ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 1-1986

La logique des systèmes bonus-malus en assurance automobile : une approche théorique

Dominique HENRIET, Jean-Charles ROCHET *

RÉSUMÉ. – On peut trouver deux justifications à l'emploi de tarifs de type « Bonus-Malus » en assurance automobile. La première concerne la sélection de risques, la seconde fait référence à l'incitation à la prudence au volant. Sur un modèle de base commun aux deux approches, il apparaît que la conception des clauses de bonus-malus doit être radicalement différente selon que l'on privilégie l'un ou l'autre des objectifs. Du point de vue de la sélection, seule la fréquence empirique des accidents passés est pertinente; au contraire, si l'on désire inciter à la prudence, leur répartition dans le temps doit intervenir dans le calcul de la prime. Au vu des résultats théoriques, les clauses françaises de 1976 et 1984 sont enfin mises en perspective.

The Logic of the System of Bonuses and Penalties in Automobile Insurance: A Theoretical Approach

ABSTRACT. – Two justifications can be found for the use of a system of bonuses and penalties in automobile insurance. The first refers to risk selection, the second to the inducement to greater prudence at the wheel. Based on a model which incorporates both factors, it appears that the system of bonuses and penalties should be radically different depending on the primacy of one factor or the other. From the stand point of risk selection, only the observed frequence of past accidents matters; but in order to incite safe driving the time element should enter in the tarification. In the light of the theoretical discussion, the French insurance clauses of 1976 and 1984 are reviewed.

* D. HENRIET : Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique; J. C. ROCHET : Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique et CEREMADE, Université Paris-IX - Dauphine

1 Introduction

Depuis leur introduction il y a quelques années, les clauses de bonus-malus constituent un élément important de la tarification en assurance automobile. Le principe de ces clauses est d'une part d'offrir une diminution de prime aux assurés n'ayant déclaré aucun sinistre responsable, et d'autre part de pénaliser les assurés accidentés en fonction du nombre de leurs sinistres. Alors que dans certains pays comme la Grande-Bretagne chaque compagnie est libre d'appliquer son propre barème, la Direction des Assurances a choisi d'imposer la même formule à toutes les compagnies opérant en France. Or ce système, adopté en 1976, vient de faire l'objet d'une réactualisation à compter du 1^er^ juillet 1984.

L'entrée en vigueur de la nouvelle clause (dénommée désormais clause de réduction-majoration) a suscité des commentaires assez critiques, notamment de la part des associations de consommateurs. La principale justification officielle (cf. *Notes Bleues*, n° 140 et 141, septembre 1983) de l'abandon de l'ancien système de bonus-malus réside dans l'évolution des statistiques d'accidents : en 1976 un conducteur avait en moyenne un accident tous les 6 ans, en 1983 la moyenne est d'un accident tous les 9 ans. Or, le nouveau système conduit (apparemment) à majorer les primes puisque, par exemple, il faudra désormais 12 ans sans accident (au lieu de 8) pour atteindre le niveau maximal de bonus (50 % de la prime de référence). D'où les réactions scandalisées du public et des mouvements de consommateurs : la baisse de la fréquence d'accidents a entraîné une diminution des charges des compagnies d'assurance, qui devraient donc diminuer d'autant leurs primes et non les majorer.

Ce raisonnement a le défaut de négliger le fait que la prime effectivement payée par l'assuré dépend non seulement du coefficient de réduction-majoration qui lui est appliqué en propre, mais aussi du niveau de la prime de base. Or, l'augmentation de cette prime de base est déterminée chaque année dans une négociation entre les compagnies et la Direction des Assurances du Ministère des Finances. L'objectif retenu par le Ministère est, *grosso modo*, d'assurer l'équilibre financier des compagnies, et donc d'équilibrer le montant total des primes perçues et les charges des compagnies, une fois déduits les produits financiers. Par conséquent le barème de bonus-malus n'a pas d'incidence sur le volume global des primes versées par les assurés mais uniquement sur la répartition de ces primes entre les différentes catégories d'assurés. Or deux conceptions différentes du risque automobile s'opposent :

– d'après la première, le nombre d'accidents causés par un conducteur pendant une période donnée [1] traduit essentiellement le comportement, prudent ou non, qu'il a adopté durant cette période. Bonus et Malus fournissent ainsi la carotte et le bâton qui doivent inciter les conducteurs à la prudence. Dans un monde idéal où tous les conducteurs seraient prudents, ils auraient tous un bonus maximal. Cet aspect de l'assurance a été étudié dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de « moral hazard » ce qu'on traduira par « *incertitude sur le comportement* » (cf. Holmström [1979], Shavell [1979]);

– d'après la deuxième conception, au contraire, le fait d'être un bon ou mauvais conducteur est une caractéristique intrinsèque de chacun de nous, peu affectée par nos décisions conscientes de conduire prudemment ou non. Par conséquent, les clauses de bonus-malus ont surtout pour l'assureur une finalité statistique, puisqu'elles lui permettent de « séparer » les bons des mauvais conducteurs, sur la base des observations passées. L'accent est donc mis sur le problème de la « sélection » des risques.

Il est clair que la formule retenue pour le système de bonus-malus doit dépendre de la conception choisie par le législateur. Nous nous proposons dans cet article de fournir les premières bases conceptuelles permettant d'explorer cette question. Dans un modèle très simple, avec un seul type d'accident et deux classes de risques, nous caractérisons le système de bonus-malus optimal dans les deux conceptions évoquées plus haut. [2] Dans la partie 3 nous nous plaçons du point de vue de la sélection des risques et nous montrons que le coefficient de bonus-malus d'un assuré ne doit dépendre que de la fréquence des sinistres qu'il a occasionné. Dans la partie 4 nous nous plaçons du point de vue de l'incertitude sur le comportement. Nous montrons alors que le coefficient de bonus-malus doit aussi dépendre de la répartition des sinistres dans le temps. Typiquement, un sinistre récent doit être pénalisé plus lourdement qu'un sinistre ancien. Finalement dans la partie 5 nous donnons une description simplifiée des systèmes de bonus-malus français. Nous comparons l'ancien système au nouveau à la lumière des résultats qualitatifs obtenus plus haut.

2 Le modèle

Le modèle que nous utiliserons sera commun aux deux approches citées précédemment.

Nous considérons une compagnie d'assurances supposée, comme il est d'usage, neutre vis-à-vis du risque. Cette compagnie est confrontée à un grand nombre de consommateurs identiques. Ces consommateurs sont caractérisés par une fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern $u(.)$ croissante strictement concave, et un taux d'actualisation $\delta < 1$. Le revenu R de chaque consommateur à chaque période est soumis à un risque gouverné à la période n par une variable aléatoire X_n :

– Si $X_n = 1$ (il y a accident), le revenu net est $R - L$.

– Si $X_n = 0$ (il n'y a pas accident), le revenu net est R.

1. Une fois que l'on a tenu compte des critères observables et pertinents, tels que la classe et le type du véhicule, la zone géographique, l'âge et la CSP du conducteur; nous ne parlerons pas de ces aspects qui se réfèrent à ce que l'on a coutume d'appeler tarification *a priori*.

