{\theta}) - q_1(\hat{\theta}))\frac{1 - F(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

De la même manière, la stratégie optimale de l'entreprise 1 correspond à la solution du programme suivant :

$$(26)\quad (\mathscr{P}_1)\begin{cases} \underset{\theta,\, \mathbf{q}_1(.)}{\operatorname{Max}} \mathrm{B}_1 = \displaystyle\int_{\underline{\theta}}^{\theta} \{\Psi(\theta, \mathbf{q}_1(\theta) - \Psi(\theta, \mathbf{q}_2(\hat{\theta})) \\ \qquad\qquad + p_2(\mathbf{q}_2(\hat{\theta})) - c(\mathbf{q}_2(\hat{\theta}))\}\, f(\theta)\, d\theta \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad \mathbf{q}_1(.) \text{ croissante}, \forall\, \theta \in [\underline{\theta}, \hat{\theta}], \mathbf{q}_1(\theta) \in \mathrm{Q}_1 \end{cases}$$

PROPOSITION 3 : Sous l'hypothèse 2, la meilleure stratégie de vente de l'entreprise 1 est définie par :

$$(27)\qquad \mathbf{q}_1^*(\theta) = \operatorname{proj}_{\mathrm{Q}_1}(q^{\mathrm{M}}(\theta))$$

Le choix de la part de marché optimale pour l'entreprise 1 correspond à

$$(28)\qquad p_1(\mathbf{q}_1^*(\hat{\theta})) = c(\mathbf{q}_1^*(\hat{\theta})) + (\mathbf{q}_2(\hat{\theta}) - \mathbf{q}_1^*(\hat{\theta}))\frac{\mathrm{F}(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

L'équilibre de NASH en prix dans $\mathrm{G}(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2)$ est alors caractérisé par les équations 25 à 28. Si l'on désigne par q_1^* et q_2^* respectivement $\mathbf{q}_1^*(\hat{\theta})$ et $\mathbf{q}_2^*(\hat{\theta})$ ces équations s'écrivent :

$$(27)\qquad \mathbf{q}_1^*(\theta) = \operatorname{Proj}_{\mathrm{Q}_1}(q^{\mathrm{M}}(\theta))$$

$$(25)\qquad \mathbf{q}_2^*(\theta) = \operatorname{Proj}_{\mathrm{Q}_2}(q_{\mathrm{M}}(\theta))$$

$$(28)\qquad \mathbf{p}_1(q_1^*) = c(q_1^*) + (q_2^* - q_1^*)\frac{\mathrm{F}(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

$$(26)\qquad \mathbf{p}_2(q_2^*) = c(q_2^*) + (q_2^* - q_1^*)\frac{1 - \mathrm{F}(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

Une conséquence importante de ces équations est que les parts de marché à l'équilibre, ainsi que les prix des qualités limites q_1^* et q_2^* ne dépendent que de ces qualités limites et non pas de la largeur des gammes Q_1 et Q_2 (c'est-à-dire de q_1^- et q_2^+). Qu'une entreprise offre une seule qualité ou au contraire une gamme très large ne modifie en rien son comportement au voisinage de $\hat{\theta}$.

Une autre propriété importante d'un équilibre de NASH où les deux entreprises sont actives est que $q_1^* = q_1$ et $q_2^* = q_2$ c'est-à-dire que ces deux qualités limites sont effectivement achetées par des consommateurs. De plus il y a toujours segmentation incomplète du marché alors même que nous l'avons exclue explicitement dans les cas de la concurrence et du monopole (par 1 et 2). Désignons par θ_1 (resp. θ_2) le consommateur au paramètres le plus bas (resp. le plus haut) qui achète la qualité q_1 (resp. q_2). On a alors :

PROPOSITION 4 : Sous les hypothèses 1 et 2, en un équilibre de NASH en prix on a

$$q_1^* = q_1, \qquad q_2^* = q_2 \qquad \text{et} \qquad \theta_1 < \hat{\theta} < \theta_2.$$

Des propositions 1, 2 et 3 on déduit le résultat d'existence suivant :

PROPOSITION 5 : Sous les hypothèses 1 et 2 et si $q_1 < q_2$, il existe un équilibre de NASH dans $G(Q_1, Q_2)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux entreprises soient actives à l'équilibre est :

$$\underline{\theta} - \frac{1}{f(\underline{\theta})} < \frac{1}{2}(q_1 + q_2) < \bar{\theta} + \frac{1}{f(\bar{\theta})} \tag{29}$$

Dans ce cas, l'équilibre est unique.