2. Il existe un troisième aspect, que nous n'évoquerons pas ici. Il s'agit du phénomène de rétention des sinistres par des assurés qui veulent garder leur bonus. Des travaux récents (HEY [1985]) montrent que cet aspect est négligeable, en tout cas en Grande-Bretagne.

Les X_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, de Bernouilli de paramètre p_i. Pour la simplicité de l'exposé, nous supposerons que les consommateurs sont identiques sauf en ce qui concerne la probabilité d'accident p_i et qu'il existe uniquement deux types de risques :

$$p_i \in \{p_0, p_1\}, \qquad p_0 > p_1$$

DÉFINITION 1 : Un contrat de type bonus-malus de longueur $(N+1)$ est la donnée d'une famille de primes dépendant des antécédents de sinistres de l'assuré depuis la signature du contrat :

$$T = \{T_0, T_1(x_1), T_2(x_1, x_2), \ldots, T_N(x_1, \ldots, x_N)\}$$

Nous noterons $z = (x_1, \ldots, x_n)$ une chronique d'accidents typique. $T_n(z)$ est la prime payée l'année $(n+1)$ en fonction des accidents des n premières années. Nous exigerons que la prime payée reste entre deux limites $\underline{T}$ et $\bar{T}$ telles que :

$$0 < \underline{T} \leqslant p_1 L < p_0 L \leqslant \bar{T} \leqslant L$$

La solution au problème d'asymétrie d'information habituellement proposée par les théoriciens dans le domaine de l'assurance consiste à opérer une différenciation des produits par le biais d'un jeu de niveaux de couverture différents. En d'autres termes, ils suggèrent de discriminer entre les assurés au moyen d'une tarification non linéaire reliant la prime à la quantité d'assurance achetée. En pratique, on constate que ce système n'est pas appliqué : la couverture est totale en assurance de responsabilité, tandis qu'en assurance de dommages, les assureurs appliquent le plus souvent le même niveau de franchise à tous les assurés. Ainsi, la pratique de la couverture partielle consiste essentiellement pour les assureurs à se prémunir contre la déclaration de petits sinistres qui engendrent des coûts de gestion hors de proportion. En fait, la pratique de tarifs de type Bonus-Malus permet d'opérer une discrimination *intertemporelle* entre les consommateurs ayant des probabilités d'accidents différentes. En conséquence, et ceci pourra donner une représentation plus adaptée à la réalité, nous supposerons que les consommateurs bénéficient d'une couverture totale à chaque période. En d'autres termes, le revenu net de l'assuré dans une période donnée ne dépendra pas du fait qu'il ait eu ou non un accident durant cette période. C'est ce que nous appellerons *couverture complète* ex post. Cependant, un accident aujourd'hui aura des répercussions sur les primes à venir : c'est ce que nous appellerons *couverture partielle* ex ante.

3 Le point de vue de la sélection des risques

Nous supposerons dans cette partie que chaque individu appartient *a priori* à l'une des classes de risque p_1 ou p_0, indépendamment de ses efforts de prévention. Une autre interprétation possible est de considérer que ces efforts sont observables par l'assureur, de telle sorte que des conducteurs imprudents peuvent être pénalisés. Le problème de l'assureur est lié à la disparité intrinsèque des individus combinée avec l'asymétrie d'information entre la compagnie et les consommateurs. Chaque consommateur connaît son type mais n'a pas forcément intérêt à le révéler à la compagnie. Comme nous avons supposé qu'il n'y avait que deux classes de risques, il suffit à la compagnie de proposer deux contrats (intertemporels), un par type d'agents. D'autre part, la compagnie connaît les valeurs des risques p_0 et p_1, son seul problème est d'empêcher les consommateurs d'un type de prétendre à l'autre type. Nous demanderons aussi que la compagnie ne fasse pas de perte, quel que soit le flux d'entrées-sorties de consommateurs des deux types à chaque période. Cela revient à demander que chaque contrat fasse un bénéfice positif ou nul sur chaque type de risque et pour chaque durée d'appartenance à la compagnie. Nous noterons E_0 et E_1 les opérateurs d'espérance mathématique correspondant aux probabilités p_0 et p_1 c'est-à-dire que si f_n est une fonction de $X_1, \ldots, X_n$ on a :

$$E_i(f_n) = \sum_{x \in \{0,\ 1\}^n} p_i^{\sum_{j=1}^{n} x_j} (1-p_i)^{n-\sum_{j=1}^{n} x_j} f_n(x_1, \ldots, x_n), \qquad i=0,\ 1.$$

Si T est un contrat de durée $(N+1)$ on posera :

$$V_i(T) = \sum_{n=0}^{N} \delta^n E_i u(R - T_n), \qquad i=0,\ 1.$$

Définition 2 : L'ensemble $\mathscr{C}$ des contrats admissibles est constitué des paires de contrats (T^0, T^1) telles que :

(1) $$V_0(T^0) \geqslant V_0(T^1)$$

(2) $$V_1(T^1) \geqslant V_1(T^0)$$

(3) $$\forall n, \quad E_0(T_n^0) \geqslant p_0 L$$

(4) $$\forall n, \quad E_1(T_n^1) \geqslant p_1 L$$

(5) $$\forall n, \quad \forall z, \qquad \underline{T} \leqslant T_n(z) \leqslant \bar{T}$$

Proposition 1 : [3] Il existe une paire unique $(\bar{T}^0, \bar{T}^1)$ de contrats Pareto optimaux dans $\mathscr{C}$. $\bar{T}_n^0(z)$ vaut $p_0 L$ pour tout n et z. De plus $\bar{T}^1$ est la solution du programme suivant :

$$\mathscr{P}_N \left\{ \begin{array}{lll} & \operatorname{Max} V_1(T) & \\ (6) & E_1 T_n \geqslant p_1 L, & \forall n \in \{0, \ldots, N\} \\ (7) & V_0(T) \leqslant V_0(\bar{T}^0) & \\ (8) & \underline{T} \leqslant T_n(z) \leqslant \bar{T}, & \forall z \in \{0,\ 1\}^n, \quad \forall n \in \{0, \ldots, N\} \end{array} \right.$$

Bien que le problème $\mathscr{P}_N$ ne soit pas concave il est possible de démontrer la proposition suivante, étape intermédiaire dans la preuve de la proposition 1.

3. Les démonstrations sont rassemblées dans l'Annexe.

PROPOSITION 2 : Le programme $\mathscr{P}_N$ possède une solution unique.

Nous allons alors décrire les principales propriétés de la solution. Pour cela il est commode d'introduire le ratio $\alpha_n(z)$:

$$\forall z \in \{0, 1\}^n, \qquad z=(x_1, \ldots, x_n) : \alpha_n(z) = \frac{p_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{p_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}$$

$\alpha_n(z)$ constitue en fait ce que l'on a l'habitude d'appeler le rapport de vraisemblance pour une chronique $z=(x_1, \ldots, x_n)$ donnée;

$\alpha_n(z)$ ne dépend en fait que de la fréquence observée $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$:

$$\alpha_n(z) = \alpha(\bar{z})^n$$

où

$$(9) \qquad \alpha(\bar{z}) = \frac{1-p_0}{1-p_1}\left(\frac{p_0}{1-p_0}\,\frac{1-p_1}{p_1}\right)^{\bar{z}}$$

LEMME 3 : $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathrm{R}^+$ défini par (9) est une fonction croissante. L'équation $\alpha(z)=1$ a une solution unique notée z^* avec $z^* \in]p_1, p_0[$.

Nous pouvons alors énoncer les principales propriétés du contrat de bonus-malus optimal.

PROPRIÉTÉ 4 : $\mathrm{N}>0$, $n>0$, $\bar{\mathrm{T}}_n^1(z)$ pour $z \in \{0, 1\}^n$ ne dépend pas de N ni de δ.

PROPRIÉTÉ 5 : $n>0$, $\mathrm{T}_n^1(z)$ ne dépend que de la fréquence d'accidents : $z=(x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$:

$$(10) \qquad \bar{\mathrm{T}}_n^1(z) = \mathrm{Proj}_{[\underline{\mathrm{T}}, \bar{\mathrm{T}}]}\left\{\mathrm{R} - u'^{-1}\left(\frac{\lambda_n}{1-\alpha(\bar{z})^n}\right)\right\}$$

avec λ_n défini par :

$$(11) \qquad \mathrm{E}_1\,\bar{\mathrm{T}}_n^1 = p_1\,\mathrm{L}$$

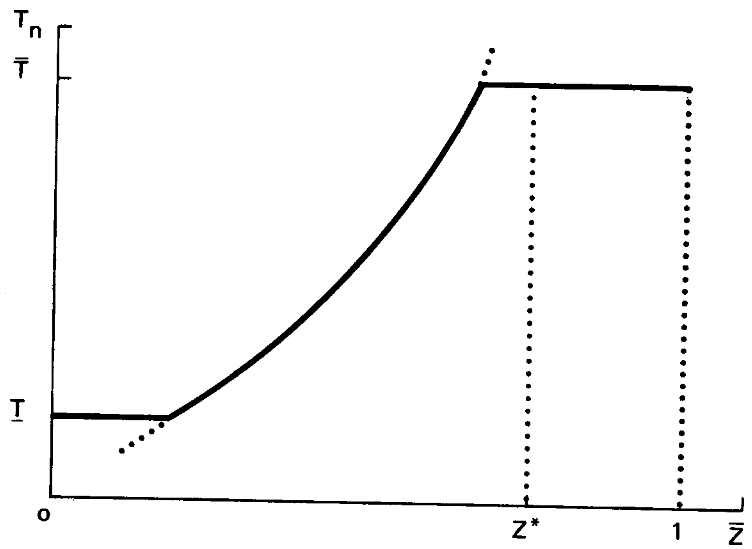
et

$$\mathrm{Proj}_{[\underline{\mathrm{T}}, \bar{\mathrm{T}}]}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [\underline{\mathrm{T}}, \bar{\mathrm{T}}] \\ \underline{\mathrm{T}} & \text{si } x < \underline{\mathrm{T}} \\ \bar{\mathrm{T}} & \text{si } x > \bar{\mathrm{T}} \end{cases}$$

La propriété 4 est somme toute naturelle. L'information importante pour un problème de sélection est la fréquence observée. Ceci devra être contrasté avec le cas de l'incertitude sur le comportement où, comme nous le verrons, la répartition dans le temps aura une grande importance. En proposant des contrats de Bonus-Malus à des fins de sélection, la compagnie d'assurance utilise, en fin de compte, l'information disponible sur l'assuré pour réestimer à chaque période la prime qu'elle lui fait payer. La fréquence, qui est une statistique exhaustive, résume *toute* l'information disponible sur cet assuré.

Nous représentons sur la figure 1 suivante l'allure de la prime en fonction de la fréquence observée.

FIGURE 1



Le comportement de $\bar{T}_n^1$ lorsque n tend vers l'infini est également intéressant :

PROPRIÉTÉ 6 : $\bar{T}_n^1$ converge, point par point, vers $\bar{T}_\infty$ défini par :

$$\bar{T}_\infty(z) = p_1 L \quad \text{si} \quad \bar{z} < z^*$$
$$\bar{T}_\infty(z) = \bar{T} \quad \text{si} \quad \bar{z} > z^*$$

Cette propriété asymptotique est en fait très simple à interpréter : lorsque le nombre de périodes d'observation tend vers l'infini, la fréquence observée tend presque sûrement vers la fréquence statistique. Si la fréquence observée est inférieure à z^* l'assuré appartient, avec probabilité 1 à la classe des bas risques ($z^* > p_1$), il paie alors la prime actuarielle p_1 L correspondant à son risque. Au contraire, si $\bar{z} > z^*$ l'assuré paie la prime maximale. Ainsi on se réserve dans le calcul de la prime, une marge d'erreur ($z^* - p_1$).

Cette idée est très similaire à celle exposée par RUBINSTEIN et YAARI [1983] dans le cas d'incertitude sur le comportement. Dans leur analyse, les assurés sont pénalisés si la fréquence observée dépasse la probabilité « basse » de plus qu'une marge d'erreur donnée par la loi du logarithme itéré. DIONNE [1983] a montré qu'une telle analyse pouvait être adaptée au cas de la sélection. Dans les deux approches où l'horizon est infini et le taux d'actualisation nul, l'optimum de premier rang peut être atteint au moyen de systèmes de bonus-malus. Dans notre cas (horizon fini et actualisation positive), plus proche de la réalité, ce n'est pas ainsi.

4 Le point de vue de l'incertitude sur le comportement

Dans le contexte précédent la probabilité d'accident était une caractéristique intrinsèque de l'assuré. Nous supposerons ici qu'au contraire, le comportement de l'individu peut modifier son niveau de risque. Ainsi la probabilité d'accident p dépend de « l'effort » plus ou moins intense que l'assuré met en œuvre pour réduire le risque.

Nous noterons $\pi(e)$ la probabilité d'avoir un accident si le niveau d'effort est e. Comme dans la partie précédente, nous nous limitons à deux niveaux de risque et donc à deux niveaux d'effort. Nous supposons en outre que le coût de l'effort $c(e)$ est additif en terme d'utilité :

$$(12) \qquad \begin{cases} \pi(0)=p_0, & c(0)=0 \quad \text{(pas d'effort)} \\ \pi(1)=p_1, & c(1)=c \quad \text{(effort)} \end{cases}$$

Dans ce contexte, où le niveau d'effort n'est pas observable, se pose le problème traditionnel d'incertitude sur le comportement. Supposons par exemple que l'assureur propose une couverture totale du risque à chaque période; l'intérêt immédiat de l'assuré est alors de ne faire aucun effort. L'assureur est donc contraint, pour équilibrer son budget, de proposer la prime actuarielle correspondant au risque élevé. Cette situation est en général inefficace. En effet, l'utilisation d'une couverture partielle peut inciter les assurés à adopter un comportement prudent et donc diminuer les charges de l'assureur qui peut ainsi pratiquer des primes plus faibles. Si le coût de l'effort n'est pas trop grand l'effet global d'une telle solution est positif. Ce type de problèmes a été largement étudié dans la littérature (Shavell [1979], Holmström [1979], Lambert [1983]). En fait, il est souvent légitime de considérer qu'un niveau de risque élevé est socialement indésirable. Nous supposerons donc que le coût des efforts de prévention est plus que contrebalancé par les effets directs et indirects de la diminution des risques individuels.