4.2. Le cas d'intervalles adjacents ou se recouvrant

Considérons d'abord le cas où $q_1 = q_2$, correspondant à Q_1 et Q_2 adjacents. Les formules caractérisant l'équilibre de NASH s'obtiennent alors par prolongement continu des des formules de la question précédente :

$$\mathbf{q}_1^*(\theta) = \mathrm{Proj}_{Q_1}(q^M(\theta)) \tag{27}$$

$$\mathbf{q}_2^*(\theta) = \mathrm{Proj}_{Q_2}(q_M(\theta)) \tag{25}$$

$$\mathbf{p}_1(q_1) = c(q_1) \tag{28 bis}$$

$$\mathbf{p}_2(q_2) = c(\mathrm{q}_2). \tag{26 bis}$$

De même on obtient le résultat d'existence suivant :

PROPOSITION 5 *bis* : Sous les hypothèses 1 et 2 et si $q_1 = q_2 = q$, il existe un équilibre de NASH dans $G(Q_1, Q_2)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux entreprises soient actives à l'équilibre est :

$$\underline{\theta} - \frac{1}{f(\underline{\theta})} < q < \bar{\theta} + \frac{1}{f(\bar{\theta})}. \tag{29 bis}$$

Dans ce cas, l'équilibre est unique.

Cette propriété de continuité de l'équilibre de NASH quand $q_1 \to q_2$ sera cruciale pour obtenir les résultats de la partie 5. On peut noter qu'elle s'applique en particulier au cas où chaque entreprise ne produit qu'une qualité. Les propositions 5 et 5 *bis* peuvent donc être vues comme des extensions naturelles des résultats d'existence obtenus par d'ASPREMONT-GABSZEWICZ et THISSE [1979] dans un contexte de différentiation spatiale. Le problème de non-existence de l'équilibre dans la spécification originale de HOTELLING doit être attribué à la non-différentiabilité de la fonction de coût de transport (voir aussi MCLEOD [1983]). Signalons pour terminer que quand les conditions (29) ou (29 *bis*) ne sont pas vérifiées alors une seule entreprise est active à l'équilibre. Il peut d'ailleurs y avoir plusieurs équilibres mais dans ce cas là un de ces équilibres domine les autres au sens du critère de PARETO. Nous parlerons donc de « quasi-unicité » de l'équilibre de NASH en prix.

Considérons pour terminer le cas d'intervalles se recouvrant strictement ($q_1 > q_2$). Par un argument à la BERTRAND, on voit immédiatement que toutes les qualités appartenant aux gammes proposées par les deux entreprises, soit l'ensemble $[q_2, q_1]$, seront vendues à leur coût. On prouve alors facilement l'existence d'une infinité d'équilibres de NASH, donnant tous le même vecteur de paiements. L'un d'entre eux est par exemple caractérisé par :

(27 *bis*) $\quad \mathbf{q}_1^*(\theta) = \mathrm{Proj}_{[q_1^-,\ q_2]}(q^M(\theta))$

(25 bis) $\quad \mathbf{q}_2^*(\theta) = \mathrm{Proj}_{[q_1,\ q_2^+]}(q_M(\theta))$

(28 *ter*) $\quad \mathbf{p}_1(q_2) = c(q_2)$

(26 *ter*) $\quad \mathbf{p}_2(q_1) = c(q_1)$

5 Le jeu de qualités

Les propositions 5 et 5 *bis* montrent, sous les hypothèses 1 et 2, l'existence et la quasi unicité d'un équilibre de NASH dans le jeu de prix $G(Q_1, Q_2)$, quand Q_1 et Q_2 sont des intervalles.

Sans ces hypothèses, le mieux que l'on puisse espérer est un équilibre en stratégies mixtes. De la même manière, si aucune restriction n'est plus mise sur Q_1 et Q_2, la résolution de l'équilibre pour le duopole présente la même, très grande, difficulté que celle de l'équilibre pour un nombre quelconque d'entreprises. L'unicité de l'équilibre même demande un léger renforcement de 1 et 2. Nous nous limiterons ici à un examen de deux propriétés intéressantes du jeu de qualités limité au cas où Q_1 et Q_2 sont des intervalles.

PROPOSITION 6 : Sous l'hypothèse ci-dessus, on désigne par $B_i(Q_1, Q_2)$, $i=1, 2$, le bénéfice de l'entreprise i à l'équilibre de $G(Q_1, Q_2)$. On a la formule de décomposition suivante :

(30) $$B_1(Q_1, Q_2) = B_1(Q_1, [q_1, +\infty]) + B_1(\{q_1\}, \{q_2\})$$

(31) $$B_2(Q_1, Q_2) = B_2(]-\infty, q_2], Q_2) + B_2(\{q_1\}, \{q_2\})$$

Démonstration : on reporte (26) et (28) dans les formules donnant B_1 et B_2 et on intègre par parties. □

Le premier terme de chaque formule est indépendant de la stratégie adoptée par l'entreprise concurrente. Par exemple pour l'entreprise 1, ce premier terme est égal au profit maximal qu'elle pourrait atteindre si l'entreprise 2 était exactement contiguë dans l'échelle des qualités. Par un calcul immédiat on obtient :

(32) $$B_1(Q_1, [q_1, +\infty[) = \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \{\Psi(\theta, \mathbf{q}_1(\theta)) - \Psi(\theta, q_1)\} f(\theta) d\theta.$$

Cette intégrale correspond au surplus prélevé sur les consommateurs de la partie inférieure du marché ($[\theta, \theta_1]$), partie dans laquelle la segmentation apparaît. Nous appellerons ce terme « *profit de segmentation* » : il correspond à la partie du marché sur laquelle l'entreprise 1 jouit d'un pouvoir de monopole local. Une interprétation similaire s'applique au terme $B_2(]-\infty, q_2], Q_2)$ pour l'entreprise 2 :

(33) $$B_2(]-\infty, q_2], Q_2) = \int_{\theta_2}^{\bar{\theta}} \{\varphi(\theta, \mathbf{q}_2(\theta)) - \varphi(\theta, q_2)\} f(\theta) d\theta$$

Le second terme dans le membre de droite des formules (30) et (31) correspond aux bénéfices à l'équilibre dans le jeu $G(\langle q_1\}, \{q_2\})$:

$$(34) \qquad B_1(\{q_1\}, \{q_2\})=(q_2-q_1)\frac{F^2(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

$$(35) \qquad B_2(\{q_1\}, \{q_2\})=(q_2-q_1)\frac{(1-F(\hat{\theta}))^2}{f(\hat{\theta})}.$$

Nous appellerons ce terme « *profit de différentiation* ». Remarquons qu'il est nul quand $q_1=q_2$. Il correspond au surplus prélevé sur les deux groupes de consommateurs médians $[\theta_1, \hat{\theta}]$ et $[\hat{\theta}, \theta_2]$. D'après la proposition 6, toute l'interaction entre les deux entreprises est réalisée par l'intermédiaire de ce terme.