L'utilisation de tarifs de type « Bonus-Malus » est clairement adaptée à ce contexte. Bien que l'assuré soit couvert totalement à chaque période, le fait que sa prime dépende de son passé s'avère être une « menace » efficace pour l'inciter à l'effort. En effet, l'assuré sait que s'il ne fait pas d'effort, sa chronique d'accidents risque de s'alourdir et donc sa prime future risque d'augmenter. A la différence du problème de la sélection des risques, l'utilisation du passé ne sert pas à une quelconque estimation, mais constitue plutôt une menace sur l'assuré. Nous nous restreindrons pour cette raison à des contrats à mémoire fixe T; la prime payée l'année n dépend des accidents survenus depuis l'année $n-\mathrm{T}$. Un tel système s'apparente en fait à un système de classes. Il comprend au plus 2^{T} classes (autant que de chroniques possibles).

Nous noterons par $y_i \in \{0, 1\}^T$ le i-ième élément de $\{0, 1\}^T$ selon l'ordre lexicographique ($y_1 = (0, \ldots, 0)$, $y_2 = (0, \ldots, 1)$, ...).

A chaque période l'assuré passe d'une classe à l'autre selon qu'il a eu ou non un accident.

Posons y^n la classe d'un assuré quelconque à la période n. y^n est un processus de Markov contingent au niveau d'effort. La matrice de transition $M(e)$ dépend du niveau d'effort de la période :

$$(13) \qquad M(e)_{ij} = \text{prob}\,(y^{n+1} = y_j / y^n = y_i)$$

La prime payée dans la classe y_i est $T(y_i)$; posons alors $R(y_i) = R - T(y_i)$.

A chaque période, pour un système de primes $T(y_i)$ donné, le consommateur doit décider de son niveau d'effort. D'après le principe de la programmation dynamique, nous avons :

Proposition 7 : Soit v_i l'utilité escomptée optimale si le consommateur est dans la classe y_i; alors :

$$(14) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 2^T\},$$
$$v_i = \text{Max}\,\{u(R(y_i)) - c + \delta(M(1)v)_i,\ u(R(y_i)) + \delta(M(0)v)_i\}$$

où v est le vecteur $(v_i)_{i=1, \ldots, 2^T}$.

Nous imposons alors que le système induise les assurés à l'effort quelle que soit leur situation. Cette contrainte est tout à fait légitime. En effet, comme nous l'avons vu, ce modèle ne tient pas compte du coût social indirect de l'accident, il n'est pas abusif de supposer que ce coût est tel que le législateur désire réduire le risque. Ainsi :

$$(15) \qquad v = u - c\mathbf{1} + \delta M(1)v$$

$$(16) \qquad (M(1) - M(0))v \geqslant \frac{c}{\delta}\mathbf{1}$$

Nous en déduisons la contrainte d'incertitude sur le comportement :

$$(17) \qquad [M(1) - M(0)][I - \delta M(1)]^{-1}u \geqslant \frac{c}{\delta}\mathbf{1}$$ [4]

Les contraintes (17) (2^{T-1} contraintes) imposent une certaine dispersion des primes $T(.)$ appliquées dans les différentes classes. Alors que les assurés sont totalement couverts à chaque période, cette dispersion introduit une couverture incomplète *ex ante*.

Nous allons rechercher alors les meilleurs systèmes de bonus-malus. Pour cela nous considérons l'état stationnaire dans lequel les consommateurs ont un passé de longueur plus grande que T. La proportion d'assurés dans la classe y_i est alors :

$$(18) \qquad p(y_i) = p_1^{\sum_j y_{ij}}(1 - p_1)^{T - \sum_j y_{ij}}$$

où y_{ij} est la j-ième composante du vecteur y_i.

4. $[I\text{-}\delta M(1)]^{-1}$ est bien définie, cf. Annexe.

L'utilité escomptée moyenne est alors :

$$\sum_i p(y_i)v_i = \frac{1}{1-\delta}\sum_i p(y_i)\{u(\mathrm{R}(y_i))-c\} \tag{19}$$

Nous imposons qu'à chaque période l'assureur ne fasse pas de pertes :

$$\sum_i p(y_i)\mathrm{R}(y_i) \leqslant \mathrm{R}-p_1\mathrm{L} \tag{20}$$

Proposition 8 : Un système de bonus-malus optimal du point de vue de l'incertitude sur le comportement est une solution du programme :

$$\mathscr{P}_{\mathrm{T}}\left\{\begin{array}{lll} & \mathrm{Max}\sum_i p(y_i)u(\mathrm{R}(y_i)) \\ & (\mathrm{R}(y_i))_{y_i\in\{0,\ 1\}^{\mathrm{N}}} \\ (20) & \text{s. c.}\sum_i p(y_i)\mathrm{R}(y_i)\leqslant \mathrm{R}-p_1\mathrm{L} \\ (17) & [\mathrm{M}(1)-\mathrm{M}(0)][\mathrm{I}-\delta\mathrm{M}(1)]^{-1}u(\mathrm{R}(y))\geqslant \frac{c}{\delta}\mathbf{1} \\ (21) & \mathrm{R}-\bar{\mathrm{T}}\leqslant \mathrm{R}(y_i)\leqslant \mathrm{R}-\underline{\mathrm{T}} \end{array}\right.$$

Il est facile de voir qu'un tel contrat existe ($\mathscr{P}_{\mathrm{T}}$ revient à maximiser une fonction continue sur un compact).

De même la valeur de $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}$ croît avec T. En effet si R_{T} est une solution de $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}$ alors $\mathrm{R}_{\mathrm{T}+1}$ défini par

$$\mathrm{R}_{\mathrm{T}+1}(0,\ y_i)=\mathrm{R}_{\mathrm{T}+1}(1,\ y_i)=\mathrm{R}_{\mathrm{T}}(y_i)$$