Le profit de segmentation de l'entreprise 1 (resp. 2) est clairement décroissant (resp. croissant) par rapport à q_1^- (resp. q_2^+). En d'autres termes, il n'est jamais dans l'intérêt d'une entreprise de réduire *a priori* la gamme de qualités qu'elle offre du côté où elle bénéficie d'un pouvoir de monopole local. Par conséquent on pourra prendre sans perte de généralité $q_1^-=-\infty$ et $q_2^+=+\infty$ pour le reste de notre analyse. Il faut bien sûr distinguer les qualités offertes des qualités effectivement vendues : si par exemple $q_1 \leqslant q^m(\underline{\theta})$, seule la qualité q_1 sera vendue alors que toute la gamme $]-\infty, q_1]$ est offerte. Remarquons d'ailleurs que les qualités qui sont offertes mais non vendues peuvent néanmoins jouer un rôle stratégique dans la mesure où elles découragent l'entreprise concurrente d'occuper ce créneau.

En ce qui concerne les choix de q_1 et q_2, l'analyse est plus complexe. Les bénéfices des deux entreprises sont influencés par deux phénomènes contradictoires. Prenons l'exemple de l'entreprise 1 : sont profit de segmentation est clairement croissant avec q_1 dans la mesure où une gamme de produits plus large permet une segmentation plus fine. Cependant si q_1 se rapproche de q_2, le profit de différentiation diminue. La propagation ci-dessous montre que le deuxième effet domine au voisinage de $q_1=q_2$.

PROPOSITION 7 : Si $q_2<q^M(\bar{\theta})$, l'entreprise 1 n'a jamais intérêt à choisir $q_1=q_2$. De même si $q_1>q_M(\underline{\theta})$, l'entreprise 2 n'a jamais intérêt à choisir $q_1=q_2$.

Autrement dit, hormis les cas où l'une des entreprises exerce un pouvoir de monopole [ce qui arrive si $q_2>q^M(\bar{\theta})$ ou $q_1\leqslant q^M(\underline{\theta})$], chaque duopoleur a intérêt à s'écarter un minimum de la gamme offerte par son concurrent. D'une manière plus concise on peut dire que l'incitation chamberlinienne à la différentiation domine pour les qualités intermédiaires.

6 Le cas de la distribution uniforme des caractéristiques

Nous terminerons cet article par une analyse plus détaillée d'un cas particulier, celui où les consommateurs sont uniformément répartis sur l'intervalle $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$:

$$\begin{cases} f(\theta) = 1/(\bar\theta - \underline\theta) & \text{si} \quad \theta \in [\underline\theta, \bar\theta] \\ \qquad = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette hypothèse supplémentaire (qui implique bien sûr 2 et 3) nous permet d'obtenir deux résultats plus précis, que nous donnerons sans démonstration :

> Proposition 8 : Si $\bar\theta < 9/5\,(\underline\theta)$, il existe un unique équilibre de Nash en qualités où les deux entreprises ont un bénéfice strictement positif. Les qualités limites correspondantes valent respectivement :
>
> $$q_1 = \underline\theta - 1/4\,(\bar\theta - \underline\theta) \qquad et \qquad q_2 = \bar\theta + 1/4\,(\bar\theta - \underline\theta)$$
>
> En particulier, comme q_1 et q_2 n'appartiennent pas à la gamme efficace $[\underline\theta, \bar\theta]$, chaque entreprise ne produit effectivement qu'une seule qualité.

Nous avons donc un exemple où l'incitation chamberlinienne à la différentiation est si forte que toute segmentation disparaît à l'équilibre. On aboutit au résultat paradoxal que chaque entreprise ne produit effectivement qu'une qualité même si elle a *a priori* la possibilité d'en produire toute une gamme sans coût supplémentaire.

Le résultat suivant suggère que la restriction des gammes offertes à des intervalles n'est peut-être pas très gênante. Nous analysons le cas un peu particulier où l'entreprise 2 ne peut produire qu'une qualité q_2, alors que l'entreprise 1 peut en produire deux, q_1 inférieure à q_2 et q_3 supérieure à q_2.

> Proposition 9 : Il n'existe pas d'équilibre en qualités où les trois qualités q_1, q_2, q_3 ont une part de marché positive.

Si la proposition 11 reste vraie quand quand on remplace chaque qualité par un intervalle, alors on aura montré que l'équilibre en qualités, s'il existe, est tel que chaque entreprise propose une gamme connexe de qualités. Il y a donc spécialisation sur chacune des extrémités du marché plutôt qu'interpénétration des gammes.

ANNEXE

Démonstrations

Lemme 1 :
(i) $\Rightarrow$ (ii).

Par linéarité de l'application $\theta \to u(\theta, q) - \mathbf{p}(q)$, V est une fonction convexe, comme suprémum de fonctions linéaires. En particulier, V est absolument continue. D'autre part, pour tout θ' :

$$V'(\theta') \geqslant \theta' \mathbf{q}(\theta) - \mathbf{p}(\mathbf{q}(\theta)) = V(\theta) + (\theta' - \theta)\,\mathbf{q}(\theta)$$

ce qui implique, pour presque tout :

$$V'(\theta) = \mathbf{q}(\theta).$$

En particulier, q est une fonction croissante.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

On pose

$$Q = \mathrm{Im}(\mathbf{q}) \qquad et \qquad \mathbf{p} : Q \to \mathbb{R}$$

204

$$q \to u(\theta, q) - V(\theta),$$

où θ est tel que $\mathbf{q}(\theta) = q$. Il est facile de voir que $\mathbf{p}(q)$ est défini sans ambiguïté :

$$q = \mathbf{q}(\theta) = \mathbf{q}(\theta') \quad \Rightarrow \quad V(\theta) - V(\theta') = \int_{\theta'}^{\theta} \mathbf{q}(s)\, ds = (\theta - \theta')\, q.$$

D'autre part, par croissance de $\mathbf{q}$, on a pour tout θ, θ' :

$$V(\theta) - [u(\theta, \mathbf{q}(\theta')) - \mathbf{p}(\mathbf{q}(\theta'))] = V(\theta) - V(\theta') - (\theta - \theta')\, q(\theta') \geqslant 0 \qquad \square$$

Proposition 4 : Les équations définissant q_1^*, q_2^*, θ_1 et θ_2 sont :

$$q_1^* = \mathrm{Min}(q_1, q^M(\hat{\theta}))$$
$$q_2^* = \mathrm{Max}(q_2, q_M(\hat{\theta}))$$
$$q_1 = \theta_1 + \frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)}$$
$$q_2 = \theta_2 - \frac{1 - F(\theta_2)}{f(\theta_2)}.$$

D'autre part,

$$V_1(\hat{\theta}) = u(\hat{\theta}, q_1^*) - \mathbf{p}_1(q_1^*) = V_2(\hat{\theta}) = u(\hat{\theta}, q_2^*) - \mathbf{p}_2(q_2^*).$$

En combinant l'équation ci-dessus avec (26) et (27), on obtient :

$$\Psi(\hat{\theta}, q_2^*) - \Psi(\hat{\theta}, q_1^*) = (q_2^* - q_1^*) \frac{1 - F(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

or par stricte concavité de Ψ

$$\Psi_2(\hat{\theta}, q_1^*) = \mathrm{Sup}\{\Psi_2(\hat{\theta}, q_1), 0\} > \frac{\Psi(\hat{\theta}, q_2^*) - \Psi(\hat{\theta}, q_1^*)}{q_2^* - q_1^*}$$

qui est positif par l'équation précédente.

On en déduit :

$$\Psi_2(\hat{\theta}, q_1^*) > 0$$

ce qui implique

$$q_1^* = q_1 \qquad et \qquad \theta_1 < \hat{\theta}. \qquad \square$$

La démonstration que $q_2^* = q_2$ et $\hat{\theta} < \theta_2$ est exactement semblable.

Avant de démontrer la proposition 5, nous avons besoin du :

Lemme 12 : Soit $\Gamma(\theta)$ défini par : $\Gamma(\theta) = \theta + \dfrac{2F(\theta) - 1}{f(\theta)}$; les hypothèses 1 et 2 impliquent que Γ est strictement croissante.