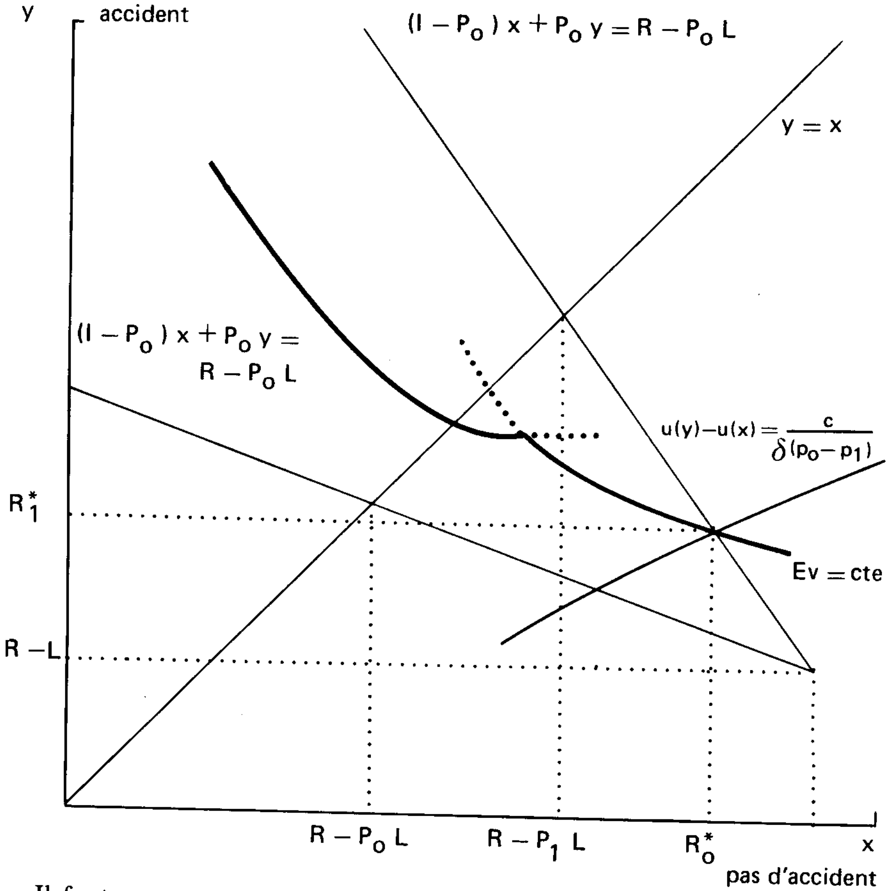
vérifie les contraintes du programme $\mathscr{P}_{\mathrm{T}+1}$ et donne la même valeur que $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}$. Ainsi on est tenté de penser qu'il faut une mémoire la plus grande possible. En fait, lorsque T augmente l'état stationnaire envisagé est de moins en moins adapté à la réalité. D'autre part une mémoire relativement grande exige des coûts de gestion et d'investigation élevés. Pour donner une idée des propriétés qualitatives de ces contrats, nous étudions plus particulièrement les cas $\mathrm{T}=1$ et $\mathrm{T}=2$.

Pour une mémoire de longueur $\mathrm{T}=1$ le problème s'écrit :

$$(\mathscr{P}_1)\left\{\begin{array}{l} \underset{\mathrm{R}_0,\ \mathrm{R}_1}{\mathrm{Max}}\{p_1u(\mathrm{R}_1)+(1-p_1)u(\mathrm{R}_0)\} \\ p_1\mathrm{R}_1+(1-p_1)\mathrm{R}_0\leqslant \mathrm{R}-p_1\mathrm{L} \\ u(\mathrm{R}_0)-u(\mathrm{R}_1)\geqslant \dfrac{c}{\delta(p_0-p_1)} \\ \mathrm{R}-\bar{\mathrm{T}}\leqslant \mathrm{R}_i\leqslant \mathrm{R}-\underline{\mathrm{T}} \end{array}\right.$$

Ce problème est formellement identique à un problème d'incertitude sur le comportement en une période avec couverture partielle (figure 2).

FIGURE 2



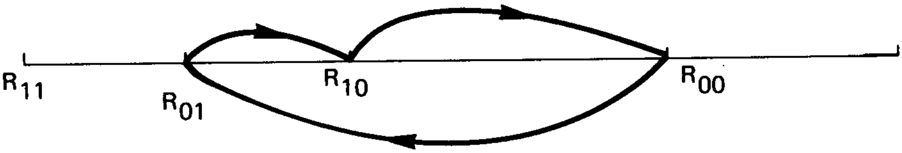
Il faut remarquer que la solution dépend fortement du niveau du taux d'escompte δ. En particulier si δ est trop faible, le coût d'incitation à la prudence devient très élevé et les assurés peuvent préférer dans ce cas la prime actuarielle forte p_0 L.

Pour une mémoire de longueur T = 2 le problème devient :

$$(\mathscr{P}_2)\left\{\begin{array}{ll} & \operatorname{Max}(1-p_1)^2 u(\mathrm{R}_{00})+p_1(1-p_1)u(\mathrm{R}_{01}) \\ & \qquad\qquad +p_1(1-p_1)u(\mathrm{R}_{10})+p_1^2(\mathrm{R}_{11}) \\ (22) & \text{s. c. } (1-p_1)^2\mathrm{R}_{00}+p_1(1-p_1)\mathrm{R}_{01} \\ & \qquad\qquad +p_1(1-p_1)\mathrm{R}_{10}+p_1^2\mathrm{R}_{11}\leqslant \mathrm{R}-p_1\mathrm{L} \\ (23) & u(\mathrm{R}_{00})-u(\mathrm{R}_{01})+\delta\{(1-p_1)u(\mathrm{R}_{00})+p_1u(\mathrm{R}_{01}) \\ & \qquad\qquad -(1-p_1)u(\mathrm{R}_{10})-p_1u(\mathrm{R}_{11})\}\geqslant \dfrac{c}{\delta(p_0-p_1)} \\ & u(\mathrm{R}_{10})-u(\mathrm{R}_{11})+\delta\{\ldots\}\geqslant \dfrac{c}{\delta(p_0-p_1)} \\ (24) & \mathrm{R}-\bar{\mathrm{T}}\leqslant \mathrm{R}_{ij}\leqslant \mathrm{R}-\underline{\mathrm{T}}. \end{array}\right.$$

PROPOSITION 9 : Si à un optimum de $\mathscr{P}_2$ les contraintes (24) ne sont pas saturées alors : $\mathrm{R}_{00}\geqslant \mathrm{R}_{10}>\mathrm{R}_{01}\geqslant \mathrm{R}_{11}$.

Ainsi le système de Bonus-Malus doit non seulement dépendre de la fréquence des accidents mais aussi de leur répartition dans le temps. Pour deux chroniques identiques du point de vue du nombre d'accidents la pénalisation sera plus forte pour celle dont les accidents sont récents. Ceci doit être compris dans le sens que nous avons évoqué plus haut : l'utilisation du passé sert uniquement de menace. Supposons qu'un assuré soit à une date donnée dans la classe (0, 0), s'il a un accident aujourd'hui, il lui faudra deux périodes sans accident pour rejoindre la classe (0, 0).



5 Les systèmes français avant et après la réforme de 1983

5.1. L'ancien système

Le premier système « légal » date de 1976 et possède les caractéristiques suivantes :

– un bonus *additif* de 10 % pour la première et seconde année sans accident, de 5 % par année supplémentaire. La prime ne peut pas être inférieure à 50 % de la prime de base;

– les mali dépendent du nombre d'accidents dans la période : 10 % pour un accident, 40 % pour deux accidents, 100 % pour chaque accident supplémentaire.

Afin de pouvoir mieux comparer avec nos résultats théoriques des parties précédentes, nous allons nous placer dans le cas simplifié d'un accident au plus par période. Avec nos notations (*a* pour « ancien ») la formule s'écrit :

$$\text{(25)} \qquad T_N^a(z) = (T_0 - 0{,}10 \times N) + (0{,}20 \times N)\,\bar{z} + 0{,}05\,K(z)$$

Dans la formule (25) $\bar{z}$ représente la fréquence observée et $K(z)$ le nombre de séquences de 3 années consécutives sans accident dans la chronique z, $z \in \{0, 1\}^N$.

(25) avec $T_0 = 1$ est valable tant que la prime minimale (0,5) n'est pas atteinte. Dès que 0,5 est atteint les accidents passés sont oubliés et le calcul se poursuit sur la base des accidents postérieurs avec $T_0 = 0{,}5$. La première remarque que nous pouvons faire est que la prime ne dépend pas uniquement de la fréquence observée. Pour une chronique de 4 ans par exemple nous avons :

$$T^a(0001) = 0{,}85$$

alors que

$$T^a(0010) = 0{,}80.$$

Lorsque la longueur N de la chronique tend vers l'infini, le comportement limite de T_N^a dépend de la répartition des accidents dans le temps. A titre de simplification nous allons étudier le cas d'école dans lequel les accidents sont distribués régulièrement : un accident toutes les k années. Un calcul simple permet de montrer que pour $k \geqslant 3$, et une fois le régime stationnaire établi, l'assuré paie une prime de 0,5 chaque année, avec une pénalité de 0,1 chaque année suivant l'année d'un sinistre. En moyenne sur l'état stationnaire il paiera donc :

$$T^a = (0{,}5 + 0{,}1\,p)\,T_0$$

où p est la probabilité d'accident.

5.2. Le nouveau système (juillet 1984)

Ses principales caractéristiques sont les suivantes :

— bonus *proportionnel* de 5 %;

— malus *proportionnel* de 25 % pour chaque sinistre, quelle que soit sa date de survenance;

— retour rapide à la prime de base dans le cas de 2 années sans accident;

— une prime plancher égale à $0{,}5 \times$ prime de base et une prime plafond de $3{,}5 \times$ prime de base.

Le calcul de la formule donnant la prime en fonction du passé n'est pas très simple. En négligeant la clause de retour rapide :

— tant que les limites (0,5 et 3,5) ne sont pas atteintes la prime est donnée par (n pour nouveau) :

$$T_N^n(z) = \left[0{,}95 \times \left(\frac{1{,}25}{0{,}95}\right)^{\bar{z}}\right]^N T_0 \qquad (26)$$

— si l'une des limites est atteinte, tous les sinistres passés sont oubliés et le calcul ne tient compte que de la chronique postérieure en remplaçant T_0 par 0,5 ou 3,5 dans (26). Ainsi si la prime minimale est atteinte, elle reste au même niveau tant qu'il n'y a pas de survenance de sinistre. Cependant le premier sinistre déclaré engendre une pénalité, même si la chronique antérieure est très favorable. Ainsi la prime payée ne dépend pas uniquement de la fréquence observée.

En fait, et cela constitue son originalité, le nouveau système semble incorporer simultanément les deux points de vue, sélection et incertitude sur le comportement. En effet, du strict point de vue de l'incertitude sur le comportement, il est suffisant de ne faire dépendre la prime que des accidents les plus récents. En particulier la partie de la chronique faisant référence à un passé lointain ne doit pas intervenir. Au contraire, du point de vue de la sélection, la seule préoccupation de l'assureur est l'estimation du risque d'un assuré; pour cette raison, la chronique entière donne l'information maximale : un assuré ayant une très bonne chronique pendant longtemps puis ayant un sinistre doit être peu pénalisé. Ici, le nouveau système combine ces deux aspects : la fréquence observée est utilisée comme estimateur du risque pour une discrimination à long terme, puis l'utilisation de primes limites et la clause de retour rapide opèrent, à court terme, comme des outils d'incitation à la prudence.

Du point de vue de la sélection, l'expression entre crochets de (26) est très similaire à un ratio de vraisemblance :

$$\alpha(\bar{z}) = \frac{1-p_0}{1-p_1}\left[\frac{p_0}{1-p_0}\cdot\frac{1-p_1}{p_1}\right]^{\bar{z}}$$

Si nous voulons trouver les valeurs de p_0 et p_1 cohérentes avec cette interprétation nous obtenons :

$$\frac{1-p_0}{1-p_1} = 0{,}95$$

$$\frac{p_0}{p_1} = 1{,}25$$

ce qui donne $p_1 = 0{,}167$ et $p_0 = 0{,}209$. Ces valeurs sont sensiblement plus grandes que les fréquences moyennes observées qui sont de $\frac{1}{9}$ pour 1983 et $\frac{1}{6}$ pour 1976.

Si nous essayons d'ajuster notre formule à ces deux valeurs observées, en faisant l'hypothèse d'un système cherchant à différencier les « nouveaux » conducteurs (un accident tous les 9 ans) des anciens (un accident tous les 6 ans) nous obtenons :

$$\frac{1-p_0}{1-p_1} = \text{Bonus} = 0{,}937 \,(\text{contre } 0{,}95)$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \text{Malus} = 1{,}5 \,(\text{contre } 1{,}25)$$

Le comportement de la prime sur des chroniques régulières contraste avec celui observé dans l'ancien système. Pour un accident toutes les k années on a : si $k > 5$, une fois le régime stationnaire atteint, la prime croît de 0,5 à 0,625 l'année suivant le sinistre puis décroît graduellement : 0,59; 0,56; 0,54; 0,51; 0,5. La prime moyenne limite est alors :

$$T^n_\infty = 0{,}5 + 0{,}32\,p$$

Si $k \leqslant 5$, la limite 3,5 est atteinte (peut être après un long régime transitoire), l'état stationnaire est une oscillation entre 3,5 et une valeur excédant 2,6. Ainsi il apparaît que le nouveau système a un fort pouvoir discriminant, la valeur critique de la fréquence se situant à environ $\frac{1}{5}$.

Pour pouvoir mettre en évidence les performances respectives de l'ancien et du nouveau système en matière de sélection, nous avons calculé pour les deux systèmes, la prime moyenne payée sur 50 ans par un assuré ayant un accident toutes les k années. Au vu du tableau suivant, il est clair que le nouveau système est nettement plus efficace que l'ancien du strict point de vue de la sélection.

Propriétés de sélection des deux systèmes :

Prime moyenne sur 50 ans pour un conducteur ayant un accident toutes les k années.

k	3	4	5	6	7	8	
Ancien	0,58	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	
Nouveau	1,13	1,06	1,00	0,82	0,70	0,66	
k	9	10	11	12	13	14	15
Ancien	0,55	0,55	0,55	0,55	0,54	0,54	0,54
Nouveau	0,63	0,62	0,61	0,60	0,59	0,59	0,59

ANNEXE

Sélection

1. *Démonstration de la Proposition 1*

Soit (T^0, T^1) une paire de contrats admissibles quelconque. De (3) et de la concavité de u, on déduit :

$$V_0(T^0) \leqslant \frac{1-\delta^{N+1}}{1-\delta} u(R-p_0 L) = V_0(\bar{T}^0)$$

où $\bar{T}^0_n(z) \equiv p_0 L$.

Soit alors $\bar{T}^1$ solution du programme $(\mathscr{P}_N)$ (si elle existe). Il faut montrer : $(\bar{T}^0, \bar{T}^1) \in \mathscr{C}$ et $V_1(\bar{T}^1) \geqslant V_1(T^1)$. Puisque $p_0 > p_1$, $\bar{T}^0$ satisfait (6), (7), (8). Donc :

$$V_1(\bar{T}^1) \geqslant V_1(\bar{T}^0).$$

Ceci assure, avec (6) et (8), que $(\bar{T}^0, \bar{T}^1)$ appartient à $\mathscr{C}$.