Démonstration :

$$\Gamma'(\theta)=3-\frac{(2F(\theta)-1)\,f'(\theta)}{f^2(\theta)}$$

or,

$$\text{hypothèse 1} \quad \Rightarrow \quad 2+\frac{(1-F)\,f'}{f^2}>0 \qquad \text{soit} \quad \frac{f'}{f^2}>-\frac{2}{1-F}$$

$$\text{hypothèse 2} \quad \Rightarrow \quad 2-\frac{F\,f'}{f'}>0 \qquad \text{soit} \quad \frac{f'}{f^2}<\frac{2}{F}.$$

1er *cas :* Si $2F-1\geqslant 0$, alors $\Gamma'>3-2\frac{2F-1}{F}=\frac{2-F}{F}>0$

2e *cas :* Si $2F-1<0$; alors $\Gamma'>3+2\frac{2F-1}{1-F}=\frac{1+F}{1-F}>0.$ □

Proposition 5 : L'équilibre de Nash, s'il existe, est déterminé par les équations :

$$\mathbf{q}_1^*(\theta)=\mathrm{Proj}_{Q_1}\,q^M(\theta)$$

$$\mathbf{q}_2^*(\theta)=\mathrm{Proj}_{Q_2}\,q^M(\theta)$$

$$\mathbf{p}_1(q_1)=c(q_1)+(q_2-q_1)\frac{F(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

$$\mathbf{p}_2(q_2)=c(q_2)+(q_2-q_1)\frac{1-F(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

$$u(\hat{\theta},\,q_2)-u(\hat{\theta},\,q_1)=\mathbf{p}_2(q_2)-\mathbf{p}_1(q_1).$$

On en déduit :

$$\frac{[u(\hat{\theta},\,q_2)-c(q_2)-(u(\hat{\theta},\,q_1)-c(q_1))]}{q_2-q_1}=\frac{1-2F(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}.$$

Soit

$$\frac{1}{2}(q_1+q_2)=\Gamma(\hat{\theta})$$

qui a donc une solution unique dans $]\underline{\theta},\,\overline{\theta}[$ dès que

$$\Gamma(\underline{\theta})=\underline{\theta}-\frac{1}{f(\underline{\theta})}<\frac{1}{2}(q_1+q_2)$$

et

$$\Gamma(\overline{\theta})=\overline{\theta}\frac{1}{f(\overline{\theta})}>\frac{1}{2}(q_1+q_2).$$

Si tel n'est pas le cas, on montre facilement l'existence d'un équilibre avec une seule entreprise sur le marché. Cet équilibre n'est plus alors unique. □

PROPOSITION 5 *bis* : Le seul cas problématique est celui où $q_1 = q_2 = q$ est effectivement vendue par les deux entreprises. Dans ce cas, il est facile de voir, par un argument à la Bertrand, que $p_1(q_1) = p_2(q_2) = c(q)$.

Le calcul des meilleures réponses de chacune des entreprises est alors le même que dans le cas précédent avec la seule différence que $\hat{\theta}$, alors indéterminé, ne joue pas de rôle et que la décision porte sur θ_1 et θ_2. On peut donc définir $\hat{\theta}$ par :

$$\hat{\theta} + \frac{2F(\hat{\theta}) - 1}{f(\hat{\theta})} = q.$$

Dans ce cas, les formules donnant l'équilibre se prolongent par continuité au cas $q_1 = q_2 = q$. □

PROPOSITION 6 : Posons, pour simplifier les notations :

$$B_1(q_1, q_2) = B_1(]-\infty, q_1], [q_2, +\infty[).$$

Il nous suffit de montrer que :

$$\Delta = \lim_{q_1 \to q_2} \frac{B_1(q_1, q_2) - B_1(q_2, q_2)}{q_1 - q_2} < 0.$$