Enfin puisque (T^0, T^1) est lui-même dans $\mathscr{C}$ nous avons :

$$V_0(T^1) \leqslant V_0(T^0) \leqslant V_0(\bar{T}^0)$$

Donc T^1 vérifie (6), (7), (8) et ainsi, de la définition de $\bar{T}^1$ on déduit :

$$V_1(T^1) \leqslant V_1(\bar{T}^1).$$

Ainsi, en résolvant le programme $\mathscr{P}_N$, paramétré par $\bar{T}^0_n \equiv p_0 L$, les consommateurs à bas risque atteignent le maximum d'utilité pour tout $(T^0, T^1) \in \mathscr{C}$. □

2. *Il faut montrer alors la Proposition 2*

$\mathscr{P}_N$ revient à maximiser une fonction continue sur un compact. $\mathscr{P}_N$ possède donc une solution.

La fonction objectif de $\mathscr{P}_N$ est concave, mais, du fait de (7), l'ensemble défini par les contraintes n'est pas convexe. La condition nécessaire du premier ordre n'est donc pas suffisante. Il est possible d'éliminer cette difficulté en procédant comme suit :

Étape 1 : Pour toute solution de $\mathscr{P}_N$, (7) est saturée. Sinon le contrat optimal consisterait à appliquer une prime (égale à p_1 L) indépendante de la chronique, contrat qui ne vérifie pas (7).

Étape 2 : Si T_0 est différent de $\underline{T}$ et $\bar{T}$ (ce que nous supposerons), alors $\mathscr{P}_N$ peut être résolu période par période. En effet, puisque (7) est saturée, nous avons :

$$(27) \qquad u(R-T_0)=\frac{1-\delta^{N+1}}{1-\delta}u(R-p_0 L)-\sum_{n=1}^{N}\delta^n E_0 u(R-T_n)$$

Donc si les contraintes (8) sur T_0 ne sont pas saturées, $\mathscr{P}_N$ peut se réécrire, en remplaçant dans la fonction objectif $u(R-T_0)$ par sa valeur :

$$\mathscr{P}'_N \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\operatorname*{Max}_{T} \sum_{n=1}^{N} \delta^n [E_1 u(R-T_n)-E_0 u(R-T_n)] & & \\ \quad \text{s. c. } E_1(T_n)\geq p_1 L, & & \forall n\in\{1, \ldots, N\} \\ T_n(z)\leq \bar{T}, & \forall z\in\{0, 1\}^N, & \forall n\in\{1, \ldots, N\} \\ T_n(z)\geq \underline{T}, & \forall z\in\{0, 1\}^N, & \forall n\in\{1, \ldots, N\} \end{array}\right.$$

$\mathscr{P}'_N$ se décompose en N programmes indépendants, dans lesquels ni N, ni δ n'interviennent :

$$\begin{array}{ll} & \\ (28)_n & \\ (29)_{n,z} & \\ (30)_{n,z} & \end{array} \qquad \mathscr{P}'^n \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{Max}\{E_1 u(R-T_n)-E_0 u(R-T_n)\} & \\ E_1(T_n)\geq p_1 L & \\ T_n(z)\leq \bar{T}, & z\in\{0, 1\}^n \\ T_n(z)\geq \underline{T}, & z\in\{0, 1\}^n \end{array}\right.$$

Étape 3 : Pour tout $n>0$, $\mathscr{P}'^n$ possède une solution unique. En effet la condition nécessaire du premier ordre s'écrit :

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \forall z\in\{0, 1\}^n, \\ (p^n_{x_1}(z)-p^n_{x_0}(z))\,u'(R-T_n(z))=p^n_{x_1}(z)\,[\lambda_n-\theta_n(z)+\beta_n(z)] \end{array}\right.$$

où λ_n, $\theta_n(z)$ et $\beta_n(z)$ sont les multiplicateurs positifs associés respectivement à $(23)_n$, $(29)_{n,z}$, $(30)_{n,z}$ et $p^n_{x_i}(z)$ sont les probabilités d'occurence de la chronique z pour un assuré de type i.

Soit alors

$$\alpha_n(z)=\frac{p^n_{x_0}(z)}{p^n_{x_1}(z)}.$$

$\alpha_n(z)$ peut s'écrire :

$$\alpha_n(z)=(\alpha(\bar{z}))^n$$

où

$$\alpha(\bar{z})=\frac{1-p_0}{1-p_1}\left[\frac{p_0}{1-p_1}\,\frac{1-p_1}{p_1}\right]^{\bar{z}}$$

Donc (31) peut s'écrire :

$$(32) \qquad (1-[\alpha(\bar{z})]^n)\,u'(\mathrm{R}-\mathrm{T}_n(z))=\lambda_n-\theta_n(z)+\beta_n(z)$$

à laquelle on joint les conditions d'exclusion :

$$(33) \qquad \theta_n(z)>0 \;\Rightarrow\; \mathrm{T}_n(z)=\bar{\mathrm{T}}$$

$$(34) \qquad \beta_n(z)>0 \;\Rightarrow\; \mathrm{T}_n(z)=\underline{\mathrm{T}}$$

En particulier, si $\alpha(\bar{z})>1$, alors par (32) et (33), on a $\mathrm{T}_n(z)=\bar{\mathrm{T}}$. Donc bien que la fonction objectif de $\mathscr{P}'^n$ ne soit pas concave globalement, elle le devient sur les termes pour lesquels $\alpha(z)\leqslant 1$. Ainsi $\mathscr{P}'^n$ a une solution unique donnée par (32), (33) et (34). □

3. *Lemme 3*

$$\alpha(\bar{z})=\frac{1-p_0}{1-p_1}\left(\frac{p_0}{1-p_0}\,\frac{1-p_1}{p_1}\right)^{\bar{z}}$$

α est clairement croissante du fait que $p_0>p_1$. De plus :

$$\alpha(p_1)=\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{1-p_0}{1-p_1}\right)^{1-p_1}.$$

En tant que fonction de p_0 cette expression est décroissante sur $]p_1,\ 1]$:

$$\frac{\partial}{\partial p_0}[p_1\,\mathrm{Log}\,p_0+(1-p_1)\,\mathrm{Log}(1-p_0)]=\frac{p_1-p_0}{p_0(1-p_0)}<0$$

Donc $\alpha(p_1)<1$. De même $\alpha(p_0)>1$. □

4. *Propriété 5*

Découle immédiatement de (32), (33), (34).

5. *Propriété 6*

Il est d'abord nécessaire de montrer :

| LEMME : $(\lambda_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite non décroissante.

Supposons $\lambda_n>\lambda_{n+1}$. Puisque $\bar{\mathrm{T}}^1_n(z)=\bar{\mathrm{T}}$ pour $\alpha(\bar{z})>1$, nous avons pour tout z tel que $\mathrm{T}_n(z)<\bar{\mathrm{T}}$:

$$\frac{\lambda_n}{1-\alpha(\bar{z})^n}>\frac{\lambda_{n+1}}{1-\alpha(\bar{z})^{n+1}}$$

Donc par (11) :

$$\forall z, \qquad \mathrm{T}_n(z)<\bar{\mathrm{T}} \;\Rightarrow\; \mathrm{T}_n(z)>\mathrm{T}_{n+1}(z).$$

Ceci implique que pour tout k de $\{0,\ \ldots,\ n\}$ tel que $\mathrm{T}_n\left(\frac{k}{n}\right)<\bar{\mathrm{T}}$ on a

$$\mathrm{T}_n\left(\frac{k}{n}\right)>\mathrm{T}_{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant\mathrm{T}_{n+1}\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

Donc :

$$\sum_k^n p_1^k (1-p_1)^{n-k} \bar{T}_n\left(\frac{k}{n}\right) > \sum_k^n p_1^k (1-p_1)^{n-k} \bar{T}_{n+1}\left(\frac{k}{n+1}\right)$$

c'est-à-dire (puisque $\lambda_n > 0$) :

$$p_1 L > \frac{1}{1-p_1}(E_1 \bar{T}_{n+1} - p_1^{n+1} \bar{T}_{n+1}(1))$$

Or

$$\bar{T} \leqslant L \quad \Rightarrow \quad p_1^{n+1} \bar{T}_{n+1}(1) \leqslant p_1^2 L$$

D'où $E_1 \bar{T}_{n+1} < p_1 L$ impossible

Ainsi (λ_n) possède une limite $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Donc

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(z) \to \bar{T}_\infty(z) &= \sup(R - u'^{-1}(\lambda_\infty), \underline{T}) \qquad \text{si} \quad z < z^* \\ &= \bar{T} \qquad \text{si} \quad z > z^* \end{aligned}$$

Mais $\bar{z}$ converge p. s. vers $p_1 < z^*$.

Donc

$$E_1(\bar{T}_n) \to \sup(R - u'^{-1}(\lambda_\infty), \underline{T})$$

Comme $E_1(\bar{T}_n)$ est constante et égale à $p_1 L$:

$$\lambda_\infty = u'(R - p_1 L)$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{T}_\infty(z) &= p_1 L \qquad \text{si} \quad z < z^* \\ &= \bar{T} \qquad \text{si} \quad z > z^*. \end{aligned}$$

□

Incertitude sur le comportement

1. *Existence de* $(I - \delta M(1))^{-1}$

L'élément i_{ij} de $M(1)^k$ représente la probabilité de passer de la classe i à la classe j en k années. Pour $k \geqslant T$ c'est exactement $p(y_j)$ cf. (18). Donc :

$$(I - \delta M(1))^{-1} = I + \delta M + \delta^2 M^2 + \ldots + \frac{\delta^T}{1-\delta} M^T.$$

2. *Proposition 9*

Les conditions nécessaires du premier ordre sont :

(*a*) $u'(R)\{(1-p_1)^2 + \mu_0[1+\delta(1-p_1)] + \mu_1 \delta(1-p_1)\} = \lambda(1-p_1)^2$

(*b*) $u'(R_{10})\{p_1(1-p_1) + \mu_0[-\delta(1-p_1)] + \mu_1[1-\delta(1-p_1)]\} = \lambda p_1(1-p_1)$

(*c*) $u'(R_{01})\{p_1(1-p_1) + \mu_0[-1+\delta p_1] + \mu_1[\delta p_1]\} = \lambda p_1(1-p_1)$

(*d*) $u'(R_{11})\{p_1^2 + \mu_0[-\delta p_1] + \mu_1[-1-\delta p_1]\} = \lambda p_1^2$

$\lambda \geqslant 0$, $\mu_0 \geqslant 0$, $\mu_1 \geqslant 0$ sont les multiplicateurs associés à (22) et (23).

a. La contrainte (22) est saturée.

Sinon, augmenter R_{00} entraînerait une augmentation de l'objectif tout en restant dans l'ensemble défini par les contraintes.

b. $\mu_0 > 0$ *et* $\mu_1 > 0$.

(α) : μ_0 et μ_1 ne peuvent être simultanément nuls. S'ils l'étaient la solution serait R_{ij} indépendant de ij et les contraintes d'incertitude sur le comportement ne seraient pas satisfaites.

(β) : on déduit :

$$R_{00} > R_{11}$$
$$R_{10} > R_{01}$$

et

$$(e) \qquad R_{00} > R_{01}, \qquad R_{10} \geqslant R_{11} \qquad \text{si} \quad \mu_0 > 0$$

et

$$(f) \qquad R_{10} > R_{11}, \qquad R_{00} \geqslant R_{01} \qquad \text{si} \quad \mu_1 > 0$$

Supposons $\mu_0 = 0$, on a alors $R_{00} = R_{01}$.

Les contraintes donnent

$$\delta\{u(R_{00}) - (1-p_1)u(R_{10}) - p_1 u(R_{11})\} \geqslant \frac{c}{\delta(p_0 - p_1)}$$

et

$$u(R_{10}) - u(R_{11}) + \delta\{u(R_{00}) - (1-p_1)u(R_{10}) - p_1 u(R_{11})\} = \frac{c}{\delta(p_0 - p_1)}$$

Ce qui impose $R_{10} \leqslant R_{11}$; impossible.

Le cas $\mu_1 = 0$ est similaire.

c. On déduit donc :

$$R_{00} > R_{01}, \qquad R_{10} > R_{11}, \qquad R_{00} > R_{11}, \qquad R_{10} > R_{01}$$

Les trois contraintes sont saturées. Donc :

$$u(R_{10}) - u(R_{11}) = u(R_{00}) - u(R_{01})$$

Supposons alors $R_{00} \leqslant R_{10}$, donc $R_{11} \geqslant R_{01}$. Alors :

$$(g) \qquad u(R_{00}) - u(R_{01}) \geqslant \frac{c}{\delta(p_0 - p_1)}$$

et

$$(h) \qquad u(R_{10}) - u(R_{11}) \geqslant \frac{c}{\delta(p_0 - p_1)}$$

Or, le maximum de l'utilité sous les contraintes (g), (h) et (5) est atteint pour $R_{00} = R_{10}$ et $R_{01} = R_{11}$. Donc : $R_{00} \geqslant R_{10} > R_{01} \geqslant R_{11}$. □

• Références bibliographiques

DIONNE, G. (1983). — « Adverse Selection and Repeated Insurance Contracts », *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, octobre, p. 316-332.

HEY, J. (1985). — « Non Claim Bonus », à paraître dans *The Geneva Papers on Risk and Insurance.*

HOLMSTRÖM, B. (1979). — « Moral Hazard and Observability », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 10, p. 74-91.

RUBINSTEIN, A. et YAARI, M. (1983). — « Repeated Insurance Contracts and Moral Hazard », *Journal of Economic Theory* 30, n° 1, p. 74-97.

SHAVELL, S. (1979). — « On Moral Hazard and Insurance », *Quarterly Journal of Economics*, 93, p. 541-562.

LAMBERT, R. (1983). — « Long-Term Contracts and Moral Hazard », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 14, n° 2, p. 441-452.