D'après (30), (32) et (34), cette limite vaut :

$$\Delta = \int_{\underline{\theta}}^{\theta_1} \Psi_2(\theta, q_2) f(\theta) d\theta - \frac{F^2(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

or :

$$\Psi_2(\theta, q_2) f(\theta) = (\theta - q_2) f(\theta) + F(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}[(\theta - q_2) F(\theta)]$$

$$\Delta = (\theta_1 - q_2) F(\theta_1) - \frac{F^2(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})}$$

or :

$$q_2 = \theta_1 + \frac{F(\theta_1)}{f(\theta_1)}$$

d'où

$$\Delta = \frac{F^2(\theta_1)}{f(\theta_1)} - \frac{F^2(\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})} < 0$$

car

$$\left(\frac{F^2}{f}\right)' = F\left(2 - \frac{E f'}{f^2}\right) > 0 \quad \text{(par hypothèse 2) et } \hat{\theta} > \theta_1. \quad \square$$

• Références bibliographiques

D'Aspremont, C., Jaskold Gabszewicz J. et Thisse, J.-F. (1979). – « On Hotelling's Stability in Competition », *Econometrica*, 47, p. 1145-1150.

Champsaur, P. et Rochet, J.-C. (1984). – « Existence of an Equilibrium in a Differentiated Industry », *mimeo*, INSEE.

Champsaur, P. et Rochet, J.-C. (1985). – « Product Differentiation and Duopoly », *Cahier du Laboratoire d'Econométrie de l'E.P.*, n° A27507.

Dixit, A. K. et Stiglitz, J. E. (1977). – « Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity », *American Economic Review*, 67, (3), p. 297-308.

Dixit, A. K. (1979). – « Quality and Quantity Competititon », *Review of Economic Studies*, 46, (4), p. 587-599.

Economides, N. S. (1983). – « Existence of Equilibrium in Quality Competition », *Discussion Paper*, n° 199, Columbia University.

Gal-Or, E. (1983). – « Quality and Quantity Competition », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 14, n° 2, p. 590-600.

Grossman, S. et Hart, O. (1981). – « Implicit Contracts, Moral Hazard and Unemployment », *American Economic Review*, 71, p. 301-307.

Hotelling, H. (1929). – « Stability in Competition », *Economic Journal*, 39, p. 41-57.

Jaskold Gabszewicz, J. et Thisse, J.-F. (1979). – « Price Competition, Quality and Income Disparities », *Journal of Economic Theory*, 20, p. 340-359.

Jaskold Gabszewicz, J. et Thisse, J.-F. (1980). – « Entry (and Exit) in a Differentiated Industry », *Journal of Economic Theory*, 22, p. 327-338.

Jaskold Gabszewicz, J., Shaked, A., Sutton, J. et Thisse, J.-F. (1982). – « Segmenting the Market : The Monopolist's Optimal Product Mix », CORE *Discussion Paper*, n° 8242, Université Catholique de Louvain.

Mac Leod, W. B. (1983). « On the Non-Existence of Equilibria in Differentiated Product Models », CORE *Discussion Paper*, n° 8338, Université Catholique de Louvain.

Maskin, E. et Riley, J. (1984). – « Monopoly with Incomplete Information », *The Rand Journal of Economics*, 15, n° 2, p. 171-196.

Mussa, M. et Rosen, S. (1978). – « Monopoly and Product Quality », *Journal of Economic Theory*, 18, p. 301-317.

Phlips, L. et Schuler, R. E. (1981). – « Product Selection and Price Discrimination », CORE *Discussion paper* n° 8126, Université Catholique de Louvain.

Salop, S. (1979). – « Monopolistic Competition with Outride Goods », *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 10, 1, p. 141-156.

Selten, R. (1975). – « Re-examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games », *International Journal of Game Theory*, 4, p. 25-55.

Shaked, A. et Sutton, J. (1982). – « Relaxing Price Competition Through Product Differentiation », *Review of Economic Studies*, 44, p. 3-13.

Shaked, A. et Sutton, J. (1983). – « Natural Oligopolies », *Econometrica*, 51, p. 1469-1983.

Spence, A. M. (1976). – « Product Selection, Fixed Costs and Monopolistic Competition », *Review of Economic Studies*, 43, p. 217-235.

Walras, L. (1875). – « The State and the Railways », *Journal of Public Economics*, 13, (1980), p. 81-100.